Chapitre 1

Analyse

1.1 Exercices

1. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 3}{x^2 + c}$ où a, b et $c \in \mathbb{R}$

   (a) Déterminer a, b et c pour que la fonction admette les droites $y = 2$ et $x = 1$ pour asymptotes et sachant que la tangente au point d'intersection du graphique de $f(x)$ avec l'axe Oy a pour équation $-4x + y + 3 = 0$ $\rightarrow y = 4x - 3$

- $AH \equiv y = 2 \Rightarrow \lim\limits_{\pm\infty} f(x) = 2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{ax^2 + bx + 3}{x^2 + c} = \dfrac{\infty}{\infty}$ FI

$= \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{ax^2}{x^2} = a \rightarrow a = 2$

- $AV \equiv x = 1 \Leftrightarrow 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$

- $f'(0) = 4$

$f'(x) = \dfrac{(4x + b)(x^2 - 1) - (2x^2 + bx + 3)(2x)}{(x^2 - 1)^2}$

$f'(0) = 4 \Leftrightarrow \dfrac{b.(-1) - 0}{1} = 4 \Leftrightarrow b = -4$

(b) Etudier la variation de la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2-4x+3}{x^2-1}$

$$f'(x) = \frac{(4x-4)(x^2-1)-(2x^2-4x+3)(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{4x^3}-4x-4x^2+4-\cancel{4x^3}+8x^2-6x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{4x^2-10x+4}{(x^2-1)^2}$$

zéros : N : $\Delta = 100 - 64 = 36$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{8} < \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

D : $x = \pm 1$

x		-1		$\frac{1}{2}$		1		2	
N	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
D	$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	m	$\nearrow$
		?AV		$(\frac{1}{2}, -2)$		?AV		$(2,1)$	

2. Ecrire l'équation de la tangente au graphique de $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x} - x$ en le point d'abscisse $\frac{3}{2}$.

$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\sqrt[3]{\frac{9}{4}} - \frac{3}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 - 3x\right)^{-\frac{2}{3}}(2x-3) - 1$

$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}(0) - 1$

$= -1$

$\Rightarrow t \equiv y + \sqrt[3]{\frac{9}{4}} + \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$\equiv y = -x - \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

3. On donne la fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

   (a) Déterminer le domaine et les zéros de $f(x)$.

   (b) Ecrire l'équation des asymptotes de $f(x)$.

   (c) Calculer la dérivée première de $f(x)$ et justifier que $f(x)$ est toujours croissante. Préciser clairement ce qui se passe en $x = 0$.

   (d) Calculer le coefficient angulaire de la tangente au point d'inflexion de la courbe. La dérivée seconde de $f(x)$ s'écrit :

$$f''(x) = \frac{(4x-1)\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}{4x^2(1-x)^2}$$

a) CE : $\dfrac{x}{1-x} \geq 0 \qquad (1-x) \neq 0$

x		0		1	
N	$-$	0	$+$		$+$
D	$+$		$+$	0	$-$
CE	$-$	0	$+$	$\boxed{/}$	$-$

dom f : $[0, 1[$, zéro : $x = 0$

b) $\lim\limits_{1} f(x) = +\infty \Rightarrow$ AV : $x = 1$

pas d'AH ni d'AO car $\pm\infty \notin$ dom f

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}} \cdot \dfrac{1-x+x}{(1-x)^2}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\,(1-x)^2} > 0$

$\Rightarrow f(x)$ tjs croissante

en $x=0$, $f'(x)=+\infty$. La tangente à la courbe en ce point est verticale

d) Le point d'inflexion se trouve en une valeur de x telle que $f''(x)=0$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (\text{A.R. à cause du } D) \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1/4}{3/4}}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}\,\frac{\sqrt{3}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{9}\,3}{\cancel{16}\,8}}$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

4 . On donne la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a\dfrac{x^3+8}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{\sqrt{x+6}-2}{\sqrt{(2x+20)a^2}-4a} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de a la fonction est-elle continue ?

Il faut imposer que $\lim\limits_{-2^-} f(x) = \lim\limits_{-2^+} f(x) = f(-2)$

$\lim\limits_{-2^-} f(x) = \frac{0}{0}$ FI

$$= \lim_{-2^-} a \cdot \frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}}$$

$$= 12a$$

$\lim\limits_{-2^+} f(x) = \frac{0}{0}$ FI

$$= \lim_{-2^+} \frac{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)(\sqrt{(2x+20)a^2}+4a)}{(\sqrt{(2x+20)a^2}-4a)(\sqrt{(2x+20)a^2}+4a)(\sqrt{x+6}+2)}$$

$$= \lim_{-2^+} \frac{(x+6-4)(\ldots)}{(2xa^2+4a^2)(\ldots)}$$

$$= \lim_{-2^+} \frac{\cancel{(x+2)}(\ldots)}{2a^2\cancel{(x+2)}(\ldots)}$$

$$= \frac{\sqrt{(-4+20)a^2}+4a}{2a^2(\sqrt{4}+2)}$$

$$= \frac{8a}{8a^2} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 12a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{3}}{6}$$

5. Soit

$$f(x) = \frac{(1-x)^3}{x^2}$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

(a) Trouver a, b, c, d tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{x^2}$ pour tout x réel non nul.

