Rappels de trigonométrie : Solutions

1. Convertir en degré décimal :

   (a) $12°52'23''$ (b) $-57°12'18''$ (c) $1285°23'19''$

a) $12° + \frac{52}{60} + \frac{23}{3600} \simeq 12,8731°$

b) $-\left(57° + \frac{12}{60} + \frac{18}{3600}\right) \simeq -57,205°$

c) $1285° + \frac{23}{60} + \frac{19}{3600} \simeq 1285,3886°$

2. Convertir en DMS et en radians :

(a) $57,1893°$ (b) $-115,9519°$ (c) $478,1285°$

a) Transformons la partie décimale en ' et ''

$0,1893° = 0,1893 \cdot 60' \simeq 11,358'$

et $0,358' = 0,358 \cdot 60'' \simeq 21,48''$

$\Rightarrow 57° \, 11' \, 21''$

et $57,1893° = 57,1893 \cdot \frac{\pi}{180°} \simeq 0,9981$ rad (*)

(*) π rad $= 180°$

$\frac{\pi}{180}$ rad $= 1°$

$\frac{x \cdot \pi}{180}$ rad $= x°$

b) Comme en a)

$-115,9519° = -115° \, 57' \, 07''$

$= -2,0237$ rad

c) $478,1285° = 478° \, 07' \, 43''$

$= 8,3449$ rad

3. Convertir en DMS et DD :

(a) $\frac{3\pi}{4}$ (rad)

(b) 0.85 (rad)

(c) 5.4271 (rad)

(d) −3.42 (rad)

a) $\frac{3\pi}{4} = 135°$

b) $0,85 \text{ rad} = 0,85 \cdot \frac{180°}{\pi} = 48,7014°$ (*)

$= 48° 42' 05''$ (*)

(*) π rad $= 180°$

1 rad $= \frac{180°}{\pi}$

x rad $= x \cdot \frac{180°}{\pi}$

(*) Voir exo 2

c) $5,4271 = 310,9499°$

$= 310° 57' 00''$

d) $-3,42 = -195,9516°$

$= -195° 57' 06''$

4. Arcs et angles :

(a) Quelle est la vitesse de rotation en radians/sec d'une éolienne qui tourne à 17 tours par minute ?

(b) Calculer la longueur de l'arc intercepté par un angle de 0,22 rad au centre d'un cercle de 27 cm de rayon.

(c) Calculer l'aire du secteur circulaire de 0,82 rad découpé dans un disque de 15 cm de rayon.

(d) Calculer l'angle au centre d'un cercle de rayon 5 cm qui intercepte un arc de longueur 6,8 cm.

(e) Déterminer le rayon d'un cercle au centre duquel un angle de 1,2 rad intercepte un arc de longueur 10cm.

(f) Un angle inscrit dans un cercle intercepte un arc d'un sixième de ce cercle. Quelle est l'amplitude de cet angle ?

(g) Un angle de 35ř est inscrit dans un cercle de 7 cm de rayon. Calculer la longueur de l'arc intercepté.

(h) Un angle inscrit dans un cercle de 11 cm de rayon intercepte un arc de 15 cm. Calculer l'amplitude de l'angle.

a) 1 tour = 2π rad et 1' = 60"

$$17 \text{ tr}/\text{min} = \frac{17 \cdot 2\pi}{60} \simeq 1{,}7802 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) $l = R\,\alpha$

$= 27 \cdot 0{,}22$

$= 5{,}94$ cm

⚠ α = angle au centre

β : angle inscrit

c) $A = \frac{1}{2} R^2 \alpha$

$= \frac{1}{2}(15)^2 \cdot 0{,}82$

$= 92{,}25$ cm^2

d) $\alpha = \frac{l}{R}$

$= \frac{6{,}8}{5}$

$= 1{,}36$ rad

e) $R = \frac{l}{\alpha} = \frac{10}{1,2} = 8,33$ cm

f) $l = \frac{\pi}{3} R \iff \alpha = \frac{\pi}{3} \iff \beta = \frac{\pi}{6}$ (angle inscrit = $\frac{1}{2}$ angle au centre interceptant le m. arc)

g) $\beta = 35° \Rightarrow \alpha = 70° = 1,2217$ (rad)

