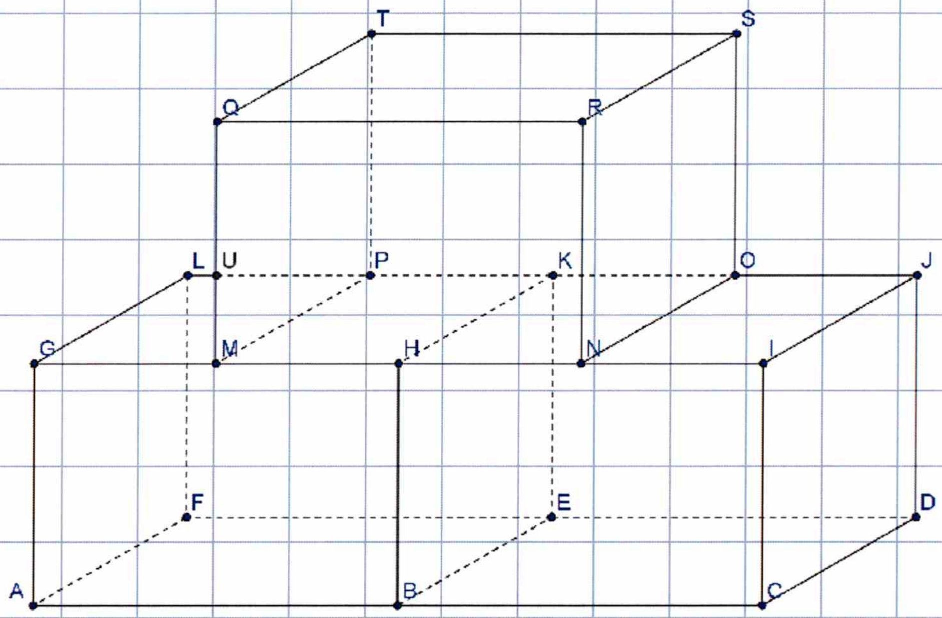
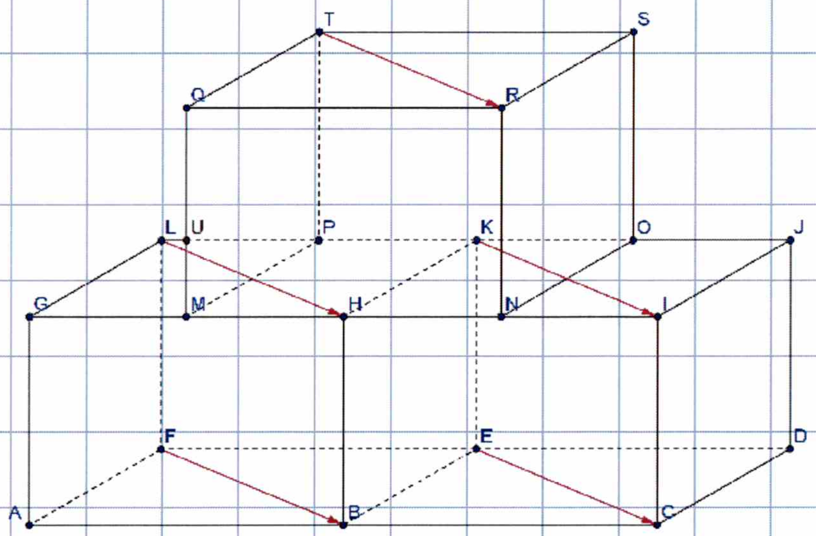
Calcul vectoriel dans l'espace : Solutions

1. On considère le volume suivant constitué de trois parallélépipèdes rectangle ($|AF| = 3$, $|FE| = 4$ et $|AG| = 2$). De plus, les points M, N, O et P sont les milieux respectifs des segments $[GH]$, $[HI]$, $[KJ]$ et $[LK]$

