Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°2 - Solutions

Rappels de 4ème : le second degré

Série A

Le 7 octobre 2025 | Classe: 5B

1. On donne la droite $d \equiv 3x + 2y = -5$ et la parabole $\mathcal{P}_1 \equiv y = x^2 - 3(p+1) - px$ où p est une paramètre réel.

.../5 (a) Pour quelle(s) valeur(s) de p, la parabole $\mathcal{P}_1$ est-elle tangente à le droite d.

Pour montrer que la droite et la parabole sont tangentes, on exprime qu'il n'y a qu'un point d'intersection. Les points d'intersection sont donnés par :

$$\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ y = x^2 - 3(p+1) - px \end{cases}$$

En injectant la deuxième équation dans la première, on obtient

$$2\left(x^2 - px - 3(p+1)\right) + 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - (2p-3)x - 6(p+1) + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - (2p-3)x - 6p - 1 = 0$$

En exprimant que le Δ de cette équation est nul (1 point d'intersection), on a :

$$(2p-3)^2 - 4.2.(-6p-1) = 0 \Leftrightarrow 4p^2 - 12p + 9 + 48p + 8 = 0 \Leftrightarrow 4p^2 + 36p + 17 = 0$$

En résolvant cette dernière équation, on obtient $\Delta = 1024$ et $\begin{cases} p_1 = -\dfrac{1}{2} \\ p_2 = -\dfrac{17}{2} \end{cases}$

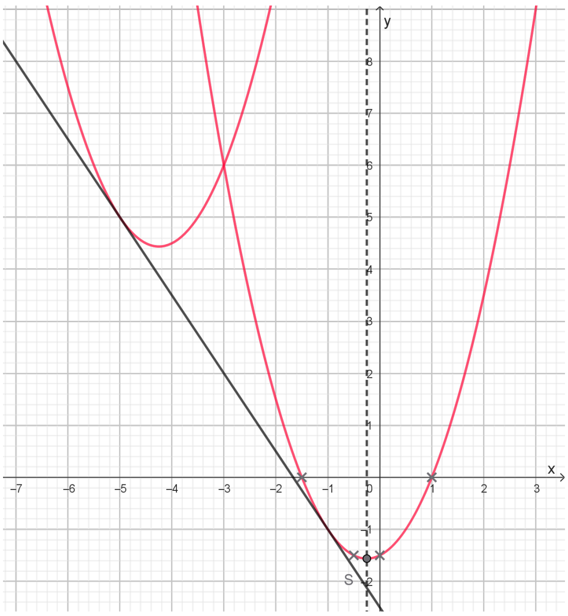
.../3 (b) Trouver les coordonnées du point d'intersection entre la droite et la parabole ;

Les abscisses des point d'intersection sont les solutions de l'équation $2x^2 - (2p-3)x - 6p - 1 = 0$, soit (puisque $\Delta = 0$) $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2p-3}{4}$. Si $p = -\dfrac{1}{2}$, on trouve $x = -1$ et $y = -1$ (eq. de la droite). Si $p = -\dfrac{17}{2}$, on trouve $x = -5$ et $y = 5$.

On considère maintenant la parabole $\mathcal{P}_2 \equiv y = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

.../3 (c) Dessiner la parabole après avoir déterminé ses caractéristiques.

— $S\left(-\frac{1}{4}, -\frac{25}{4}\right)$
— $AS \equiv x = \frac{1}{4}$
— Intersection avec Ox : $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ et $(1; 0)$
— Intersection avec Oy : $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$
— $a > 0$, le sommet est un minimum (la concavité de la courbe est dirigée vers le haut).



.../5 (d) Ecrire l'équation de la (des) tangente(s) à la parabole passant par $A(1, -2)$.
L'équation d'une droite passant par A est $d \equiv y + 2 = m(x - 1)$. En exprimant la condition de tangence comme ci-dessus :

$$\begin{cases} y = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = m(x-1) - 2 \end{cases}$$

En injectant la deuxième équation dans la première, on obtient

$$m(x-1)-2 = x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2+\left(\frac{1}{2} - m\right)x+\frac{1}{2}+m = 0 \Leftrightarrow 2x^2+(1-2m)x+1+2m = 0$$

En exprimant que le Δ de cette équation est nul : $(1 - 2m)^2 - 4.2.(1 + 2m) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 20m - 7 = 0$ dont les solutions sont $m = \frac{5}{2} \pm 2\sqrt{2}$.

