

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°8 - Solutions

Formules d'addition et de duplication

Le 11 décembre 2025

Classe: 5C

- .../7 1. Exprimer $\sin 3a$ en fonction de $\sin a$. Si $\tan a = \frac{1}{2}$ et $a \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right]$ calculer la valeur exacte de $\sin 3a$.

On a successivement :

$$\begin{aligned}\sin 3a &= \sin(2a + a) \\ &= \sin 2a \cos a + \sin a \cos 2a \\ &= 2 \sin a \cos a \cos a + \sin a (1 - 2 \sin^2 a) \\ &= 2 \sin a \cos^2 a + \sin a - 2 \sin^3 a \\ &= 2 \sin a (1 - \sin^2 a) + \sin a - 2 \sin^3 a \\ &= 2 \sin a - 2 \sin^3 a + \sin a - 2 \sin^3 a \\ &= 3 \sin a - 4 \sin^3 a\end{aligned}$$

Si $\tan a = \frac{1}{2}$, $\cot a = 2$ et $\frac{1}{\sin^2 a} = 1 + 4$ c'est-à-dire $\sin^2 a = \frac{1}{5}$ ou encore $\sin a = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Comme a est dans le 3ème quadrant, le sinus y est négatif et $\sin a = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

On a donc $\sin 3a = -3\frac{\sqrt{5}}{5} - 4\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3$ ou, après simplification $\sin 3a = -\frac{11\sqrt{5}}{25}$.

- .../7 2. Démontrer que $\frac{2 \sin(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)} = \tan a + \tan b$

On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{2(\sin a \cos b + \sin b \cos a)}{\cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b} \\ &= \frac{2(\sin a \cos b + \sin b \cos a)}{2(\sin a \cos b + \sin b \cos a)} \\ &= \frac{2 \cos a \cos b}{2 \sin a \cos b} + \frac{2 \sin b \cos a}{2 \sin b \cos a} \\ &= \frac{2 \cos a \cos b}{2 \sin a \cos b} + \frac{2 \cos a \cos b}{2 \sin b \cos a} \\ &= \frac{2 \cos a \cos b}{2 \cos a \cos b} + \frac{2 \cos a \cos b}{2 \cos a \cos b} \\ &= \tan a + \tan b \\ &= \mathcal{II}\end{aligned}$$

.../6

3. Vérifier que $\frac{1}{1 + \tan a \tan 2a} = \cos 2a$.

On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{1}{1 + \tan a \tan 2a} \\&= \frac{1}{1 + \tan a \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}} \\&= \frac{1}{1 + \frac{2 \tan^2 a}{1 - \tan^2 a}} \\&= \frac{1}{\frac{1 - \tan^2 a + 2 \tan^2 a}{1 - \tan^2 a}} \\&= \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \\&= \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \\&= (1 - \tan^2 a) \frac{1}{1 + \tan^2 a} \\&= (1 - \tan^2 a) \cos^2 a \\&= \cos^2 a - \tan^2 a \cos^2 a \\&= \cos^2 a - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} \cos^2 a \\&= \cos^2 a - \sin^2 a \\&= \cos 2a \\&= \mathcal{II}\end{aligned}$$