(b) Etudier les variations de f .

(c) Déterminer une équation de la tangente t à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

(d) Peut-on trouver un point de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ soit parallèle à la droite $d \equiv y = -x$? Si oui, préciser l'équation de cette tangente t'.

(e) Montrer que $\mathcal{C}$ a une asymptote oblique d'. Préciser leurs positions respectives.

a) Division euclidienne

$$\begin{array}{rrrr|l} -x^3 & +3x^2 & -3x & +1 & x^2 \\ \cline{5-5} +x^3 & & & & -x+3 \\ \hline & +3x^2 & -3x & +1 & \\ & -3x^2 & & & \\ \cline{2-2} & & -3x & +1 & \end{array}$$

$$f(x) = -x + 3 + \frac{-3x+1}{x^2}$$

$\Rightarrow a = -1, \ b = 3, \ c = -3$ et $d = 1$

b) $$f'(x) = -1 + \frac{-3.x^2 - 2x(-3x+1)}{x^4}$$

$$= \frac{-x^{\cancel{4}\,3} + 3x^{\cancel{2}} - 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= -\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3}$$

$$= -\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^3} \quad \text{(par Horner)}$$

x		-2		0		1	
$-(x+2)$	$+$	0	$-$		$-$		$-$
$(x-1)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
x^3	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\pm\infty$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	m $\left(-2, \frac{27}{4}\right)$	$\nearrow$		$\searrow$	T.H. $(1, 0)$	$\searrow$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -5$

$\Rightarrow t \equiv y - \frac{1}{2} = -5\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$\equiv y = -5x + 3$

d) Ce point est tel que $f'(x) = -1$

$\Rightarrow -\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{x^3} = -1$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = x^3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{12}$ et $f'\left(\frac{2}{3}\right) = -1$

$t \equiv y - \frac{1}{12} = -\left(x - \frac{2}{3}\right)$

$\equiv y = -x + \frac{3}{4}$

e) On a vu (a1) que

$$f(x) = -x+3 + \frac{-3x+1}{x^2}$$

$\lim\limits_{\pm\infty} \frac{-3x+1}{x^2} = 0$. Donc, si x tend vers $\pm\infty$, la fonction tend vers la droite d'équation $y = -x+3$ qui est A.O. de la courbe.

De plus $d(x) = \frac{-3x+1}{x^2}$

x		0		$\frac{1}{3}$	
N	$+$		$+$	0	$-$
D	$+$	0	$+$		$+$
$d(x)$	$+$	$\pm\infty$	$+$	0	$-$

f(x) au dessus de l'A.O.   f(x) sous A.O.

6. Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$(unité : 2 cm)

   (a) *Etude d'une fonction auxiliaire.*
   Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-4$

      i. Etudier les variations de la fonction g, et calculer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

      ii. Montrer qu'il existe un réel a unique tel que $g(a)=0$. Montrer que $2,1<a<2,2$.

      iii. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

a) i) $g'(x) = 3x^2 - 3x$

x		-1		1	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$
		$(-1,-2)$		$(1,-6)$	

ii) La fct $g(x)$ croît jusqu'à un maximum négatif puis décroît (minimum négatif) et recroît après (jusqu'à $+\infty$ car $g(x)$ est un polynôme)
$\rightarrow$ par le TVI, $g(x)$ s'annule 1 seule fois après 1

$g(2,1) \simeq -1,039$

$g(2,2) \simeq 0,048$

iii)

x		a	
$g(x)$	$-$	0	$+$

(b) *Etude de la fonction f.*

i. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

ii. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f'(x) = \dfrac{x.g(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

iii. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique d . Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à d.

iv. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$.

b) i) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{-1} f(x) = \pm\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{1} f(x) = \pm\infty$

ii) $f'(x) = \dfrac{(3x^2+4x)(x^2-1)-(x^3+2x^2)(2x)}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{3x^4-3x^2+4x^3-4x-2x^4-4x^3}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{x \cdot g(x)}{(x^2-1)^2}$

x		-1		0		1		a	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$g(x)$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
D	$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	$\pm\infty$	$+$	0	$-$	$\pm\infty$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	M	$\searrow$		$\searrow$	m	$\nearrow$
				$(0,0)$				$(a,f(a))$	

iii)

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^3 + x & x + 2 \\ \cline{1-1} 2x^2 + x & \\ -2x^2 + 2 & \\ \cline{1-1} x + 2 & \end{array}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$\rightarrow \begin{cases} AO \equiv y = x + 2 \\ d(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1} \end{cases}$$ cf question 5e)

x		-2		-1		1	
N	$-$	0	$+$		$+$		$+$
D	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$d(x)$	$-$	0	$+$	$\pm\infty$	$-$	$\pm\infty$	$+$
	$f < AO$		$f > AO$		$f < AO$		$f > AO$

iv) On cherche x / $f'(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2-1)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4x = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^4} - 3x^2 - 4x = \cancel{x^4} - 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\hookrightarrow \Delta = 16 - 4 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

7. En utilisant la définition du nombre dérivé, écrire l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ au point d'ordonnée 1.