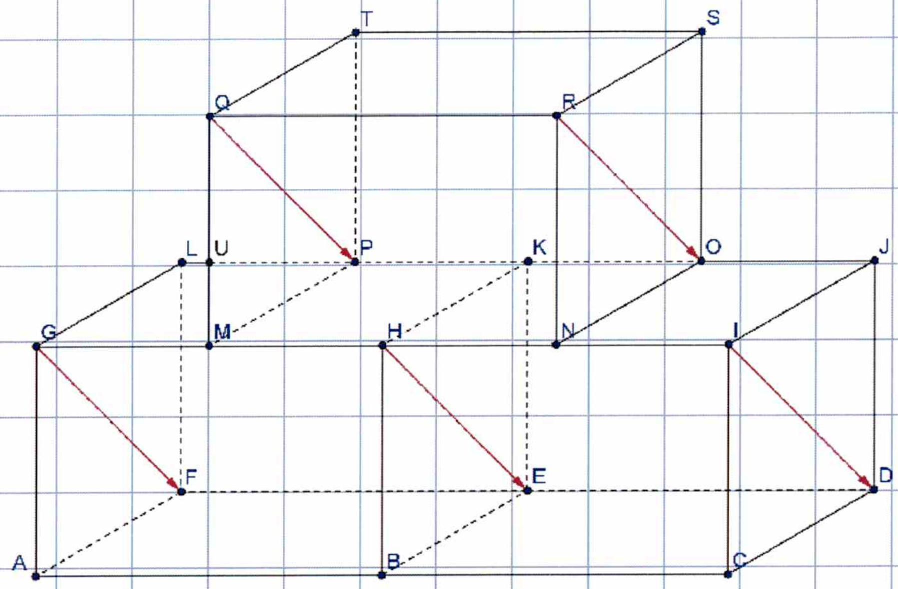


   (a) Déterminer deux vecteurs égaux aux vecteurs

      i. $\overrightarrow{TR}$

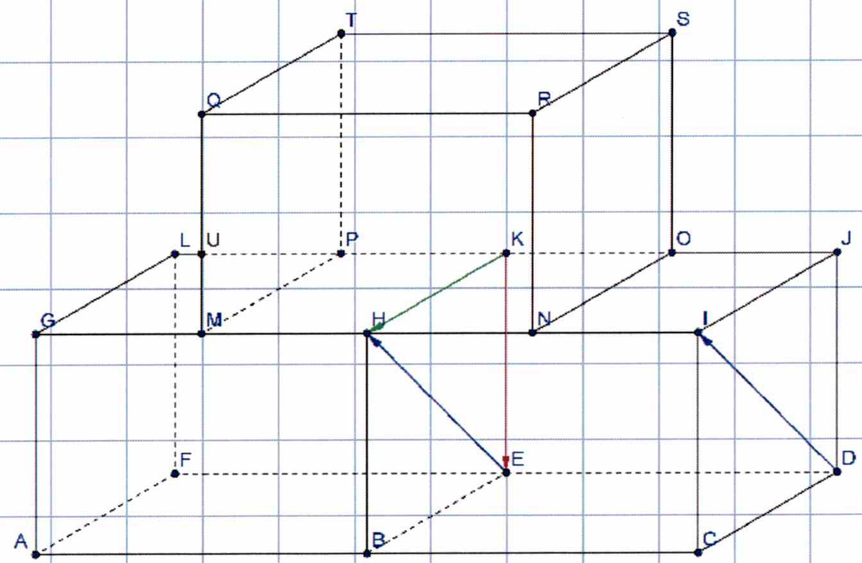


ii. $\overrightarrow{HE}$

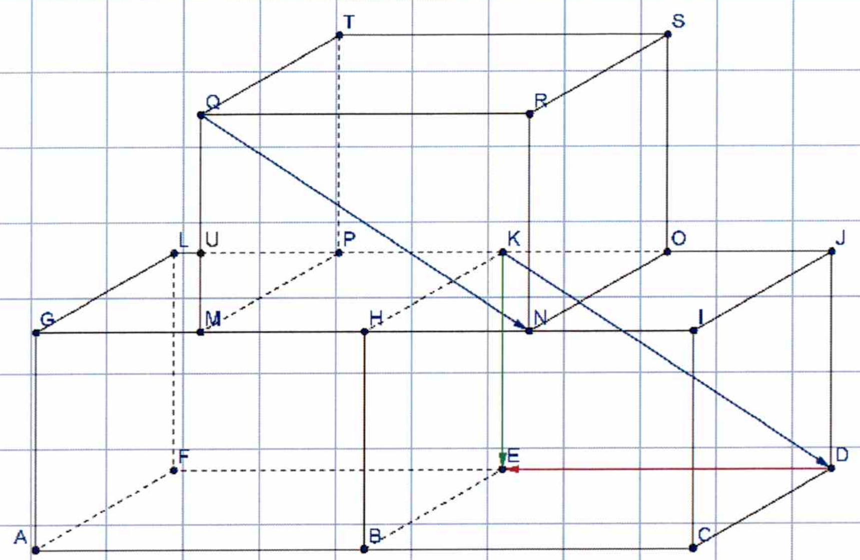


