Athénée Royal d'Uccle 1

Cours de Mathématique

5$^{\text{ème}}$ année

RÉVISION DE DÉCEMBRE

A.DROESBEKE
Version : 2022

Chapitre 1

Trigonométrie

1. Montrer que

$$\cos^2 x + \cos^2(120° + x) + \cos^2(120° - x)$$

   est indépendant de x.

2. Vérifier que $\tan^2 a - \tan^2 b = \dfrac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$

3. Vérifier les identités suivantes :

   (a) $\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\sin(a+b)+\sin(a-b)} = \cot a$

(b) $\cot a \cos 2a - \sin 2a = \dfrac{\cos 3a}{\sin a}$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos a}{\sin a} \cos 2a - \sin 2a = \text{II}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a}{\sin a} = \text{II}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(a + 2a)}{\sin a} = \text{II}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 3a}{\sin a} = \text{II}$$

(c) $\sin^2(a+b) + \cos^2(a-b) = 1 + \sin 2a \sin 2b$

$$\Leftrightarrow (\sin a \cos b + \sin b \cos a)^2 + (\cos a \cos b + \sin a \sin b)^2 = \mathrm{II}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 a \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 a + 2 \sin a \cos a \sin b \cos b \ldots$$

$$\ldots + \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b + 2 \sin a \cos a \sin b \cos b = \mathrm{II}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 a \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 a + \sin^2 a \sin^2 b \ldots$$

$$\ldots + 4 \sin a \cos a \sin b \cos b = \mathrm{II}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 b \underbrace{(\sin^2 a + \cos^2 a)}_{1} + \sin^2 b \underbrace{(\cos^2 a + \sin^2 a)}_{1} \ldots$$

$$\ldots + \overbrace{4}^{2 \cdot 2} \underbrace{\sin a \cos a}_{\sin 2a} \underbrace{\sin b \cos b}_{\sin 2b} = \mathrm{II}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cos^2 b + \sin^2 b}_{1} + \sin 2a \sin 2b = \mathrm{II}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin 2a \sin 2b = \mathrm{II}$$

4. On donne $\tan a = \frac{4}{3}$ ($a \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$)

   (a) Calculer $\sin 2a$, $\cos 2a$ et $\tan 2a$

   (b) Dans quel quadrant se trouve l'angle $2a$? Justifier.

Si $\tan a = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \frac{16}{9}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{25}{9} \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos a = \cancel{+}-\frac{3}{5}$

$\hookrightarrow a \in Q_{III}$

et $\sin a = \tan a \cos a \Leftrightarrow \sin a = -\frac{4}{5}$

a) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$= 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$

$= \frac{24}{25}$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$= 2\,\frac{9}{25} - 1$

$= -\frac{7}{25}$

$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a}$

$= -\frac{24}{7}$

b) $2a \in Q_{II}$ car $\cos 2a < 0$ et $\sin 2a > 0$

5. Si $\sin(a+b) = \dfrac{1}{2}$ et $(a+b) \in Q_{II}$ et $\cot b = -2$ et $b \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, déterminer la valeur de $\cos a$.

$$a = (a+b) - b$$

$$\cos a = \cos[(a+b) - b]$$

$$= \cos(a+b)\cos b + \sin(a+b)\sin b$$

$$\cos(a+b) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(a+b)} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

car Q_{II}

$$\cot b = -2 \Rightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\sin^2 b}$$

$$\Leftrightarrow \sin b = \pm\sqrt{\frac{1}{1+4}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

car Q_{IV}

$$\cot b = \frac{\cos b}{\sin b} \Rightarrow \cos b = \cot b \sin b = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \cos a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$= \frac{-2\sqrt{15} - \sqrt{5}}{10}$$

6. Vérifier les identités suivantes :
   (a) $\cos a + 2\cos 2a + \cos 3a = 4\cos 2a \cos^2 \frac{a}{2}$

$I = \underline{2\cos\frac{4a}{2}\cos -\frac{2a}{2}} + 2\cos 2a$ Simpson

$= 2\cos 2a\left(\cos a + 1\right)$ Dupl.

$= 2\cos 2a\left(2\cos^2\frac{a}{2} - 1 + 1\right)$

$= 4\cos 2a \cos^2\frac{a}{2}$

(b) $(\sin a + \sin b)(\sin a - \sin b) = \sin(a+b)\sin(a-b)$

$$I = \left(2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\right)\left(2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{Simp.}$$

$$= 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\;2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$= \sin(a-b)\sin(a+b) \quad \text{Dupl.}$$

(c) $\sin a + \sin b + \sin(a+b) = 4\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a}{2}\cancel{\sin\frac{a}{2}}$ $\cos\frac{b}{2}$

$$I = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin(a+b)$$ Simp.

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$ Dupl.

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\, 2\cos\frac{\frac{a-b+a+b}{2}}{2}\cos\frac{\frac{a-b-(a+b)}{2}}{2}$$

Simp.

$$= 4\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$$

Chapitre 2

Algèbre

1. Résoudre $\begin{cases} x - |y+1| = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases}$

$$|y+1| \Rightarrow \begin{cases} y+1 & \text{si } y \geq -1 \\ -(y+1) & \text{si } y < -1 \end{cases}$$

- $\underline{y \geq -1}$: $\begin{cases} x - y - 1 = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + x - 2 - 10 = 0 \end{cases}$ (*)

$$\Delta = 1 + 48 = 49 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -4 \end{matrix} \right.$$

$$\Leftrightarrow y_{1,2} \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -6 \ (AR) \end{matrix} \right. \longrightarrow S_1 : \{(3,1)\}$$

- $\underline{y < -1}$: $\begin{cases} x + y + 1 = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - x - 10 = 0 \end{cases}$

$$\Delta = 1 + 40 = 41 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$y = \frac{-1 \cancel{\pm} \sqrt{41}}{2} \qquad S_2 : \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{41}}{2}, \frac{-1-\sqrt{41}}{2} \right) \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2$$

2. Déterminer les valeurs de m pour que le système suivant soit compatible

$$\begin{cases} \dfrac{x+m}{m} < \dfrac{1}{4} \\ mx + 1 > m \end{cases}$$

$\underline{CE}$: $m \neq 0$

• $\underline{m > 0}$: $\begin{cases} x < \dfrac{m}{4} - m \\ x > \dfrac{m-1}{m} \end{cases} \iff \begin{cases} x < -\dfrac{3m}{4} \\ x > \dfrac{m-1}{m} \end{cases}$

Pour que le système soit compatible, il faut :

$$\frac{m-1}{m} < -\frac{3m}{4}$$

$\iff 4m - 4 < -3m^2 \iff -3m^2 - 4m + 4 > 0$

$\Delta = 16 + 48 = 64$

$m_{1,2} = \dfrac{4 \pm 8}{-6} \left\langle \begin{array}{l} -2 \\ \frac{2}{3} \end{array} \right.$

m		-2		0		$\frac{2}{3}$	
$-3m^2-4m+4$	$-$	0	$+$			0	$-$

$\Rightarrow m \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$

• $\underline{m < 0}$ $\begin{cases} x > \dfrac{m}{4} - m \\ x < \dfrac{m-1}{m} \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\dfrac{3m}{4} \\ x < \dfrac{m-1}{m} \end{cases}$