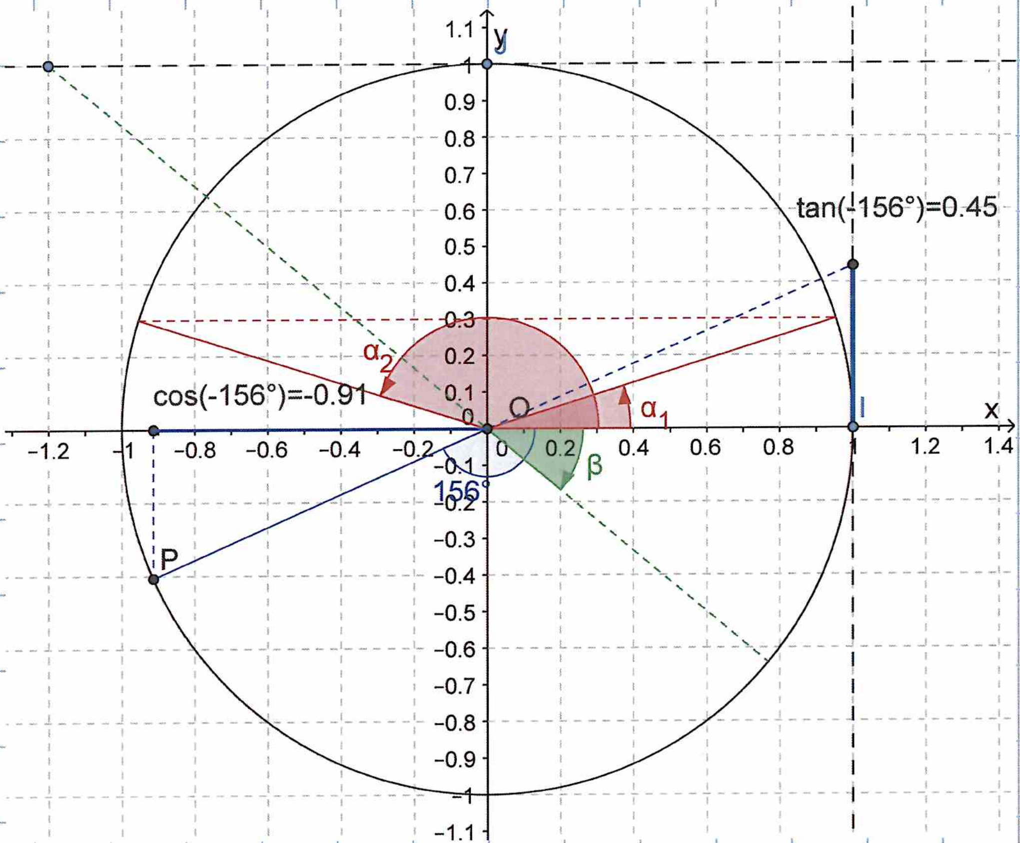
$l = R\alpha = 7 \cdot 1,2217 = 8,55$ cm

h) $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{15}{11} = 1,3\cancel{8}36$

$\Rightarrow \beta = 0,6818$

5. Dans un cercle trigonométrique de 5cm de rayon,

(a) placer le(s) angle(s) α dont le sinus vaut 0,3 (en rouge)



(b) placer le point P représentant l'angle -156° et lire sur le cercle, une valeur approchée de $\cos(-156°)$ et $\tan(-156°)$

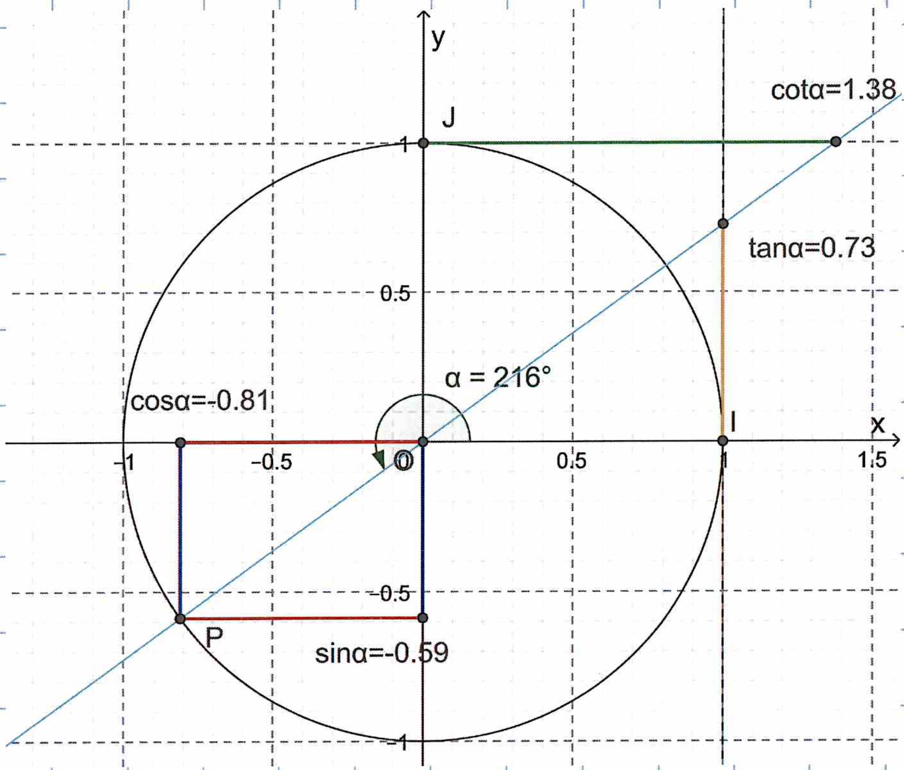
$\cos(-156°) \simeq -0,91$ et $\tan(-156°) \simeq 0,45$ (bleu)