.../8 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{x-5}{3x+1} - \dfrac{2x}{x+2} < -3$

$$\frac{x-5}{3x+1} - \frac{2x}{x+2} < -3$$

$$\frac{(x-5)\cdot(x+2) - 2x\cdot(3x+1) + 3\cdot(x+2)\cdot(3x+1)}{(x+2)\cdot(3x+1)} < 0$$

$$\frac{x^2 - 5x + 2x - 10 - (6x^2+2x) + 3\cdot(3x^2+x+6x+2)}{(x+2)\cdot(3x+1)} < 0$$

$$\frac{4x^2+16x-4}{(x+2)\cdot(3x+1)} < 0$$

$$\frac{x^2+4x-1}{(x+2)\cdot(3x+1)} < 0$$

$$x^2+4x-1=0 \quad \Delta = 16+4=20$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} \left\langle \begin{array}{l} -2-\sqrt{5} \\ -2+\sqrt{5} \end{array} \right.$$

x		$-2-\sqrt{5}$		-2		$-\frac{1}{3}$		$-2+\sqrt{5}$	
N	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
D	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
Q	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$$S = \left]-2-\sqrt{5}, -2\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, -2+\sqrt{5}\right[$$

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°2 - Solutions

Rappels de 4$^{\text{ème}}$: le second degré

Série A

Le 7 octobre 2025 Classe: 5B

.../8 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{2x}{x+2} - \dfrac{x-5}{3x+1} > 3$

$$\frac{2x}{x+2} - \frac{x-5}{3x+1} > 3$$

$$\frac{2x\cdot(3x+1) - (x-5)\cdot(x+2) - 3\cdot(x+2)\cdot(3x+1)}{(x+2)\cdot(3x+1)} > 0$$

$$\frac{6x^2+2x-(x^2-5x+2x-10)-3\cdot(3x^2+x+6x+2)}{(x+2)\cdot(3x+1)} > 0$$

$$\frac{-4x^2-16x+4}{(x+2)\cdot(3x+1)} > 0$$

$$\frac{-x^2-4x+1}{(x+2)\cdot(3x+1)} > 0$$

$$-x^2-4x+1=0 \qquad \Delta = 16+4=20$$

$$x = \frac{4\pm2\sqrt{5}}{-2} \left\langle \begin{array}{l} -2-\sqrt{5} \\ -2+\sqrt{5} \end{array} \right.$$

x		$-2-\sqrt{5}$		-2		$-\frac{1}{3}$		$-2+\sqrt{5}$	
N	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
D	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
Q	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

$$S = \left]-2-\sqrt{5}, -2\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, -2+\sqrt{5}\right[$$

2. On donne la droite $d \equiv 5x - 2y = 11$ et la parabole $\mathcal{P}_1 \equiv y = x^2 - 3(p+1) + px$ où p est une paramètre réel.

.../5 (a) Pour quelle(s) valeur(s) de p, la parabole $\mathcal{P}_1$ est-elle tangente à le droite d.

Pour montrer que la droite et la parabole sont tangentes, on exprime qu'il n'y a qu'un point d'intersection. Les points d'intersection sont donnés par :

$$\begin{cases} 5x - 2y = 11 \\ y = x^2 - 3(p+1) + px \end{cases}$$

En injectant la deuxième équation dans la première, on obtient

$$5x - 2\left(x^2 + px - 3(p+1)\right) - 11 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - (2p-5)x + 6(p+1) - 11 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - (2p-5)x + 6p -$$

En exprimant que le Δ de cette équation est nul (1 point d'intersection), on a :

$$(2p-5)^2 - 4.(-2).(6p-5) = 0 \Leftrightarrow 4p^2 - 20p + 25 + 48p - 40 = 0 \Leftrightarrow 4p^2 + 28p - 15 = 0$$

En résolvant cette dernière équation, on obtient $\Delta = 1024$ et $\begin{cases} p_1 = \frac{1}{2} \\ p_2 = -\frac{15}{2} \end{cases}$