La cond. de compatibilité est : $-\dfrac{3m}{4} < \dfrac{m-1}{m}$

$\iff -3m^2 > 4m - 4 \iff -3m^2 - 4m + 4 > 0$

La condition est la même, et la solution est

$m \in \left]-2, 0\right[$

$\Rightarrow m \in \left]-2, 0\right[\cup \left]0, \frac{2}{3}\right[$

3. Résoudre

(a) $\sqrt{x+5} = 7 - \sqrt{2x+8}$

$\underline{CE}$: $x+5 \geq 0 \iff x \geq -5$
$2x+8 \geq 0 \iff x \geq -4$ $\Big\}$ $x \geq -4$

$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$

$\iff x+5 + 2x+8 + 2\sqrt{}\sqrt{} = 49$

$\iff 2\sqrt{2x^2+18x+40} = 36 - 3x$

$\underline{CE}$: $36 - 3x \geq 0 \iff x \leq 12 \rightarrow x \in [-4, 12]$

$4(2x^2+18x+40) = 9(144 - 24x + x^2)$

$8x^2 + 72x + 160 = 1296 - 216x + 9x^2$

$x^2 - 288x + 1136 = 0$

$\Delta = 78400$ $\qquad x_{1,2} = \dfrac{288 \pm 280}{2} \begin{cases} 4 \\ 284 \text{ (A.R)} \end{cases}$

$S : \{4\}$

(b) $\sqrt{10-3x}-\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+17}=0$

$\underline{CE}$: $\left.\begin{array}{l} 10-3x \geq 0 \iff x \leq \frac{10}{3} \\ x \geq -3 \\ x \geq -\frac{17}{4} \end{array}\right\} x \in [-3, \frac{10}{3}]$

$10-3x = x+3+4x+17+2\sqrt{4x^2+29x+51}$

$-10-8x = 2\sqrt{}$

$-5-4x = \sqrt{}$

$\underline{CE}$: $-5-4x \geq 0 \iff x \leq -\frac{5}{4} \Rightarrow x \in [-3, -\frac{5}{4}]$

$25+16x^2+40x = 4x^2+29x+51$

$12x^2+11x-26=0$

$\Delta = 1369 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-11 \pm 37}{24} \left\langle \begin{array}{l} \frac{13}{12} \text{ (A.R.)} \\ -2 \end{array} \right.$

$S: \{-2\}$

(c) $\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{x}$

$\underline{CE}$: $x \geq -a$ $\quad$ $a \geq 0 \Rightarrow x \in [-a, a]$

$x \leq a$ $\quad$ $a < 0 \Rightarrow$ imp

$\sqrt{a+x} = \sqrt{x} + \sqrt{a-x}$

$\Leftrightarrow \cancel{a} + x = \cancel{x} + \cancel{a} - \cancel{x} + 2\sqrt{ax - x^2}$

$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{ax - x^2}$ $\quad$ $\underline{CE}$: $x \geq 0$

$\Rightarrow x \in [0, a]$

$\Leftrightarrow x^2 = 4ax - 4x^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 4ax = 0$

$\Leftrightarrow x(5x - 4a) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4a}{5} \end{cases}$

$S : \{0, \frac{4a}{5}\}$

(d) $x^2 + 3 = 2x^4$

$2x^4 - x^2 - 3 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$x_{1,2}^2 = \frac{1 \pm 5}{4}$ $\frac{3}{2}$; -1 (A.R)

$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

$S : \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}$

(e) $x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0$ avec $a, b \neq 0$

$$\Delta = (a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2$$
$$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2$$
$$= a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$
$$= (a^2-b^2)^2$$

$$x_{1,2}^2 = \frac{a^2+b^2 \pm (a^2-b^2)}{2} \begin{cases} a^2 \\ b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm a \\ x = \pm b \end{cases}$$

$$S : \{-b, -a, a, b\}$$

4. Résoudre $|7x+1| > |1-4x^2|$

$$|7x+1| = \begin{cases} 7x+1 & \text{si } 7x+1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{7} \\ -(7x+1) & \text{si } 7x+1 < 0 \iff x < -\frac{1}{7} \end{cases}$$

$$|1-4x^2| = \begin{cases} 1-4x^2 & \text{si } 1-4x^2 \geqslant 0 \overset{(*)}{\iff} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -(1-4x^2) & \text{si } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(*)

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$1-4x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

x		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{7}$		$\frac{1}{2}$	
$\lvert 7x+1\rvert$	$-7x-1$		$-7x-1$		$7x+1$		$7x+1$
$\lvert 1-4x^2\rvert$	$-1+4x^2$		$1-4x^2$		$1-4x^2$		$-1+4x^2$
I_n	①		②		③		④

① $-7x-1 > -1+4x^2 \iff 4x^2+7x < 0$

x		$-\frac{7}{4}$		0	
①	$+$	0	$-$	0	$+$

$S_1 : \left]-\frac{7}{4}, 0\right[$

② $-7x-1 > 1-4x^2 \iff -4x^2+7x+2 < 0$

$\Delta = 49+32 = 81$

$x_{1,2} = \frac{-7 \mp 9}{-8} \begin{cases} -\frac{1}{4} \\ 2 \end{cases}$

		$-\frac{1}{4}$		2	
	$-$	0	$+$	0	$-$

$S_2 : \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\cup \left]2, +\infty\right[$

③ $7x+1 > 1-4x^2 \iff -4x^2-7x < 0 \iff 4x^2+7x > 0$

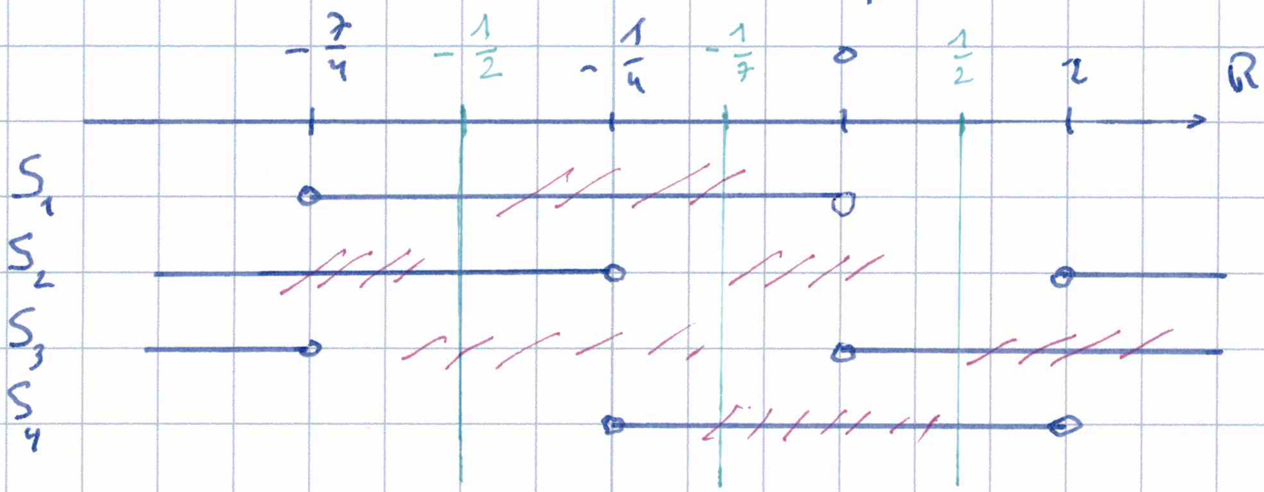
$S_3 : \left]-\infty, -\frac{7}{4}\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

cf TS ①

(4) $7x+1 > -1+4x^2 \iff 4x^2-7x-2<0$

x		$-\frac{1}{4}$		2	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$S_4 : \left]-\frac{1}{4}, 2\right[$