(b) Déterminer un représentant des vecteurs suivants

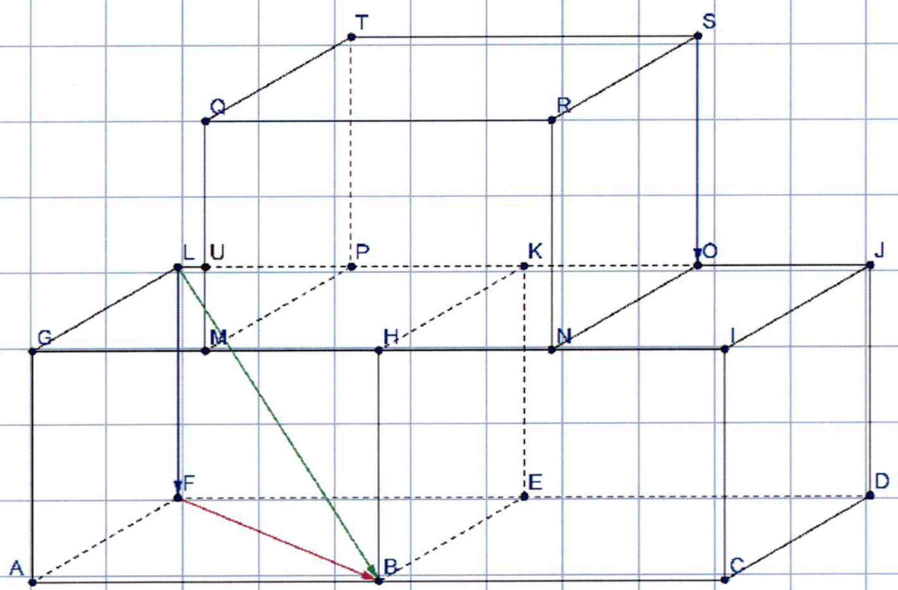
i. $\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{DI}$



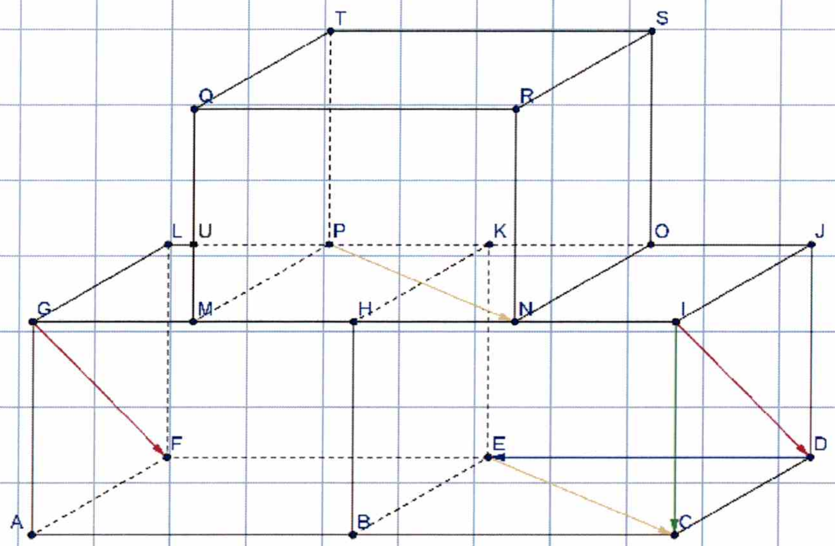
ii. $\frac{1}{2}\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{NQ}$