(c) placer le(s) angle(s) β dont la cotangente vaut -1,2 et dont le cosinus est positif

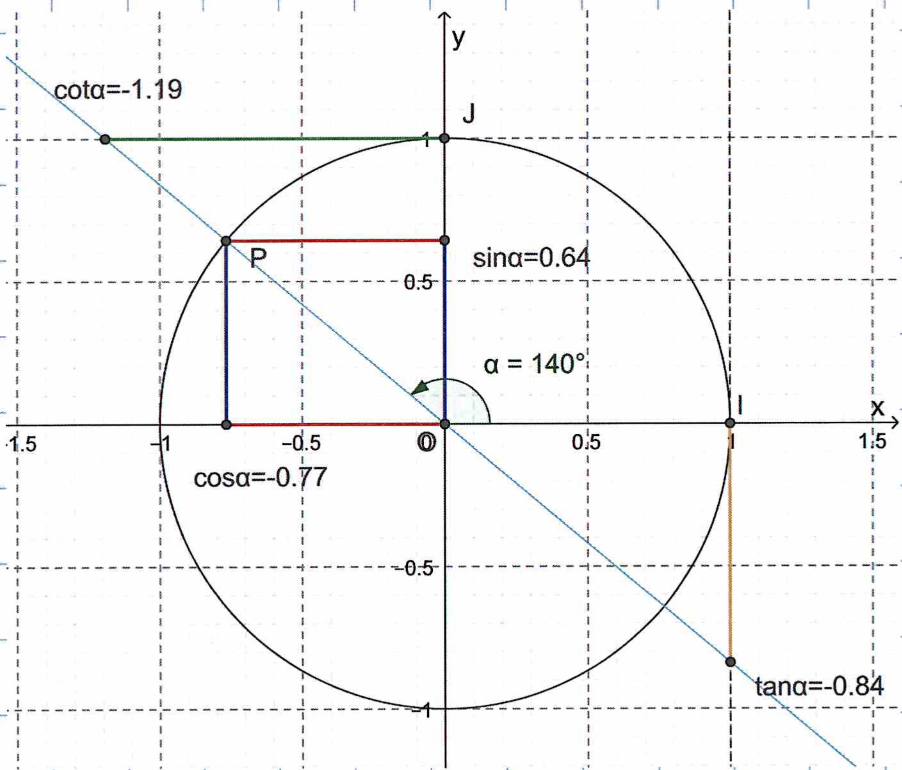
(en vert)

6. Dans un cercle trigonométrique de 5cm de rayon, placer les angles α suivants et lire une valeur approchée des nombres trigonométriques de cet angle :