Même question avec la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ au point d'ordonnée $\frac{1}{2}$ et d'abscisse positive.

a) $f'(1) = \lim\limits_{1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$ FI

$= \lim\limits_{1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}$

$= \lim\limits_{1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\quad)}$

$= \frac{1}{3}$ et $f(1) = 1$

$t = y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$

$= y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

b) $\sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

$f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$f'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \lim\limits_{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}}{x - \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{0}{0}$ FI

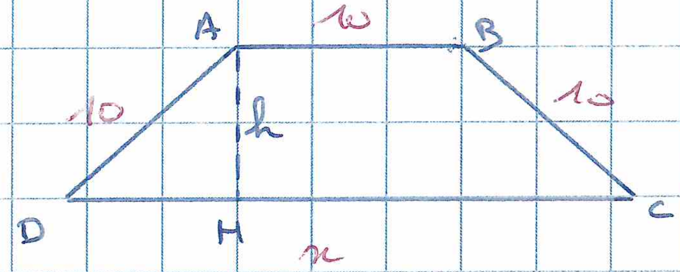
$= \lim\limits_{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{(\sqrt{\quad} - \frac{1}{2})(\sqrt{\quad} + \frac{1}{2})}{(x - \frac{\sqrt{5}}{2})(\sqrt{\quad} + \frac{1}{2})}$

$= \lim\limits_{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{x^2 - \frac{5}{4}}{D}$

$= \lim\limits_{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{x + \frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{\quad} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{1} = \sqrt{5}$

$t = y = \sqrt{5}\,x - 2$

8. Trois côtés d'un trapèze ont 10 cm de longueur. Quelle doit être la longueur du quatrième côté pour que l'aire du trapèze soit maximale ?



$$A = \frac{10+x}{2} \cdot h$$

$$DH = \frac{x-10}{2}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{100 - \left(\frac{x-10}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{400 - (x^2 - 20x + 100)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{300 + 20x - x^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{10+x}{4}\sqrt{\ldots}$$

$$A' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{} + (10+x)\frac{-2x+20}{2\sqrt{}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(300 + 20x - x^2) \cancel{-20x} + 200 - 2x^2 \cancel{+20x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 40x + 800 = 0$$

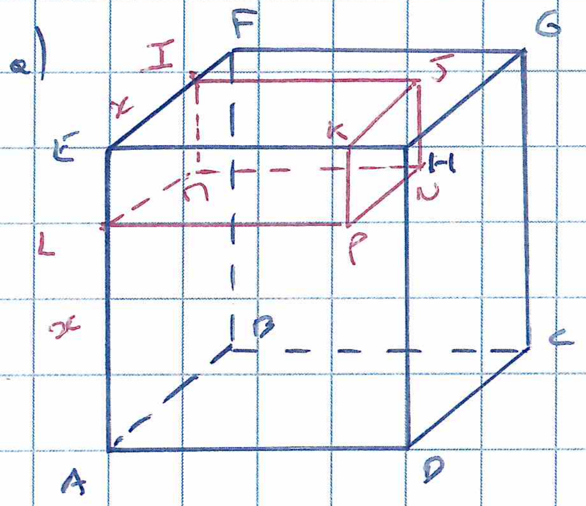
$$\Leftrightarrow -x^2 + 10x + 200 = 0$$

$$\Delta = 100 + 800 = 900 \qquad x_{1,2} = \frac{-10 \pm 30}{-2}$$

x		-10		0		20	
$A'(x)$	$-$	0		$+$		0	$-$
				$\nearrow$		$\sqcap$	$\searrow$

$$\Rightarrow x = 20$$

9. On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm. On inscrit dans ce cube, le parallélépipède rectangle $EIJKLPNM$ tel que $EI = IJ = x$ et $AL = x$.
On veut déterminer la valeur x pour laquelle le parallélépipède rectangle est de volume maximum.
   (a) Calculer le volume V du parallélépipède.
   (b) Trouver alors la valeur x et le volume maximum correspondant.
   (c) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, les valeurs de x pour lesquelles le parallélépipède a pour volume 0,025 litres.

a) 

$EL = 6 - x$

$V = x^2(6 - x)$

b) $V_{max} \Leftrightarrow V' = 0 \Leftrightarrow 2x(6-x) - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 12x = 0$