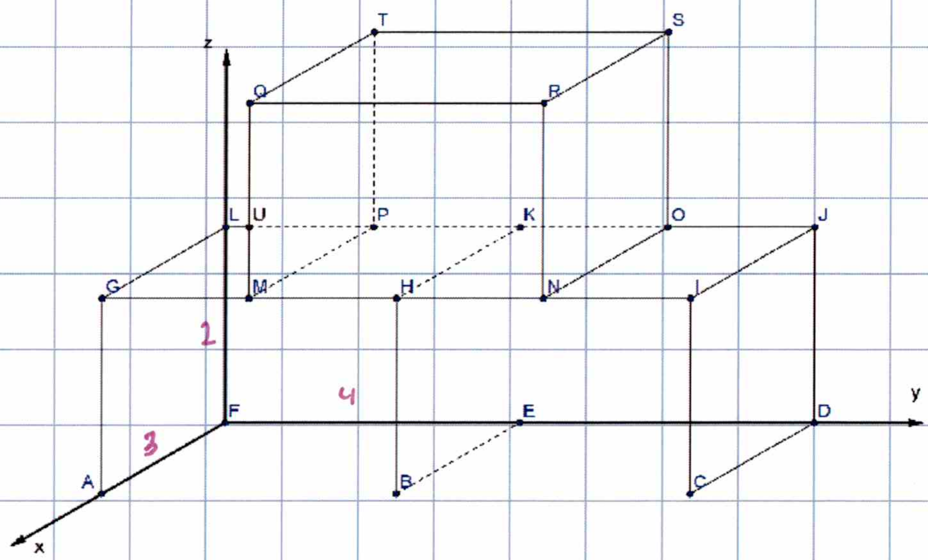
iii. $\overrightarrow{FB} - \overrightarrow{OS}$



iv. $\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{PN}$



(c) Si l'on place l'origine des axes en F, l'axe Ox selon $\overrightarrow{FA}$, l'axe Oy selon $\overrightarrow{FD}$ et l'axe Oz selon $\overrightarrow{FL}$, déterminer les coordonnées des points B, I et S



B : (3, 4, 0)
I : (3, 8, 2)
S : (0, 6, 4)

2. Dans un repère orthonormé $Oxyz$, déterminer les valeurs de a, b et c pour que

(a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si $A(-2, 3, 1-2c)$, $B(a-1, 2, -1)$, $C(1, 3b+2, 0)$ et $D(2a+3, b, -3c)$

$$\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} a+1 \\ -1 \\ -2+2c \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD} : \begin{pmatrix} 2a+2 \\ -2b-2 \\ -3c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+1 = 2a+2 \\ -1 = -2b-2 \\ -2+2c = -3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{2}{5} \end{cases}$$

(b) $M(1, -2, 3)$ est le milieu de $[AB]$ si $A(a+2c, 2b-3, c-2))$ et $B(3a-1, b+2, c+2)$

$$M_{AB} : \left(\frac{4a+2c-1}{2}, \frac{3b-1}{2}, \frac{2c}{2} \right) = (1, -2, 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2c-1 = 2 \\ 3b-1 = -4 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

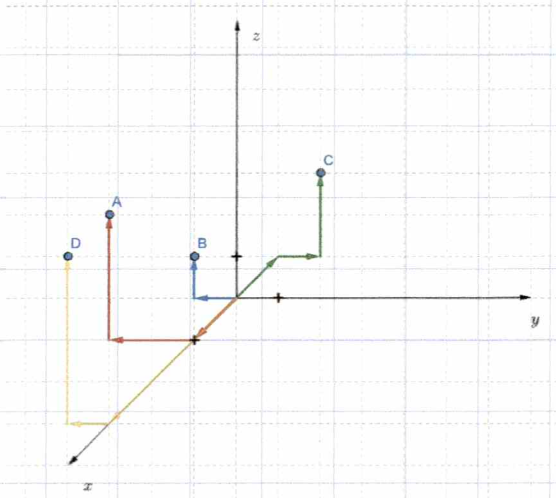
(c) $G(2, 0, -c+1)$ est le centre de gravité du triangle ABC si $A(2a, b+1, 2c)$, $B(-3, b-2, 1)$ et $C(3a+2, -2, 3c+2)$

$$G_{ABC} : \left(\frac{2a-3+3a+2}{3}, \frac{b+1+b-2-2}{3}, \frac{2c+1+3c+2}{3} \right) = (2, 0, -c+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a-1 = 6 \\ 2b-3 = 0 \\ 5c+3 = -3c+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{5} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

3. Soit dans un repère les points $A(1,-2,3)$, $B(0,-1,1)$, $C(-1,1,2)$ et $D(3,-1,4)$.

(a) Placer les points dans un repère orthonormé.