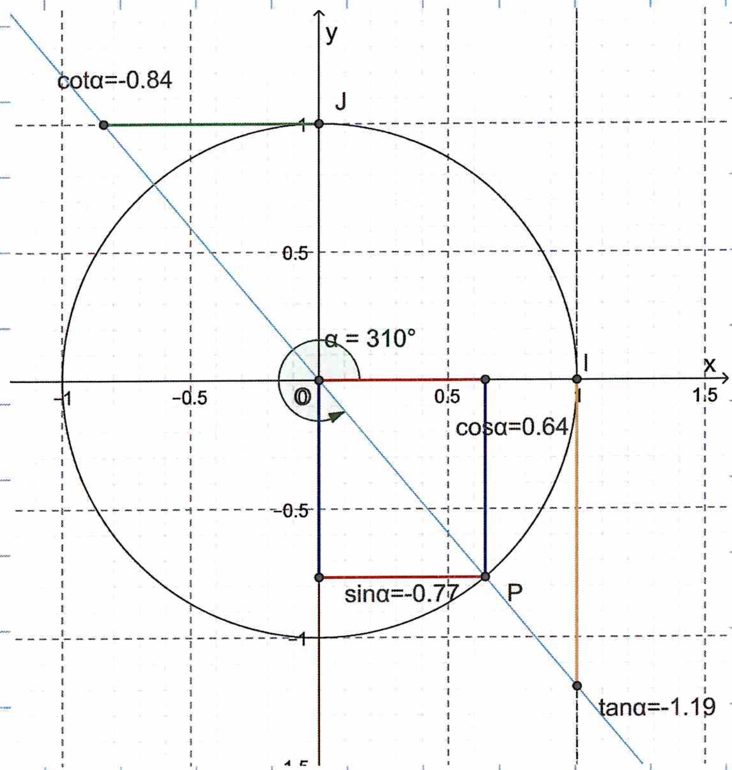
(a) $\alpha = 216°$



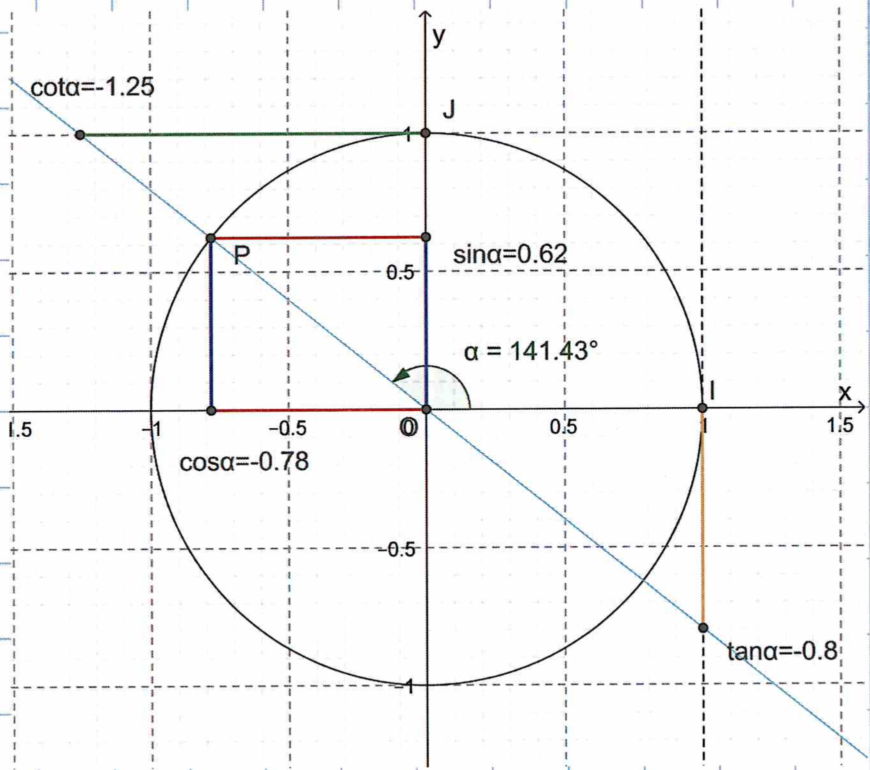
(b) $\alpha = \dfrac{7\pi}{9}$



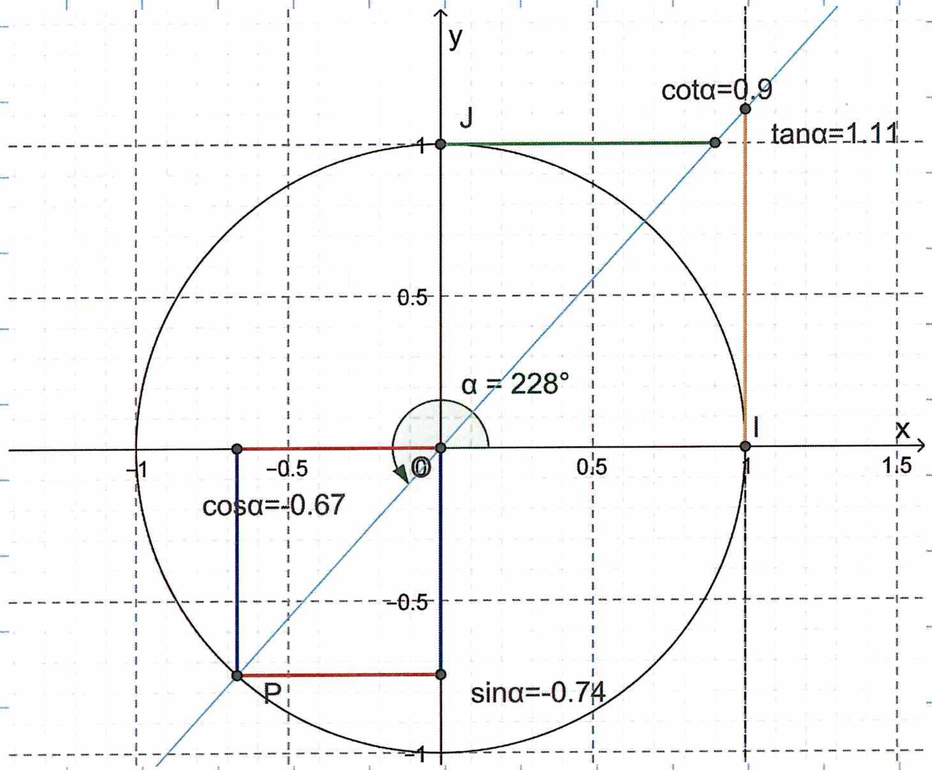
(c) $\alpha = -\dfrac{5\pi}{18}$



(d) $\alpha = \dfrac{11\pi}{14}$



(e) $\alpha = -\dfrac{11\pi}{15}$



7. (a) Sachant que $\sin x = \frac{2}{5}$ et que $x \in Q_I$, déterminer une valeur exacte des autres nombres trigonométriques de x.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{25}} \Leftrightarrow \cos x = \cancel{\pm}\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$\hookrightarrow x \in Q_I$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \tan x = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

$$\cot x = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

(b) Sachant que $\cos x = -\frac{3}{7}$ et que $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, déterminer une valeur exacte de $\sin x$ et de $\cot x$.

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} \Leftrightarrow \sin x = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{49}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{40}}{7} \Leftrightarrow \sin x = \cancel{\pm}\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$\hookrightarrow x \in Q_{II}$

$$\tan x = -\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$\cot x = -\frac{3}{2\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{20}$$

(c) Sachant que $\tan x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ et que $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, déterminer une valeur exacte de $\sin x$.

$\bullet\ 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \frac{7}{16}} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{16}{23}$

$\Leftrightarrow \cos x \underset{\cos\, Q_{III}}{=} - \frac{4}{\sqrt{23}} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{4\sqrt{13}}{13}$

$\bullet\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \sin x = \tan x \cos x$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot -\frac{4\sqrt{13}}{13} = -\frac{\sqrt{91}}{13}$