$\Leftrightarrow -3x(x-4) = 0$

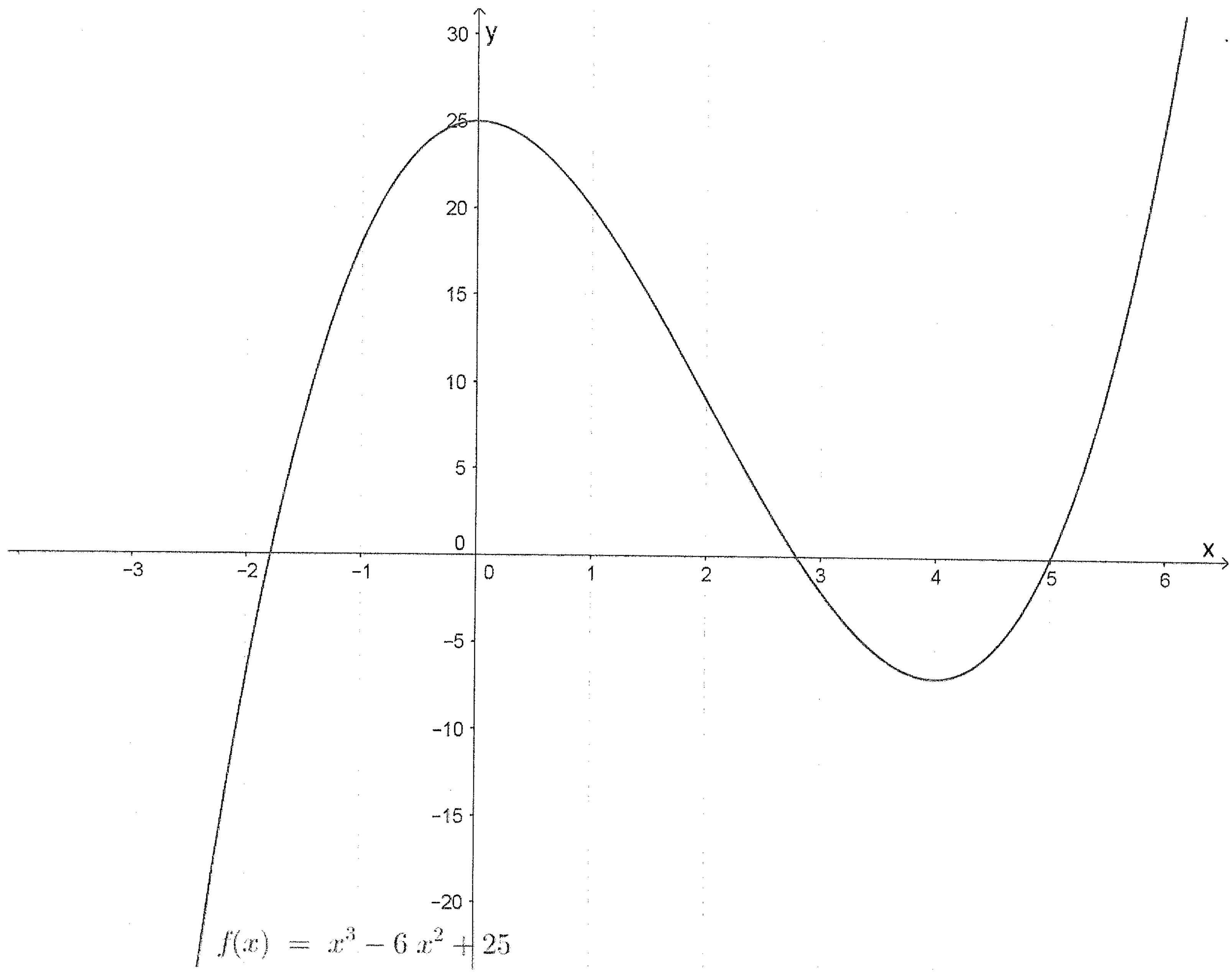
$\Leftrightarrow \{x = 0\}$ ou $x = 4$

$\Rightarrow V_{max} = 32 \text{ cm}^3$

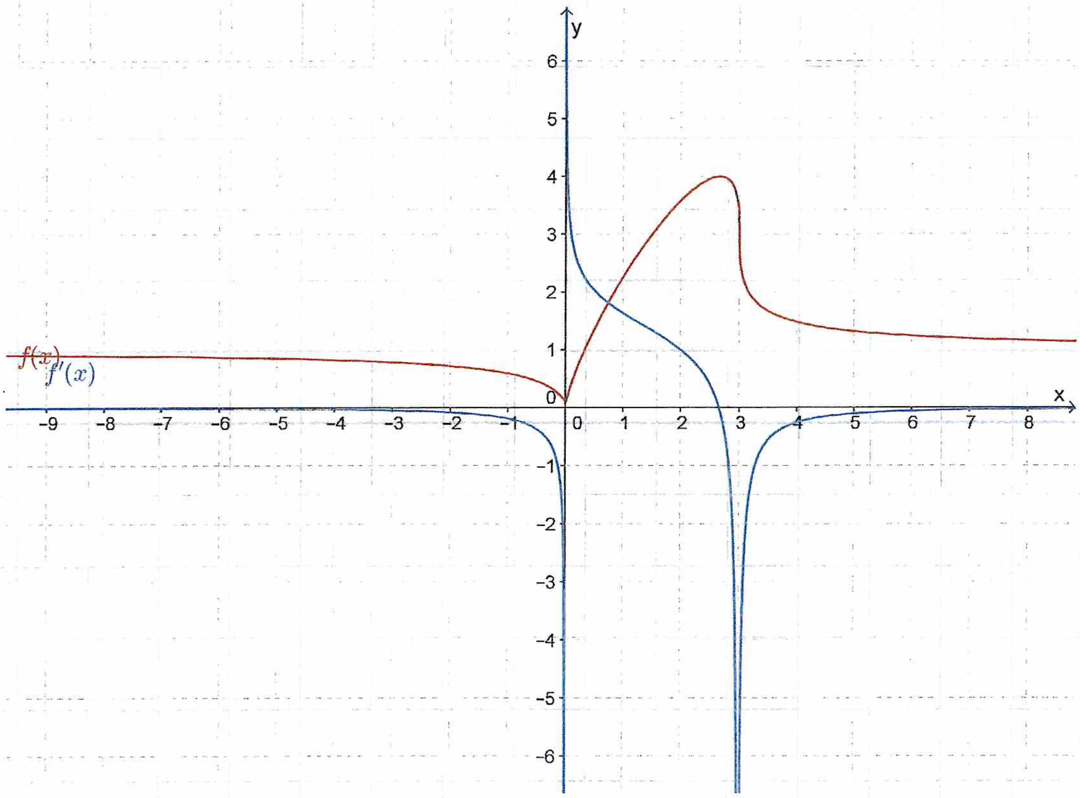
c) Il faut résoudre $x^2(6-x) = 25 \text{ cm}^3$