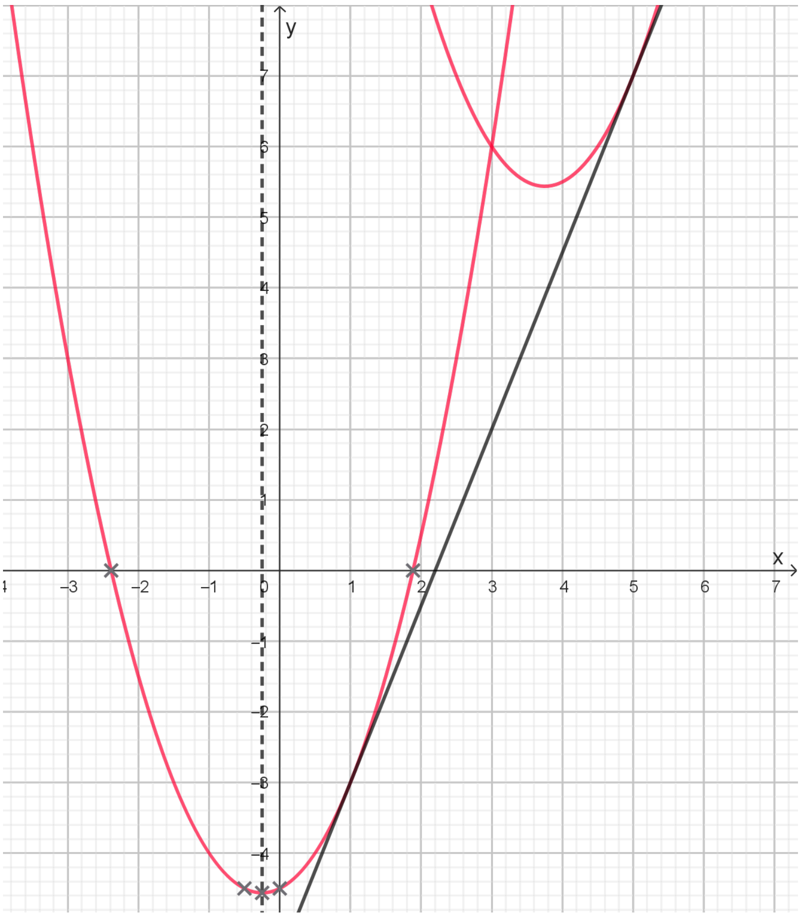
.../3 (b) Trouver les coordonnées du point d'intersection entre la droite et la parabole ;

Les abscisses des point d'intersection sont les solutions de l'équation $-2x^2 - (2p-5)x + 6p - 5 = 0$, soit (puisque $\Delta = 0$) $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2p-5}{-4}$. Si $p = \frac{1}{2}$, on trouve $x = 1$ et $y = -3$ (eq. de la droite). Si $p = -\frac{15}{2}$, on trouve $x = 5$ et $y = 7$.

On considère maintenant la parabole $\mathcal{P}_2 \equiv y = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$

.../3 (a) Dessiner la parabole après avoir déterminé ses caractéristiques.

- $S\left(-\frac{1}{4}, -\frac{73}{16}\right)$
- $AS \equiv x = -\frac{1}{4}$
- Intersection avec Ox : $\left(\frac{-1-\sqrt{73}}{4}, 0\right)$ et $\left(\frac{-1+\sqrt{73}}{4}, 0\right)$
- Intersection avec Oy : $\left(0, -\frac{9}{2}\right)$
- $a > 0$, le sommet est un minimum (la concavité de la courbe est dirigée vers le haut).



.../5 (b) Ecrire l'équation de la (des) tangente(s) à la parabole passant par $A(-1,-6)$.

L'équation d'une droite passant par A est $d \equiv y+6 = m(x+1)$. En exprimant la condition de tangence comme ci-dessus :

$$\begin{cases} y = x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{9}{2} \\ y = m(x+1) - 6 \end{cases}$$

En injectant la deuxième équation dans la première, on obtient

$$m(x+1)-6 = x^2+\frac{1}{2}x-\frac{9}{2} \Leftrightarrow x^2+\left(\frac{1}{2}-m\right)x+\frac{3}{2}-m = 0 \Leftrightarrow 2x^2+(1-2m)x+3-2m = 0$$

En exprimant que le Δ de cette équation est nul : $(1-2m)^2 - 4.2.(3-2m) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 12m - 23 = 0$ dont les solutions sont $m = -\dfrac{3}{2} \pm 2\sqrt{2}$.