$\bullet\ \cot x = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$

(d) Sachant que $\sin x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et que $x \in Q_{III}$, déterminer une valeur exacte des autres nombres trigonométriques de x.

$\bullet$ Comme dans le (a) $\cos x \underset{\cos\, Q_{III}}{=} - \sqrt{1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

$= -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\bullet\ \tan x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4-2}}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$= \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1$

$\bullet\ \cot x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

(e) Sachant que $\cot x = 1 - \sqrt{2}$ et que $x \in Q_{IV}$, déterminer une valeur exacte des autres nombres trigonométriques de x.

$$\bullet\ \cot x = 1 - \sqrt{2} \iff \tan x = \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$
$$= -(1+\sqrt{2})$$

car Q_{IV}

$$\bullet\ 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \iff \sin x = \cancel{\pm}\sqrt{\frac{1}{1+\cot^2 x}}$$

(f_c)

$$\iff \sin x = -\sqrt{\frac{1}{1+(1+2-2\sqrt{2})}} = -\sqrt{\frac{1}{4-2\sqrt{2}}}$$
$$= -\sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{8}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\bullet\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \iff \cos x = \cot x \sin x$$

$$\iff \cos x = \cancel{-}(1-\sqrt{2}) \cdot \cancel{-}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{(1-\sqrt{2})^2(2+\sqrt{2})}}{2}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

8. Simplifier les expressions suivantes

(a) $\tan(x+3\pi)+\cot x+\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$= \tan x + \cot x - \cot x$

$= \tan x$

(b) $3\tan\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+2\tan\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)-3\cot(x+\pi)$