$S : \left]-\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right[\cup \left]0, 2\right[$

5. Discuter en fonction de m le nombre, le signe et la position relative des solutions de l'équation

   (a) $(m-3)x^2 - 2(m+3)x + m^2 - 9 = 0$

$$\Delta = 4(m+3)^2 - 4(m-3)(m-3)(m+3)$$
$$= 4(m+3)\left[m+3-(m-3)^2\right]$$
$$= 4(m+3)(m+3-m^2+6m-9)$$
$$= 4(m+3)(-m^2+7m-6)$$

$\hookrightarrow m = -3$ $\quad \Delta \hookrightarrow m = 1$ et $m = 6$

m		-3		1		6	
$m+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-m^2+7m-6$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{2(m+3)}{m-3}$$

m		-3		3	
$m+3$	$-$	0	$+$		$+$
$m-3$	$-$		$-$	0	$+$
S	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m^2-9}{m-3} = m+3 \quad (m \neq 3)$$

m		-3		3	
P	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$

m	Δ_x	P	S	Conclusions ($\lvert x_1\rvert \geq \lvert x_2\rvert$)
	+	-	+	2R $x_2 < 0 < x_1$
-3	0	0	0	1R $x = 0$
	-	+	-	0R
1	0	+	-	1R < 0
	+	+	-	2R < 0
3	+	$\nexists$	$\nexists$	1[er] degré
	+	+	+	2R > 0
6	0	+	+	1R > 0
	-	+	+	0R

(b) $2mx - m + 3 = (m+1)x^2$ $\quad a = (m+1)$, $b = -2m$, $c = m-3$

$$\Delta_x = 4m^2 - 4(m+1)(m-3)$$
$$= 4m^2 - 4(m^2 - 2m - 3)$$
$$= 8m + 12$$

m		$-\frac{3}{2}$	
Δ	$-$	0	$+$

$$S = \frac{2m}{m+1}$$

m		-1		0	
$2m$	$-$		$-$	0	$+$
$m+1$	$-$	0	$+$		$+$
S	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$$P = \frac{m-3}{m+1}$$

m		-1		3	
$m-3$	$-$		$-$	0	$+$
$m+1$	$-$	0	$+$		$+$
P	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

m	Δ_x	P	S	Conclusions ($\lvert x_1\rvert \geq \lvert x_2\rvert$)
	-	+	+	0R
$-\frac{3}{2}$	0	+	+	1R >= 0
	+	+	+	2R > 0
-1	+	$\nexists$	$\nexists$	1er degré
	+	-	-	2R $x_1 < 0 < x_2$
0	+	-	0	2R $x_1 = -x_2$
	+	-	+	2R $x_2 < 0 < x_1$
3	+	0	+	2R $x_2 = 0$ et $x_1 > 0$
	+	+	+	2R > 0

(c) $(m-6)x^2 - 4(m-1)x + m - 3 = 0$

$$\Delta = 16(m-1)^2 - 4(m-6)(m-3)$$
$$= 16(m^2 - 2m + 1) - 4(m^2 - 9m + 18)$$
$$= 12m^2 + 4m - 56$$
$$= 4(3m^2 + m - 14)$$

$\Delta \hookrightarrow m = -\frac{7}{3}$ et $m = 2$

m		$-\frac{7}{3}$		2	
Δ	+	0	-	0	+

$S = -\frac{b}{a} = \frac{4(m-1)}{m-6}$

m		1		6	
$m-1$	-	0	+		+
$m-6$	-		-	0	+
S	+	0	-	$\nexists$	+

$P = \frac{c}{a} = \frac{m-3}{m-6}$

m		3		6	
$m-3$	-	0	+		+
$m-6$	-		-	0	+
P	+	0	-	$\nexists$	+

m	Δ_x	P	S	Conclusions ($\lvert x_1\rvert \geq \lvert x_2\rvert$)
	+	+	+	2R > 0
$-\frac{7}{3}$	0	+	+	1R >= 0
	-	+	+	0R
1	-	+	0	0R
	-	+	-	0R
2	0	+	-	1R < 0
	+	+	-	2R < 0
3	+	0	-	2R $x_2 = 0$ et $x_1 < 0$
	+	-	-	2R $x_1 < 0 < x_2$
6	+	$\nexists$	$\nexists$	1er degré
	+	+	+	2R > 0