$\Leftrightarrow -x^3 + 6x^2 - 25 = 0$

En représentant la fonction sur la calculatrice on trouve $x = 5$. En factorisant par Horner, l'éq devient $(x-5)(x^2-x-5) = 0$
Les deux autres solutions sont $x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$


y
x
30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 25$

10. On donne la fonction $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ et le graphe de sa dérivée.



(a) Déterminer l'équation des asymptotes de $f(x)$

(b) Uniquement sur base de ce graphe (***sans calculer*** aucune dérivée) et de la forme analytique de la fonction, établir le tableau récapitulatif du comportement de $f(x)$ et esquisser le graphe de $f(x)$.

a) CE : / $\rightarrow$ dom f : $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ ~~AV~~

AH : $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \infty - \infty$ FI

$$= \lim\limits_{\pm\infty} \frac{(x - \sqrt[3]{\quad})(x^2 + \sqrt[3]{\quad}\, x + \sqrt[3]{(\quad)^2})}{x^2 + x\sqrt[3]{\quad} + \sqrt[3]{(\quad)^2}}$$

$$= \lim\limits_{\pm\infty} \frac{\cancel{x^3} - (\cancel{x^3} - 3x^2)}{D} = \frac{\infty}{\infty} \text{ FI}$$

$$= \lim\limits_{\pm\infty} \frac{3x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^6}} = \lim\limits_{\pm\infty} \frac{3x^2}{3x^2} = 1$$

$\Rightarrow$ AH $\equiv y = 1$

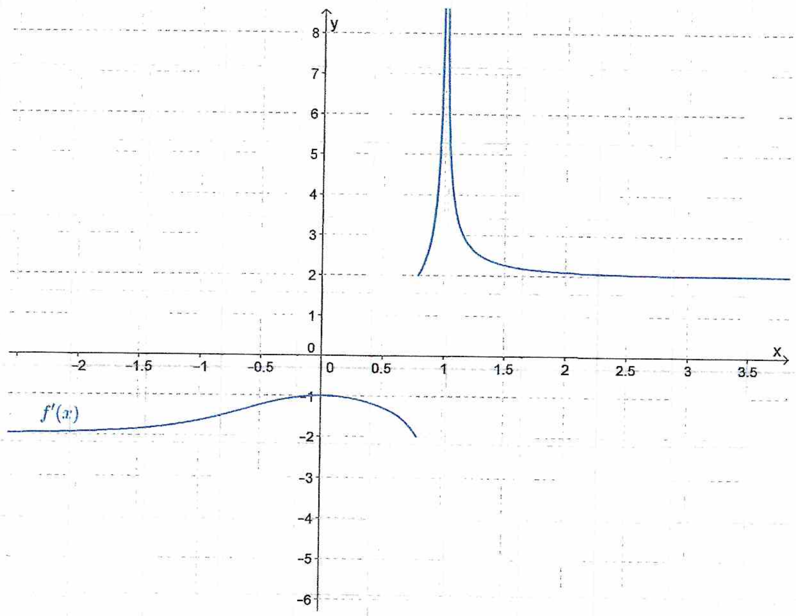
b)

x		0		$2,6$		3	
$f'(x)$	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty \mid -\infty$	$-$
$f''(x)$	$-$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$ $\cap$	P.R. $(0,0)$	$\nearrow$ $\cap$	$\sqcap$ $(2,6;4)$	$\searrow$ $\cap$	T V $(3,3)$	$\searrow$ $\cup$

Les points importants :

- zéro de $f'(x)$: 2,6
- points où $f'(x)$ est ∞ : $x=0$ et $x=3$
- extrémum de $f''(x)$: —

11. On donne la fonction $f(x) = \left|\sqrt[3]{x^3 - 1} + x\right|$ et le graphe de sa dérivée.



Uniquement sur base de ce graphe (***sans calculer*** aucune dérivée) et de la forme analytique de la fonction, établir le tableau récapitulatif du comportement de $f(x)$ et esquisser le graphe de $f(x)$.