$= -3\cot x - 2\cot x - 3\cot x$

$= -8\cot x$

(c) $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(\pi+x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos(\pi-x)}+\frac{\sin(9\pi-x)\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cot(x+5\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$$

$$=\frac{\cancel{\cos x}\,(+\cancel{\sin x})}{-\cancel{\sin x}\,(+\cancel{\cos x})}+\frac{\cancel{\sin x}\,(+\cancel{\cot x})}{\cancel{\cot x}\,(+\cancel{\sin x})}$$

$$=0$$

(d) $$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cot(x-2\pi)}{\tan(3\pi+x)\cot(-x)\cos(\pi+x)}$$

$$=\frac{(+\cancel{\cos x})\,\sin x\,\cot x}{\cancel{\tan x}\,(+\cancel{\cot x})(-\cancel{\cos x})}$$

$$=-\cos x$$

9. Simplifier l'expression suivante

$$E(x) = \frac{\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\cos(3\pi + x)\tan(-x)}{\cot(7\pi + x)\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$E(x) = \frac{\cancel{\sin x}\,(-\cancel{\cos x})\,(-\tan x)}{(-\cancel{\cos x})\,(-\cancel{\sin x})}$$

$$= \tan x$$

10 ~~6~~. Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{10}\right)$ et de $\sin\left(\frac{14\pi}{10}\right)$.

$$\cos\frac{11\pi}{10} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\frac{\pi}{10}$$

$$\sin\frac{14\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{9\pi}{10}\right) = \cos\frac{9\pi}{10} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\frac{\pi}{10}$$

11 ~~7~~. *Remarques* : on définit la sécante $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ et la cosécante $\csc x = \frac{1}{\sin x}$.
Démontrer les identités suivantes :

(a) $\tan x \sin x = \sec x - \cos x$

$$\mathrm{I} = \frac{\sin^2 x}{\cos x} \qquad \mathrm{II} = \frac{1}{\cos x} - \cos x$$

$$= \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I} = \mathrm{II}$$

(b) $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = 2\csc x$

$$\mathrm{I} = \frac{\sin^2 x + (1+\cos x)^2}{(1+\cos x)\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}$$

$$= \frac{2 \cancel{+ 2\cos x}}{(1 \cancel{+ \cos x})\sin x} \quad 2$$

$$= \frac{2}{\sin x}$$

$$= 2\csc x$$

(c) $\dfrac{1}{1+\cos x} + \dfrac{1}{1-\cos x} = 2 + 2\cot^2 x$

$$I = \frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 x}$$

$$= 2\left(1 + \cot^2 x\right)$$

$$= II$$

(d) $(\tan x + \sec x)^2 = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

$$I = \tan^2 x + 2\frac{\tan x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\sin x + 1)^2}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{(1 + \sin x)^{\cancel{2}}}{(1 - \sin x)\cancel{(1 + \sin x)}}$$

$$= II$$

(e) $\dfrac{\sin^2 a + \sin a \cos a + \cos^2 a}{cos^2 a} = 1 + \tan a + \tan^2 a$

$$I = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\sin a}{\cos a} + 1$$

$$= \tan^2 a + \tan a + 1$$

$$= II$$

(f) $\dfrac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} + \dfrac{\sin^3 a - \cos^3 a}{\sin a - \cos a} = 2$

$$I = \frac{\cancel{(\sin a + \cos a)}(\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a)}{\cancel{\sin a + \cos a}} + \dots$$

$$\dots \frac{\cancel{(\sin a - \cos a)}(\sin^2 a + \sin a \cos a + \cos^2 a)}{\cancel{\sin a - \cos a}}$$

$$= 1 - \sin a \cos a + 1 + \sin a \cos a$$

$$= 2$$

$$= II$$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(g) $\dfrac{\sin^2 a - \cos^2 b}{\sin^2 a \sin^2 b} = 1 - \cot^2 a \cot^2 b$

$$\mathrm{II} = 1 - \left(\frac{1}{\sin^2 a} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin^2 b} - 1\right)$$

$$= \cancel{1} - \frac{1}{\sin^2 a \sin^2 b} + \frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\sin^2 b} \cancel{- 1}$$

$$= \frac{\sin^2 b + \sin^2 a - 1}{\sin^2 a \sin^2 b}$$

$$= \frac{\sin^2 a - \cos^2 b}{\sin^2 a \sin^2 b}$$

$$= \mathrm{I}$$