Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°1 - Solutions

Rappels 5$^{\text{ème}}$: Analyse

Série A

Le 23 septembre 2024 Classe: 6BCD

1. Soit la fonction
$$f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$$
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f(x)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et d la droite d'équation $3x - 3y - 2 = 0$.

.../1 (a) Déterminer le domaine de définition et le(s) zéro(s) de la fonction.

$dom_f = \mathbb{R}$ et zéros : $x = 0$ et $x = 1$.

.../4 (b) Calculer la limite de $f(x) - x + \frac{2}{3}$ lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$. Que peut-on en conclure pour d?

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} - x + \frac{2}{3} = \infty - \infty \text{ F.I.}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2} - \left(x-\frac{2}{3}\right)\right)\left(\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{x(x-1)^2}\left(x-\frac{2}{3}\right) + \left(x-\frac{2}{3}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{x(x-1)^2}\left(x-\frac{2}{3}\right) + \left(x-\frac{2}{3}\right)^2}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(x-1)^2 - \left(x-\frac{2}{3}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{x(x-1)^2}\left(x-\frac{2}{3}\right) + \left(x-\frac{2}{3}\right)^2}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x - x^3 + 2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{8}{27}}{\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{x(x-1)^2}\left(x-\frac{2}{3}\right) + \left(x-\frac{2}{3}\right)^2}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{x}{3} + \frac{8}{27}}{\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{x(x-1)^2}\left(x-\frac{2}{3}\right) + \left(x-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\infty}{\infty}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{x}{3}}{x^2 + x^2 + x^2} = 0$$
La droite d est donc une A.O. pour la courbe $\mathcal{C}$

.../5 (c) Etudier la variation de $f(x)$. Expliquer ***clairement*** ce qui se passe en $x = 0$ et $x = 1$.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)' = \frac{1}{3}\left(x(x-1)^2\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x(x-1)^2\right)'$$
$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}}\left((x-1)^2 + 2x(x-1)\right) = \frac{3x^2-4x+1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}}$$
$$= \frac{(3x-1)(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}} = \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}$$

x		0		$\frac{1}{3}$		1	
N	$-$		$-$	0	$+$		$+$
D	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$\pm\infty$	$+$

En $x = 0$, il y une tangente verticale et en $x = 1$ un point de rebroussement.

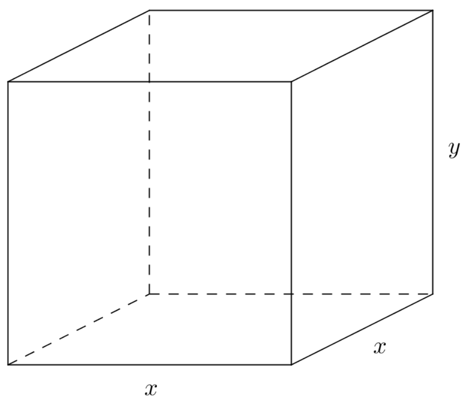
.../3 (d) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse -2.

On a $f(2) = \sqrt[3]{4}$ et $f'(a) = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{2}}$ et la tangente a pour équation

$$t \equiv y - \sqrt[3]{-18} = \frac{-7}{3\sqrt[3]{2}}(x+2)$$

.../7 2. Avec 72 cm de fil de fer, on façonne un prisme de base carrée et ayant un volume maximum. Calculer les arêtes et le volume de ce prisme.

La situation est schématisée ci-dessous.



On a $V = x^2y$ et $8x + 4y = 72$. Dès lors $V = 18x^2 - 2x^3$.
$V' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (A.R.) ou $x = 6$. On vérifie avec un tableau de signe de V' que ce point correspond bien à un maximum.
On a donc $x = 6cm$, $y = 6cm$ et $V = 216cm^3$. Le prisme est un cube.

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°1 - Solutions

Rappels 5ème : Analyse

Série B

Le 23 septembre 2024 Classe: 6BCD

.../7 1. Avec 96 cm de fil de fer, on façonne un prisme de base carrée et ayant un volume maximum. Calculer les arêtes et le volume de ce prisme.

Voir série A

2. Soit la fonction

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f(x)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et d la droite d'équation $3y - 3x + 1 = 0$.

.../1 (a) Déterminer le domaine de définition et le(s) zéro(s) de la fonction.

$dom_f = \mathbb{R}$ et zéros : $x = 0$ et $x = 1$.

.../4 (b) Calculer la limite de $f(x) - x + \frac{1}{3}$ lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$. Que peut-on en conclure pour d ?

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2(x-1)} - x + \frac{1}{3} = \infty - \infty \quad \text{F.I.}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)} - \left(x - \frac{1}{3}\right)\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2(x-1)}\left(x-\frac{1}{3}\right) + \left(x-\frac{1}{3}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2(x-1)}\left(x-\frac{1}{3}\right) + \left(x-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(x-1) - \left(x-\frac{1}{3}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2(x-1)}\left(x-\frac{1}{3}\right) + \left(x-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^2 - x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{27}}{\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2(x-1)}\left(x-\frac{1}{3}\right) + \left(x-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{x}{3} + \frac{1}{27}}{\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2(x-1)}\left(x-\frac{1}{3}\right) + \left(x-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{x}{3}}{x^2+x^2+x^2} = 0$$

La droite d est donc une A.O. pour la courbe $\mathcal{C}$

.../5 (c) Etudier la variation de $f(x)$. Expliquer ***clairement*** ce qui se passe en $x=0$ et $x=1$.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2(x-1)}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^2(x-1)\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2(x-1)\right)'$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}}\left(2x(x-1)+x^2\right) = \frac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}}$$

$$= \frac{x(3x-2)}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}} = \frac{3x-2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}$$

x		0		$\frac{2}{3}$		1	
N	$-$		$-$	0	$+$		$+$
D	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$\pm\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+$

En $x=1$, il y une tangente verticale et en $x=0$ un point de rebroussement.

.../3 (d) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 2.

On a $f(2)=\sqrt[3]{4}$ et $f'(a) = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{2}}$ et la tangente a pour équation

$$t \equiv y - \sqrt[3]{4} = \frac{4}{3\sqrt[3]{2}}(x-2)$$