Chapitre 3

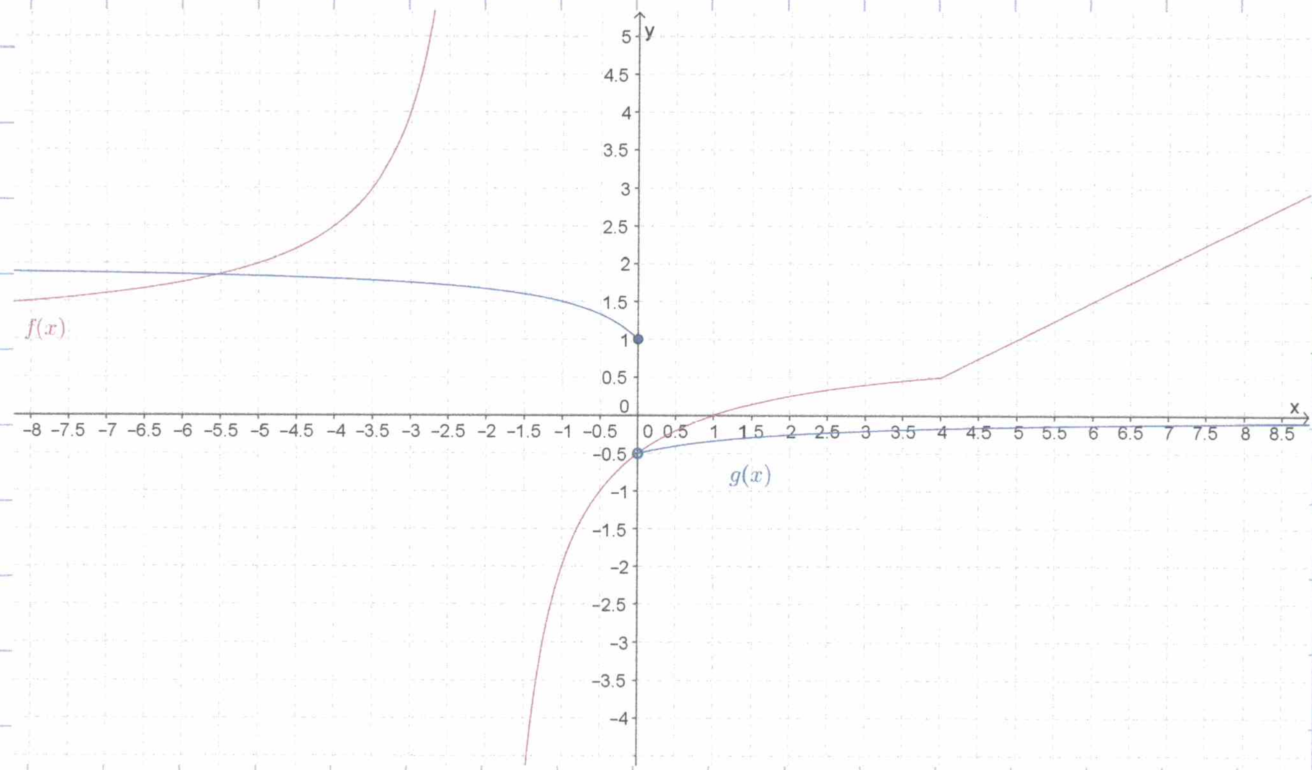
Analyse

1. Soient

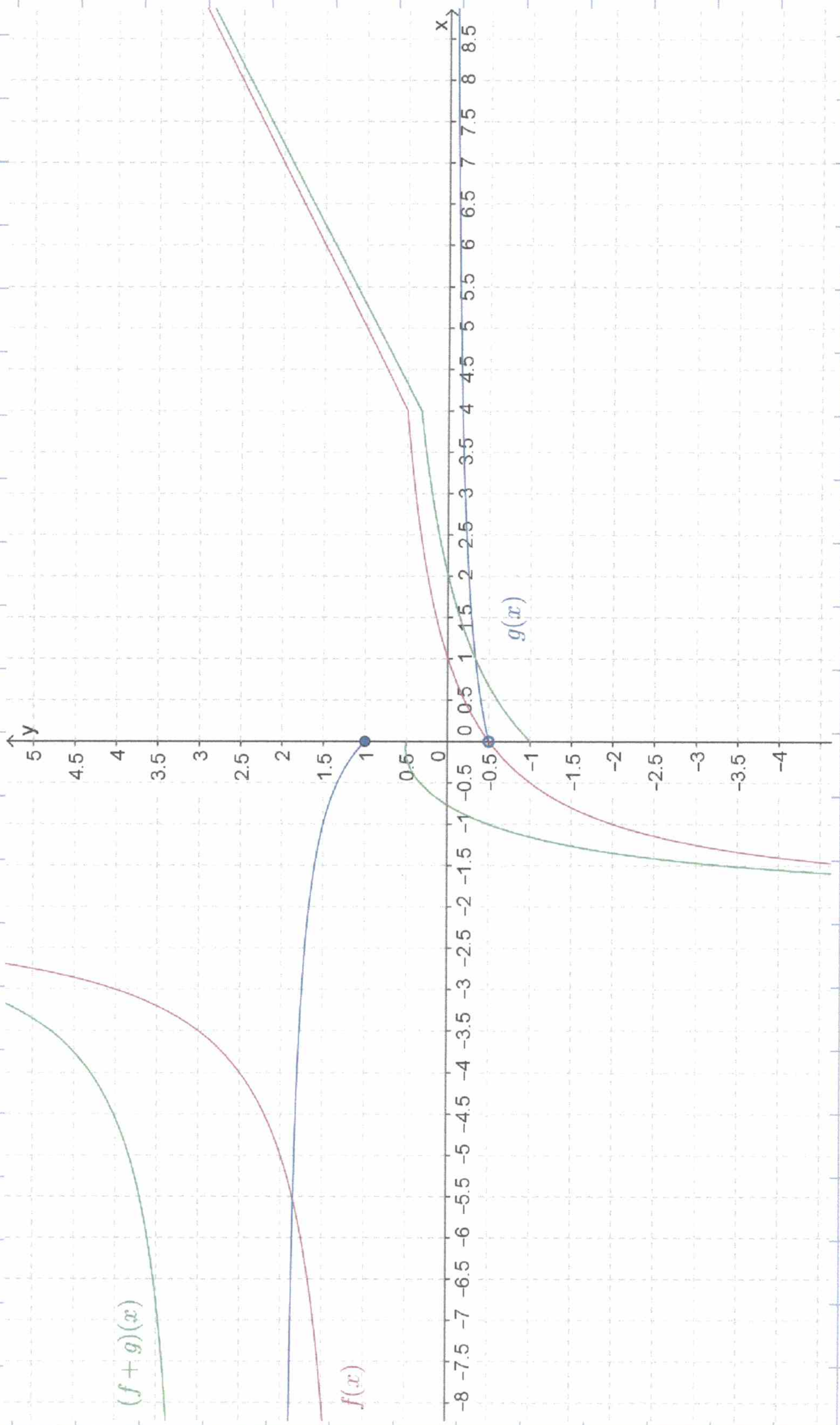
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+2} & \text{si } x\leq 4\\[2ex] \dfrac{x-3}{2} & \text{si } x>4\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x-1} & \text{si } x\leq 0\\[2ex] \dfrac{-1}{x+2} & \text{si } x>0\end{cases}$$

(a) Construire les graphes de $f(x)$ et $g(x)$



(b) Construire les graphes de $(f+g)(x)$ et justifier le comportement asymptotique des fonctions obtenues



2. Déterminer le domaine de $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2+x+5}}{|x^2-2x-3|-|1-2x|}$

CE : (1) $-x^2+x+5 \geq 0$

(2) $|x^2-2x-3| - |1-2x| \neq 0$

(1) $\Delta = 1 + 20 = 21 \longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{-2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

x		$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$	
CE(1)	$-$	0	$+$	0	$-$

(2) $|x^2-2x-3| = \begin{cases} x^2-2x-3 & \text{si } x^2-2x-3 \geq 0 \ (*) \\ -x^2+2x+3 & \text{si } x^2-2x-3 < 0 \end{cases}$

(*)

x		-1		3	
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$|1-2x| = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ -1+2x & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

x		-1		$\frac{1}{2}$		3	
$\lvert x^2-2x-3\rvert$	x^2-2x-3		$-x^2+2x+3$		$-x^2+2x+3$		x^2-2x-3
$\lvert 1-2x\rvert$	$1-2x$		$1-2x$		$-1+2x$		$-1+2x$
	(1)		(2)		(3)		(4)

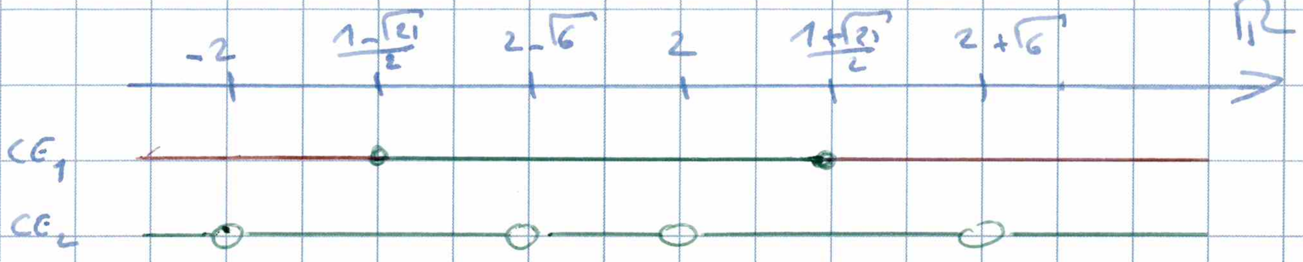
(1) et (3) : $x^2-2x-3-(1-2x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$

(2) et (4) $-x^2+2x+3-(1-2x) \neq 0$

$\Leftrightarrow -x^2+4x+2 \neq 0$

$\Delta = 16+8 = 24 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{-2} = 2 \pm \sqrt{6}$