(b) Déterminer les composantes de $2\overrightarrow{AB}$, $3\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CA}-\frac{5}{3}\overrightarrow{BD}$.

$$\bullet\ \overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \overrightarrow{BC} : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3\overrightarrow{BC} : \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AD} : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \overrightarrow{CA} : \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BD} : \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{5}{3}\overrightarrow{BD} : \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(c) Déterminer les coordonnées du point E tels que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DB}$;

$$\overrightarrow{EC} : \begin{pmatrix} -1-x \\ 1-y \\ 2-z \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

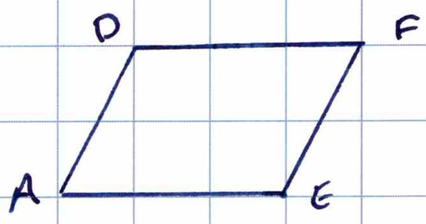
$$\overrightarrow{AD} : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} : \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DB} : \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow 3\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{17}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1-x = -11 \\ 1-y = \frac{3}{2} \\ 2-z = -\frac{17}{2} \end{cases} \rightarrow E : \left(10, -\frac{1}{2}, \frac{21}{2}\right)$$

(d) Déterminer les coordonnées du points F tels que $ADFE$ soit un parallélogramme.



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$$

$$\overrightarrow{AD} : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EF} : \begin{pmatrix} x-10 \\ y+\frac{1}{2} \\ z-\frac{21}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-10 = 2 \\ y+\frac{1}{2} = 1 \\ z-\frac{21}{2} = 1 \end{cases} \qquad F\left(12, \frac{1}{2}, \frac{23}{2}\right)$$

4 ~~5~~. Déterminer x pour que les points A, B, C et D soient coplanaires.

(a) $A(-1,0,1)$, $B(2,-1,1)$, $C(0,1,2)$ et $D(9,x,0)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}:\begin{pmatrix}9\\x-1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}:\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}=k_1\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{BC}$

$$\begin{cases}9=3k_1-2k_2\\x-1=-k_1+2k_2\\-2=k_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5=3k_1\\x-1=-\frac{5}{3}-4\\k_2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_1=\frac{5}{3}\\x=-\frac{14}{3}\\k_2=-2\end{cases}$$

(b) $A(1,3,-2)$, $B(x,-1,1)$, $C(2,1,0)$ et $D(3x,-9,8)$

$\overrightarrow{AB}:\begin{pmatrix}x-1\\-4\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}:\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}:\begin{pmatrix}3x-1\\-12\\10\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AC}=k_1\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{AD}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1=k_1(x-1)+k_2(3x-1) & (3)\\-2=-4k_1-12k_2 & (1)\\2=3k_1+10k_2 & (2)\end{cases}$$

Si on résoud le syst [(1),(2)] $\Rightarrow\begin{cases}k_1=-1\\k_2=\frac{1}{2}\end{cases}$

Si on remplace dans (3) $\Rightarrow 1=-x+1+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=1$

5 ~~6~~. Déterminer λ et μ pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires

(a) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{v} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} - 2\vec{k}$

$\vec{u} \,//\, \vec{v}$ (ou colinéaires) $\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\mu} = \frac{3}{-2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\lambda} = -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{\mu} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{3} \\ \mu = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

(b) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{v} = \lambda\vec{i} + (\lambda - 1)\vec{j} + \mu\vec{k}$

$$\frac{2}{\lambda} = \frac{3}{\lambda - 1} = \frac{-1}{\mu} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\lambda} = \frac{3}{\lambda - 1} \\ \frac{2}{\lambda} = -\frac{1}{\mu} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - 2 = 3\lambda \\ \frac{2}{\lambda} = -\frac{1}{\mu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

6 ~~7~~. L'espace étant munis d'un repère othonormé, considérons les points $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$ et $C(0, 2, 2)$.

(a) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC ;

$$G : \left(\frac{1+2+0}{3}, \frac{0+1+2}{3}, \frac{1+0+2}{3} \right) = (1, 1, 1)$$

(b) Déterminer les coordonnées du centre de gravité K du tétraèdre $OABC$

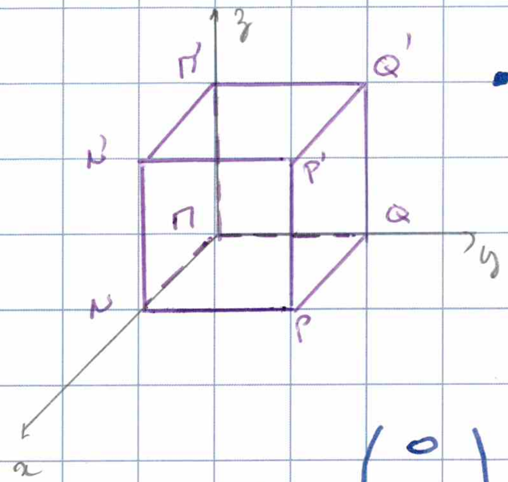
$$K : \left(\frac{1+2+0+0}{4}, \frac{0+1+2+0}{4}, \frac{1+0+2+0}{4} \right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

(c) Vérifier que $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$

$$\overrightarrow{OK} : \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OG} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$$

7 ~~8~~. On donne un cube $MNPQM'N'P'Q'$. Son arête mesure 5cm.