Points importants :

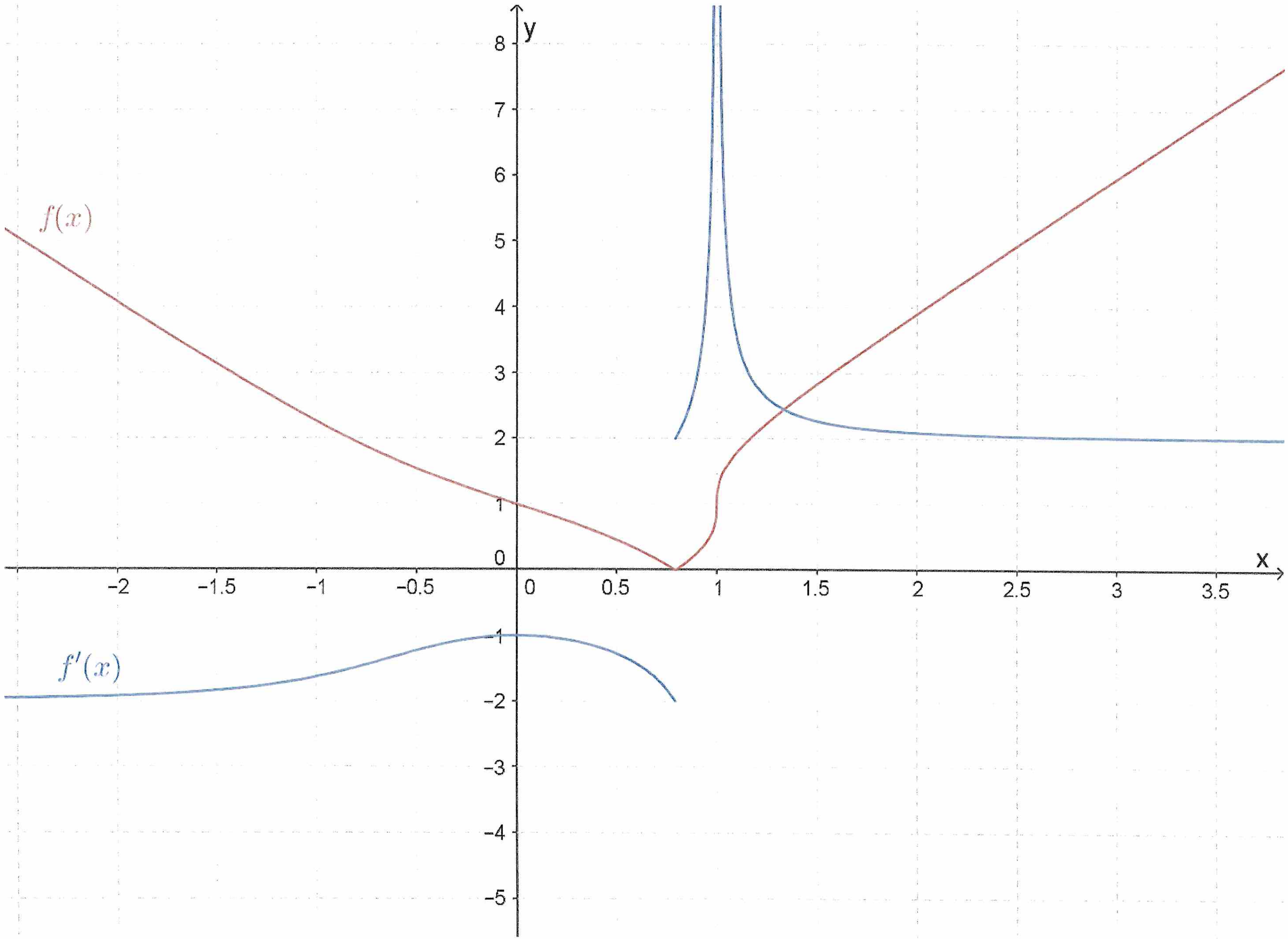
zéros de $f'(x)$: /

points où $f'(x)$ est discontinue : $x \simeq 0,2$

points où $f'(x)$ est infinie : 1

extrémum de $f'(x)$: $x = 0$

x		0		0,2		1	
$f'(x)$	−		−	$-2 \mid +2$	+	$+\infty \mid +\infty$	+
$f''(x)$	+	0	−		+		−
$f(x)$	↘ ∪	PI (0,1)	↘ ∩	PA (0,2 ; 0)	↗ ∪	TV (1,1)	↗ ∩


y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
$f(x)$
$f'(x)$

12. Calculer

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos 2x}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$

13. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \frac{\cos x}{\sin 3x} + \cot x$ au point d'abscisse $\frac{5\pi}{6}$

14. Faire l'étude complète de $f(x) = \cos x + \cos 2x$

Chapitre 2

Trigonométrie

2.1 Exercices

1. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ ~~$]-\pi, \pi]$~~ :

   (a) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} - 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{6} - 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ -2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$$S_g : \left\{ -\frac{\pi}{12} + k\pi , -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S_p : \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}, \frac{23\pi}{12} \right\}$$

(b) $3\tan\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \tan\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{12}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{36}+\frac{k\pi}{3} \qquad \frac{12k\pi}{36}$$

$$S_g : \left\{\frac{\pi}{36}+\frac{k\pi}{3} \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$S_p : \left\{\frac{\pi}{36}, \frac{13\pi}{36}, \frac{25\pi}{36}, \frac{37\pi}{36}, \frac{49\pi}{36}, \frac{61\pi}{36}\right\}$$

(c) $\sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 3x = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \frac{\pi}{2} - 3x = -\frac{\pi}{3} + x + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ -4x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

$$S_g : \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi , \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_p : \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{13\pi}{12}, \frac{29\pi}{24}, \frac{41\pi}{24} \right\}$$

(d) $\sin 4x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 4x = -\sin x$

$\Leftrightarrow \sin 4x = \sin(-x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -x + 2k\pi \\ 4x = \pi + x + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi \\ 3x = \pi + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2k\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$