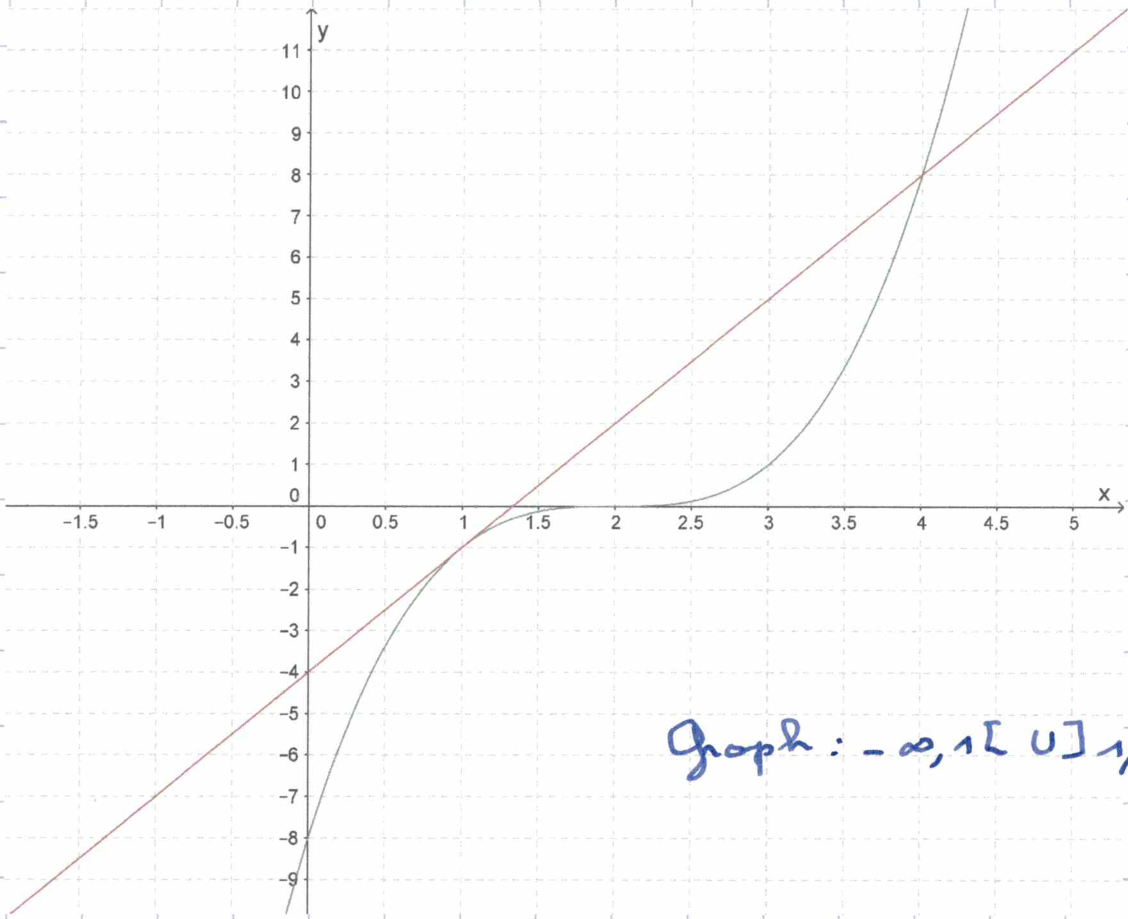


$$\text{dom } f: \left[\frac{1-\sqrt{21}}{2}, 2-\sqrt{6}\right[\cup \left]2-\sqrt{6}, 2\right[\ldots$$

$$\ldots \cup \left]2, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$$

3. Résoudre graphiquement :
   Dans chaque cas, vérifier algébriquement le résultat.

   (a) $(x-2)^3 < 3x - 4$



Graph : $-\infty, 1[\ \cup\ ]1, 4[$

Alg: $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 3x + 4 < 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 < 0$

$P(1) = 0$

	1	-6	9	-4
1		1	-5	4
	1	-5	4	0

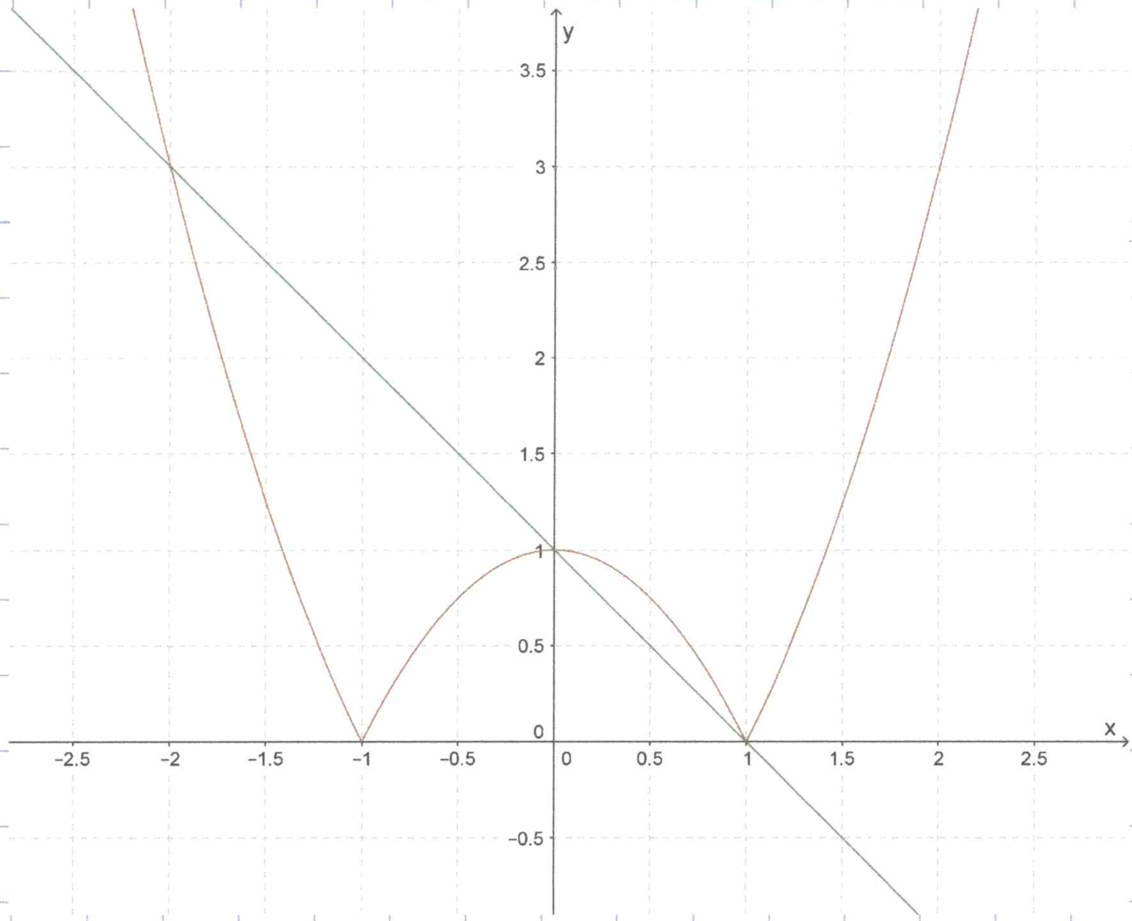
$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 4) < 0$

$\Delta \hookrightarrow$ $x = 1$ ou $x = 4$

x		1		4	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
x^2-5x+4	$+$	0	$-$	0	$+$
I_n	$-$	0	$-$	0	$+$

$S: -\infty, 1[\ \cup\ ]1, 4[$

(b) $|x^2 - 1| > 1 - x$



Graph : $-\infty, -2[\ \cup\ ]0, +\infty$

Alg : $|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x \in -\infty,-1] \cup [1,+\infty \ (1) \\ -(x^2-1) & \text{si } x \in]-1,1[\ (2) \end{cases}$