(a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{P'N'} \bullet \overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{N'N} \bullet \overrightarrow{P'M}$;



- $\overrightarrow{P'N'} : \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{MQ} : \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{P'N'} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0.0 + 5(-5) + 0.0$
$= -25$

- $\overrightarrow{N'N} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{P'M} : \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{N'N} \cdot \overrightarrow{P'M} = 0.(-5) + 0(-5) + (-5)(-5) = 25$

(b) Calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{QM}$ et $\overrightarrow{QN}$, $\overrightarrow{M'P'}$ et $\overrightarrow{QP}$;

- $\overrightarrow{QM} : \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{QM}\| = 5$

$\overrightarrow{QN} : \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{QN}\| = 5\sqrt{2}$

$\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN} = 25$

$\cos x = \dfrac{25}{5.5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

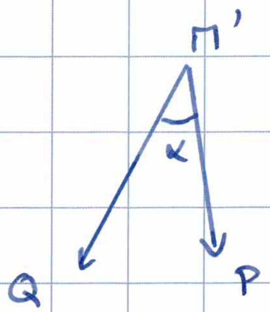
- $\overrightarrow{M'P'} : \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{M'P'}\| = 5\sqrt{2}$

$\overrightarrow{QP} : \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{QP}\| = 5$

$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{M'P'} = 25$

$\cos x = \dfrac{25}{5.5\sqrt{2}}$
$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

(c) Calculer la valeur de l'angle $Q\hat{M}'P$



$\overrightarrow{M'Q} : \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{M'Q}\| = 5\sqrt{2}$

$\overrightarrow{M'P} : \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{M'P}\| = 5\sqrt{3}$

$\overrightarrow{M'Q} \cdot \overrightarrow{M'P} = 0 + 25 + 25 = 50$

$\cos \alpha = \dfrac{50}{25\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha \simeq 0{,}615$

$(\alpha \simeq 36{,}25°)$

8 ~~9~~. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer les réels a et b pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB} : (1, 2, a)$ et $\overrightarrow{AC} : \left(b-2, -\frac{3}{4}, \frac{2b}{3}\right)$ soient orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{EF} : (1, -2, 3)$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EF} \Leftrightarrow 1 \cdot 1 + 2(-2) + a \cdot 3 = 0$

$\Leftrightarrow -3 + 3a = 0$

$\Leftrightarrow a = +1$

$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{EF} \Leftrightarrow 1 \cdot (b-2) - 2\left(-\frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{2b}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow b - 2 + \frac{3}{2} + 2b = 0$

$\Leftrightarrow 3b = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow b = \frac{1}{6}$

9. ~~10~~. Dans un repère orthonormé, on considère un cube $MNPQM'N'P'Q'$ dont l'arête a une longueur 2.

(a) Démontrez que $\overrightarrow{QN'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MP}$ et à $\overrightarrow{Q'P}$

Dessin : voir exercice 7

• $\overrightarrow{QN'} : \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MP} : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QN'} . \overrightarrow{MP} = 2.2 + 2.(-2) + 0$

$= 0$

• $\overrightarrow{Q'P} : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QN'} . \overrightarrow{Q'P} = 2.2 + 0 + (-2)(2) = 0$

(b) Montrez que le triangle $Q'MP$ est équilatéral (en utilisant le produit scalaire)

Si Q'MP est équilatéral, les normes sont égales, les angles aussi ($\frac{\pi}{3}$) et les 3 produits scalaires aussi (au signe près)

$\overrightarrow{Q'M} : \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MP} : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Q'P} : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{Q'M} . \overrightarrow{MP} = -4$

$\overrightarrow{Q'M} . \overrightarrow{Q'P} = 4$

$\overrightarrow{MP} . \overrightarrow{Q'P} = 4$