$S_g = \left\{ \dfrac{2k\pi}{5}, \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$S_p : \left\{ 0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}, \pi, \dfrac{6\pi}{5}, \dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{8\pi}{5} \right\}$

(e) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left[\pi-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}+x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\frac{\pi}{6} = x-\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 3x+\frac{\pi}{6} = \pi-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ 4x = \pi+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

$$S_g : \left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$S_p : \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

(f) $2\cos^2 x - 1 = 0$

$$\iff \cos^2 x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$
- $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$$S_g : \left\{ \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi , \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$

$$S_p : \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

(g) $3\tan\theta = 2\cos\theta$

$\underline{CE}$: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$3\,\frac{\sin x}{\cos x} = \cos x$

$\Leftrightarrow 3\sin x = \cos^2 x$ ($\cos x \neq 0$ à cause des CE)

$\Leftrightarrow 3\sin x = 1 - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0$

$\Delta = 9 + 4 = 13$

$\sin x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

• $\begin{cases} x_1 = 0{,}307 + 2k\pi \\ x_1 = 2{,}834 + 2k\pi \end{cases}$

• $x_2 = /$

$S_g : \{0{,}307 + 2k\pi ; 2{,}834 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$S_p : \{0{,}307 ; 2{,}834\}$

(h) $(\sin\theta + \sin 2\theta) + (\sin 3\theta + \sin 4\theta) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{7\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0 \qquad (\cos(-\alpha) = \cos\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{3\theta}{2} + \sin\frac{7\theta}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\cancel{2}\sin\frac{10\theta}{4}\cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\frac{\theta}{2} = 0 \\ \sin\frac{5\theta}{2} = 0 \\ \cos\theta = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{5\theta}{2} = k\pi \\ \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \theta = \pi + 2k\pi \\ \theta = \frac{2k\pi}{5} \\ \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$$

$$S_g : \left\{\pi + 2k\pi, \frac{2k\pi}{5}, \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$S_p : \left\{\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{5}, \pi, \frac{6\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}, \frac{8\pi}{5}\right\}$$

CE : $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \end{cases}$

(i) $\tan 4\theta = 4\tan\theta$

$$\cdot \tan 4\theta = \frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2 2\theta} = \frac{2\,\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}{1-\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{4\tan\theta}{\cancel{1-\tan^2\theta}}}{\frac{(1-\tan^2\theta)^2-4\tan^2\theta}{(1-\tan^2\theta)^{\cancel{2}}}} = \frac{4\tan\theta(1-\tan^2\theta)}{1-2\tan^2\theta+\tan^4\theta-4\tan^2\theta}$$

$$= \frac{4\tan\theta(1-\tan^2\theta)}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}$$

$\cdot$ L'éq devient : $\dfrac{4\tan\theta(1-\tan^2\theta)}{D} - 4\tan\theta = 0$

$$\Leftrightarrow 4\tan\theta\left[\frac{1-\tan^2\theta}{D} - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\tan\theta\,\frac{1-\tan^2\theta-(1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta)}{D} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\tan\theta \cdot \frac{5\tan^2\theta-\tan^4\theta}{D} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{4}\tan^3\theta\,\frac{5-\tan^2\theta}{\cancel{D}} = 0$$

$$\begin{cases} \tan\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi \\ \tan\theta = \pm\sqrt{5} \Leftrightarrow \theta = \pm 1,15 + k\pi \end{cases}$$

$S_g : \{ k\pi ; \pm 1,15 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$S_p \{0 ; 1,15 ; 1,99 ; \pi ; 4,29 ; 5,13\}$

(j) $2\sin z + 3\cos z = 1$

Soit $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\left(2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3\,\frac{1-t^2}{1+t^2} = 1\right)(1+t^2)$$

$$4t + 3 - 3t^2 = 1 + t^2$$

$$-4t^2 + 4t + 2 = 0$$

$$\Delta = 48 \qquad t_{1,2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{-8} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$\cdot\ t_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \iff \frac{x}{2} = 0{,}94 + k\pi$

$\iff x = 1{,}88 + 2k\pi$

$\cdot\ t_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \iff \frac{x}{2} = -0{,}35 + k\pi$

$\iff x = -0{,}7 + 2k\pi$

$$S_g : \{-0{,}7 + 2k\pi \,;\, 1{,}88 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$S_p : \{1{,}88 \,;\, 5{,}58\}$$

2. Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$ (sauf pour l'exercices ??) :

   (a) $\dfrac{\cos 2x}{1-2\sin 2x} < 0$

(b) $\sin^2 x + \sin x > 0$

(c) $\cos^2 x - \sin x > 0$

(d) $3\cos x + 2\sin x \leq 1$

(e) $3\sin x + 2 > 2\sin^2 x$

(f) $\sqrt{3}\tan^2 x - 4\tan x + \sqrt{3} < 0$

(g) $2\cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 1 > 0$

(h) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x - 2 < 0$

Chapitre 4

Suites

4.1 Exercices

1. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ par

$$a_n = \frac{-2}{n+1} + 1$$

et

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = -{b_n}^2 + b_n - 1 \end{cases}$$

Etudier le sens de variation des suites.