⊛ $x^2 - 1 \geq 0$

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$
	(1)		(2)		(1)

x		-1		1	
$\lvert x^2-1\rvert$	x^2-1		$1-x^2$		x^2-1
$1-x$	$1-x$		$1-x$		$1-x$
I_n	1		2		3

① et ③ $x^2 - 1 > 1 - x \iff x^2 + x - 2 > 0$

$$\Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} < \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$$

x		-2		1	
x^2+x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$S_1 : -\infty, -2[\cup]1, +\infty$

(ok avec CE (1))

② $1 - x^2 > 1 - x \iff -x^2 + x > 0$

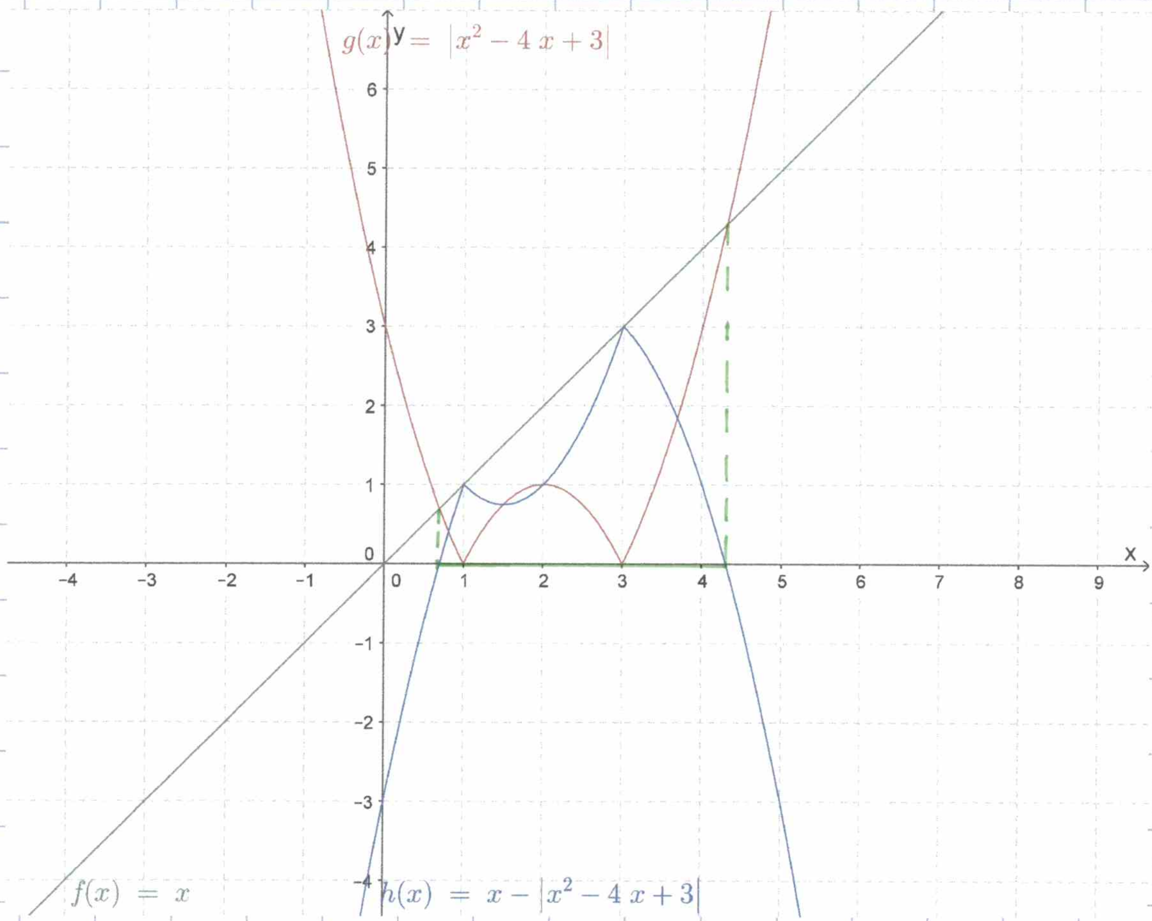
$\iff x(-x+1) > 0$

x		0		1	
x	$-$	0	$+$		$+$
$-x+1$	$+$		$+$	0	$-$
In	$-$	0	$+$	0	$-$

$S_2 :]0, 1[$ (ok avec CE (2))

$S : S_1 \cup S_2$

4. Résoudre $x - |x^2 - 4x + 3| > 0$ et vérifier graphiquement le résultat.



$|x^2 - 4x + 3| < x$ Graph : $]0{,}7 \,;\, 4{,}2[$

TS

$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[\\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{si } x \in]1, 3[\end{cases}$$

x		1		3	
$\lvert x^2-4x+3\rvert$	x^2-4x+3		$-(x^2-4x+3)$		x^2-4x+3
x	x		x		x
In	1		2		3

1 et 3 $x^2 - 4x + 3 < x \iff x^2 - 5x + 3 < 0$

$\Delta = 25 - 12 = 13$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\simeq 4{,}3$; $\simeq 0{,}7$

x		x_1		x_2	
I_n	$+$	0	$-$	0	$+$

$S_1 : \left] \frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right[$

Vu la CE ($x \leq 1$ ou $x \geq 3$)

$S_1 : \left] \frac{5-\sqrt{13}}{2}, 1 \right] \cup \left[3, \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right[$

(2) $-x^2+4x-3 < x \iff -x^2+3x-3 < 0$

$\Delta = 9 - 12 = -3$

x	
I_n	$-$

$S_2 : \mathbb{R}$

Vu la CE ($x \in]1,3[$) $\quad S_2 :]1,3[$

$\rightarrow S = S_1 \cup S_2$

$= \left] \frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right[\quad \left(\simeq]0{,}69 ; 4{,}3[\right)$

5. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$$

a) Tracer le graphe de $f(x)$ au départ du graphe d'une fonction de référence.

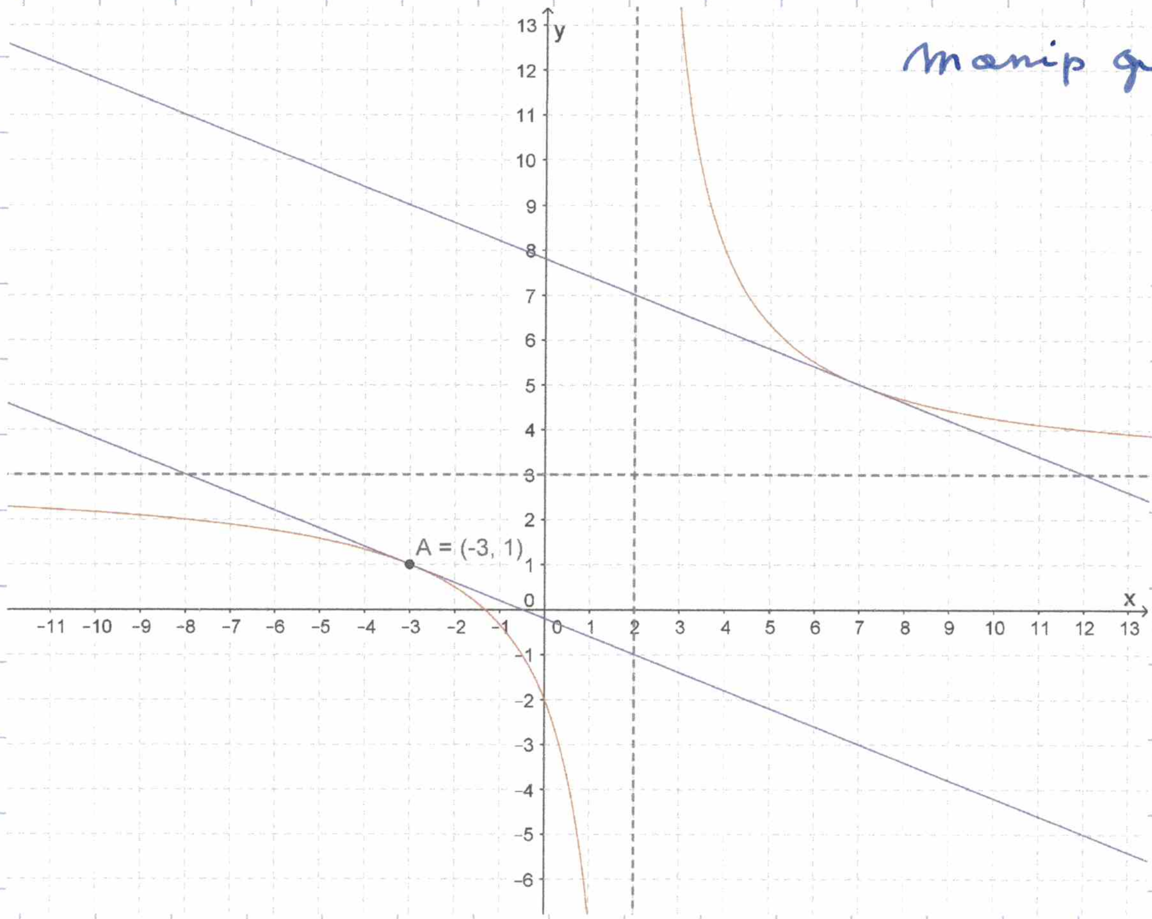
b) Déterminer ensuite la (les) valeur(s) de p pour laquelle (lesquelles) les droites

$$d \equiv y = -\frac{2}{5}x + p$$

sont tangentes au graphique de f.

c) Vérifier graphiquement les résultats et déterminer les coordonnées du point de contact à abscisse négative.

a)



manip graph.

$$\begin{array}{r|l} 3x + 4 & x-2 \\ \cline{2-2} -(3x-6) & 3 \\ \hline 10 & \end{array}$$

$$f(x) = 3 + \frac{10}{x-2}$$

$f_1(x) = \frac{1}{x}$

) TH $(2 \rightarrow)$

$f_2(x) = \frac{1}{x-2}$

) EV $(y \times 10)$

⚠ échelle !

$f_3(x) = \frac{10}{x-2}$

) TV $(3\uparrow)$

$f_4(x) = 3 + \frac{10}{x-2}$

b) $\begin{cases} y = \dfrac{3x+4}{x-2} \\ y = -\dfrac{2}{5}x + p \quad (1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+4}{x-2} = -\frac{2}{5}x + p \Leftrightarrow (3x+4) = \left(-\frac{2}{5}x+p\right)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \left(3x+4 = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + px - 2p\right)\cdot 5$$

$$\Leftrightarrow 15x + 20 = -2x^2 + 4x + 5px - 10p$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 15x + 20 - 4x - 5px + 10p = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (11-5p)x + 20 + 10p = 0 \quad (*)$$

$f(x)$ tgte à $d \rightarrow \Delta = 0$

$$\Leftrightarrow (11-5p)^2 - 4\cdot 2(20+10p) = 0$$

$$\Leftrightarrow 121 - 110p + 25p^2 - 160 - 80p = 0$$

$$\Leftrightarrow 25p^2 - 190p - 39 = 0$$

$$\Delta = 36100 + 3900 = 40000 \quad (= 200^2)$$

$$p_{1,2} = \frac{190 \pm 200}{50} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{39}{5} \quad (\simeq 7{,}8) \\ -\dfrac{1}{5} \quad (\simeq -0{,}2) \end{array} \right.$$

(*) l'éq donne les abscisses des pts d'intersection de d et f. Comme $\Delta = 0$, $x = -\dfrac{b}{2a}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(11-5p)}{4} \left\langle \begin{array}{l} p_1 \quad 7 \\ p_2 \quad -3 \end{array} \right.$$

Si $p = -\dfrac{1}{5}$ et $x = -3$, (1) donne $y = 1$

$\Rightarrow A(-3, 1)$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(a) $2x + 1 \leq \sqrt{7 - 6x}$

. CE : $7 - 6x \geq 0 \iff x \leq \frac{7}{6}$

. Si $2x + 1 \leq 0 \Rightarrow$ tj vraie $\Rightarrow x \leq -\frac{1}{2}$

$S_1 : -\infty, -\frac{1}{2}]$

. Si $2x + 1 \geq 0$ $\left(x \geq -\frac{1}{2}\right)$ (1)

$4x^2 + 4x + 1 \leq 7 - 6x$

$\iff 4x^2 + 10x - 6 \leq 0$

$\Delta = 100 + 96 = 196$

$x_{1,2} = \frac{-10 \pm 14}{8} \left< \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -3 \end{array} \right.$

x		-3		$\frac{1}{2}$	
I_n	$+$	0	$-$	0	$+$

$S_2 : [-3, \frac{1}{2}]$ avec $CE_{(1)}$: $S_2 : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 : -\infty, \frac{1}{2}]$

(b) $-\sqrt{2x^2-7x-4} \leq -x+2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-7x-4} \geq x-2$

- CE : $2x^2-7x-4 \geq 0$

$\Delta = 49+32=81$

$x_{1,2} = \dfrac{7\pm 9}{4} \left\langle \begin{array}{l} 4 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right.$

x		$-\frac{1}{2}$		4	
$2x^2-7x-4$	$+$	0	$-$	0	$+$

CE: $x \in -\infty, -\frac{1}{2}] \cup [4, +\infty$

- si $x-2 \leq 0$ $(\Leftrightarrow x \leq 2)$ l'inégalité est toujours vraie $\Rightarrow S_1 : -\infty, 2]$
- si $x-2 \geq 0$

$\Rightarrow 2x^2-7x-4 \geq x^2-4x+4$

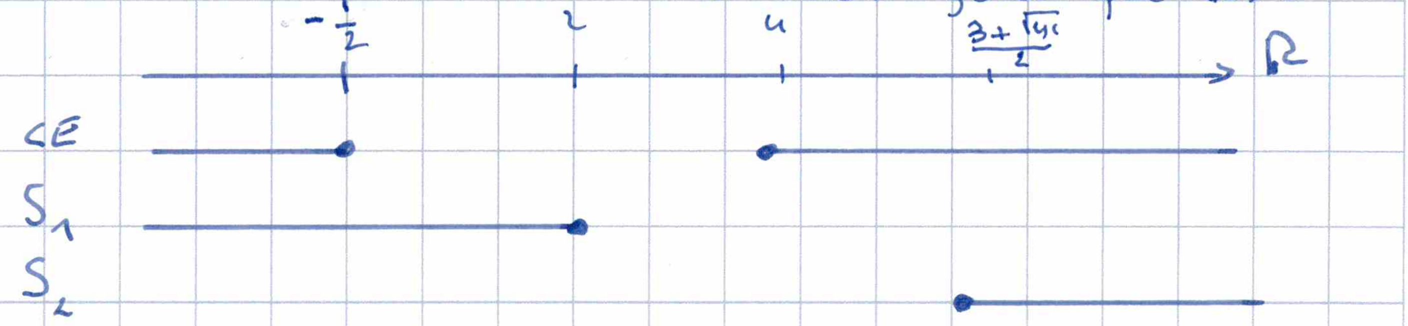
$\Leftrightarrow x^2-3x-8 \geq 0$ $\qquad \Delta = 9+32=41$