• $a_{n+1} > a_n \iff \frac{-\cancel{2}}{n+2} + \cancel{1} > \frac{-\cancel{2}}{n+1} + \cancel{1}$

$\iff \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$

$\iff \cancel{n} + 1 < \cancel{n} + 2$ (car les D>0)

vrai $\Rightarrow a_n$ croissant

• $b_{n+1} > b_n \iff -b_n^2 + \cancel{b_n} - 1 > \cancel{b_n}$

$\iff b_n^2 + 1 < 0$ faux

$\Rightarrow b_n$ décroissant

2. Soit la suite (a_n) définie par $a_n = 7 - 3n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$
   (a) Calculer a_1, a_2 et a_3
   (b) Démontrer que (a_n) est une suite arithmétique et déterminer la raison de la suite ?
   (c) Quelle est la valeur du 51ème terme ?
   (d) Calculer la somme des 51 premiers termes ?

a) $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = -2$

b) $$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 7 - 3(n+1) - 7 + 3n \\ &= -3n - 3 + 3n \\ &= -3 \Rightarrow r = -3 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} a_{51} &= a_1 + 50\,r \\ &= 4 - 150 \\ &= -146 \end{aligned}$$

d) $$S_{51} = 51 \cdot \frac{4 - 146}{2} = -3621$$

3. Soit la suite arithmétique (a_n) de raison r dont on connait 2 termes $a_{100} = 90$ et $a_{1000} = 900$.

   (a) Calculer la raison r et a_1.

   (b) Calculer la somme de a_{100} à a_{1000}.

a) $a_{1000} = a_{100} + 900r \leftrightarrow 900 = 90 + 900r$

$\Leftrightarrow r = 0{,}9$

$\circledast \quad a_1 = 0{,}9$

b) la somme demandée est $S_{1000} - S_{99}$

$S_{1000} = 1000 \dfrac{a_1 + a_{1000}}{2}$ avec $a_1 = a_{100} - 99r$

$= 90 - 0{,}9 . 99$

$= 0{,}9 \quad \circledast$

$= 1000 \dfrac{90{,}9}{2}$

$= 45450$

$S_{99} = 99 \dfrac{a_1 + a_{99}}{2}$ avec $a_{99} = a_1 + 98r$

$= 89{,}1$

$= 4455$

$\to S_{1000} - S_9 = 40995$

4. Soit (a_n) la suite arithmétique dont le 7ème terme vaut 74, le $n$ème 226 et la somme des n premiers termes 2794,5. Déterminer le nombre de termes de cette suite.

$$a_7 = 74 \quad , \quad a_n = 226 \quad , \quad S_n = 2794,5$$

$$S_n = n \, \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$= n \, \frac{a_7 - 6r + a_n}{2}$$

Or $a_n = a_7 + (n-7)r$

$$\Leftrightarrow 226 = 74 + (n-7)r$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{152}{n-7}$$

$$\Rightarrow 2794,5 = n \cdot \frac{74 - \frac{6.152}{n-7} + 226}{2}$$

$$= n \, \frac{300 - \frac{6.152}{n-7}}{2}$$

$$= n \left(150 - \frac{3.152}{n-7} \right)$$

$$= n \left(\frac{150(n-7) - 456}{n-7} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2794,5(n-7) = 150\,n(n-7) - 456n$$

$$\Leftrightarrow 150n^2 - 4300,5\,n + 19561,5 = 0$$

$$\Delta = 18494300,5 - 11736900 = 6757400,25$$
$$= (2599,5)^2$$

$$n_{1,2} = \frac{4300,5 \pm 2599,5}{300} \left\langle \begin{array}{l} 23 \\ \frac{1701}{300} \quad \text{AR (car } n \in \mathbb{N}_0) \end{array} \right.$$

5. Calculer la valeur exacte de la somme suivante :

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots + 4096$$

C'est une S.G. de $q = -2$ et $a_1 = 1$

$a_n = a_1 q^{n-1} \Leftrightarrow 4096 = (-2)^{n-1} \Rightarrow n$ impair

par tâtonnement : $n = 13$

$S = 1 \cdot \dfrac{1-(-2)^{13}}{1-(-2)} = 2731$

6. La population actuelle augmente de 1% par an. En 2010, elle était de 6,9 milliards. On note a_n la population mondiale l'année $2010 + (n - 1)$.

   (a) Expliquer pourquoi la suite (a_n) est géométrique. Préciser son premier terme a_1 et sa raison.

   (b) Exprimer (a_n) en fonction de n.

   (c) En supposant que le taux d'accroissement se maintienne, estimer la population mondiale en 2025.

   (d) A l'aide de la calculatrice, estimer en quelle année les 9 milliards d'habitants seront atteints.

a) $a_n = a_{n-1} \cdot \underbrace{1,01}_{q}$ et $a_1 = 6,9$

b) $a_n = 6,9\,(1,01)^{n-1}$

c) $a_{15} = 6,9\,(1,01)^{14}$

$\simeq 7,93$

d) $a_n = 6,9 \cdot (1,01)^{n-1}$ avec $a_n = 9$

$\Leftrightarrow \dfrac{9}{6,9} = (1,01)^{n-1}$

$\Leftrightarrow 1,304 = (1,01)^{n-1}$

Par tâtonnement $n - 1 \simeq 27 \Rightarrow n = 28$