$x_{1,2} = \dfrac{3\pm\sqrt{41}}{2}$

x		$\frac{3-\sqrt{41}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{41}}{2}$	
I_n	$+$	0	$-$	0	$+$

$S_2 : -\infty, \dfrac{3-\sqrt{41}}{2}] \cup [\dfrac{3+\sqrt{41}}{2}, +\infty$

dont on ne garde que $x \geq 2$



$S : -\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\dfrac{3+\sqrt{41}}{2}, +\infty$

(c) $1-\sqrt{\frac{3-x}{x}} \leq \frac{2}{x-1}$

• L'inéquation peut s'écrire :

$$-\sqrt{\frac{3-x}{x}} \leq \frac{2}{x-1} - 1 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{3-x}{x}} \leq \frac{2-x+1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{3-x}{x}} \geq -\frac{3-x}{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3-x}{x}} \geq \frac{x-3}{x-1}$$

• CE_1 $\frac{3-x}{x} \geq 0$

x		0		3	
$3-x$	+		+	0	−
x	−	0	+		+
CE_1	−	$\nexists$	+	0	−

CE_1 : $x \in]0,3]$

• Si $\frac{x-3}{x-1} \leq 0$ l'inég est tjs vraie

x		1		3	
$x-3$	−		−	0	+
$x-1$	−	0	+		+
$\frac{x-3}{x-1}$	+	$\nexists$	−	0	+

$S_1 :]1,3]$

• Si $\frac{x-3}{x-1} \geq 0$ (1) $\Rightarrow$ $\frac{3-x}{x} \geq \frac{(x-3)^2}{(x-1)^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{+(x-3)}{x} + \frac{(x-3)^2}{(x-1)^2} \cancel{\geq} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{x} + \frac{x-3}{(x-1)^2}\right] \leq 0$$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

$$\Leftrightarrow (x-3)\,\frac{(x-1)^2+x(x-3)}{x(x-1)^2}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\,\frac{x^2-2x+1+x^2-3x}{x(x-1)^2}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\,\frac{2x^2-5x+1}{D}\leq 0$$

zéros N : $x=3$

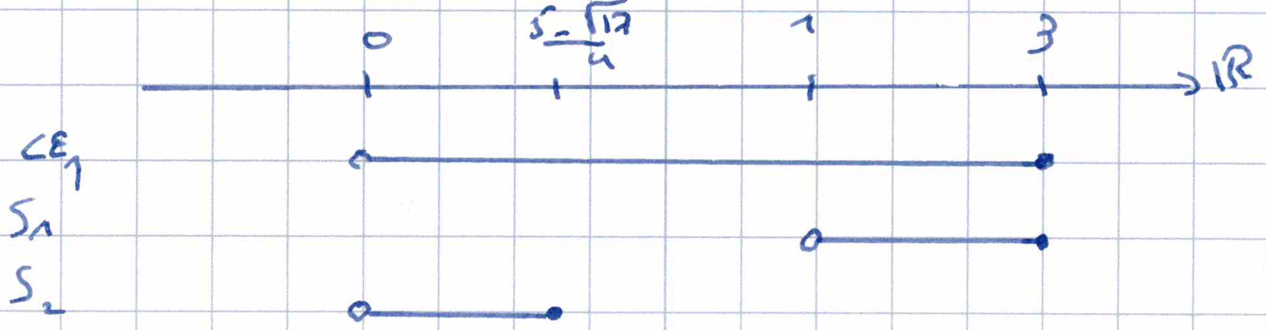
$2x^2-5x+1=0 \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$

D : $x=0$

$x=1$

x		0		$\frac{5-\sqrt{17}}{4}$		1		$\frac{5+\sqrt{17}}{4}$		3	
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x^2-5x+1$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$
I_n	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

$S_2 : \left]0, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{17}}{4}, 3\right] = \left]0, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right]$ (par (1))



$S : \left]0, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left]1, 3\right]$

7. Déterminer l'ensemble image des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$

Il faut trouver les valeurs de k telles que l'éq. $f(x) = k$ ait des solutions.

$$f(x) = k \iff x^2 - 2x + 2 = k(x^2 - 1)$$
$$\iff x^2 - 2x + 2 - kx^2 + k = 0$$
$$\iff (1-k)x^2 - 2x + (2+k) = 0$$

Cette éq a des sol. si $\Delta \geq 0$

$$\Delta_x = 4 - 4(1-k)(2+k) \geq 0$$
$$\iff 4\left[1 - (-k^2 - k + 2)\right] \geq 0$$
$$\iff k^2 + k - 1 \geq 0$$

$\hookrightarrow \Delta_k = 5 \quad k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

k		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
Δ_x	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \operatorname{im}_f : -\infty, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big] \cup \Big[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty$

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-2}$

$$\sqrt{x^2-4x+3} = k(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-4x+3 = k^2(x^2-4x+4)$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2x^2-4k^2x+4k^2-x^2+4x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (k^2-1)x^2+(4-4k^2)x+4k^2-3=0$$

$$\Delta_x = (4-4k^2)^2-4(k^2-1)(4k^2-3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16-32k^2+16k^4-4(4k^4-7k^2+3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16-32k^2+\cancel{16k^4}-\cancel{16k^4}+28k^2-12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -4k^3+4 \geq 0$$

k		-1		1	
Δ_x	$-$	0	$+$	0	$-$

$\rightarrow \ im_f : [-1,1]$

8. Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 2x - 3}$ admet la droite d'équation $x = -1$ comme axe de symétrie.

Il faut comparer $f(-1-x)$ et $f(-1+x)$

$$f(-1-x) = \frac{3}{(-1-x)^2 + 2(-1-x) - 3}$$

$$= \frac{3}{x^2 + 2x + 1 - 2 - 2x - 3}$$

$$= \frac{3}{x^2 - 4}$$

$$f(-1+x) = \frac{3}{(-1+x)^2 + 2(-1+x) - 3}$$

$$= \frac{3}{x^2 - 2x + 1 - 2 + 2x - 3}$$

$$= \frac{3}{x^2 - 4}$$

$f(-1-x) = f(-1+x) \Rightarrow x = -1$ est A.S.

9. Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ admet un centre de symétrie d'abscisse 1. Quelles sont les coordonnées de ce point ?

Si l'abscisse du c.s. est 1, son ordonnée est

$$b = \frac{f(1-x)+f(1+x)}{2}$$

$$f(1-x) = \frac{x^2-2x+1+1-x+1}{1-x-1} = \frac{x^2-3x+3}{-x}$$

$$f(1+x) = \frac{x^2+2x+1+x+1+1}{1+x-1} = \frac{x^2+3x+3}{x}$$

$$f(1-x)+f(1+x) = -\frac{x^2-3x+3}{x} + \frac{x^2+3x+3}{x}$$

$$= \frac{\cancel{-x^2}+3x\cancel{-3}\cancel{+x^2}+3x\cancel{+3}}{x}$$

$$= \frac{6x}{x} = 6$$

$\Rightarrow$ $b = 3$ C.S $(1,3)$