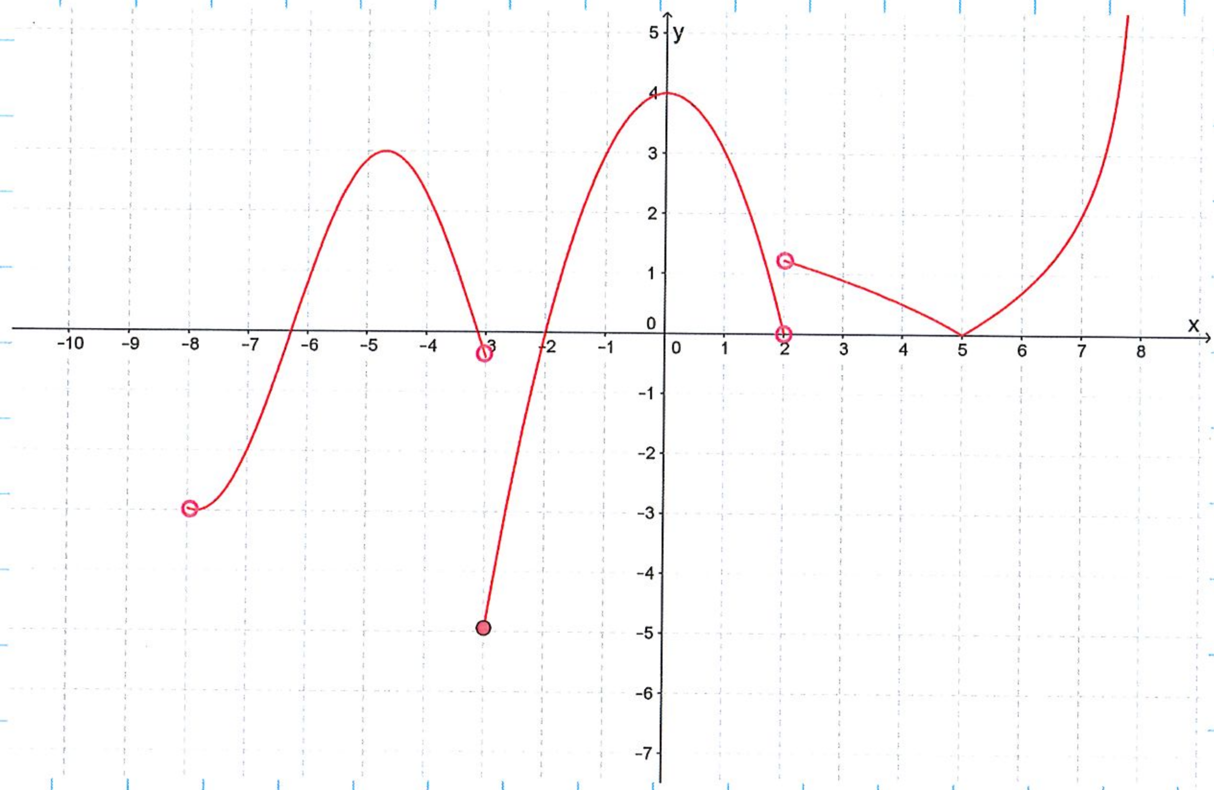
Rappels sur les fonctions : Solutions

1. Voici le graphe d'une fonction



(a) détermine le domaine de la fonction

dom f: $]-8, 2[\cup]2, 8[$

(b) détermine l'image de -7, de -3/2 et de 4

-2 / $\simeq -2$ / $\simeq \frac{1}{2}$

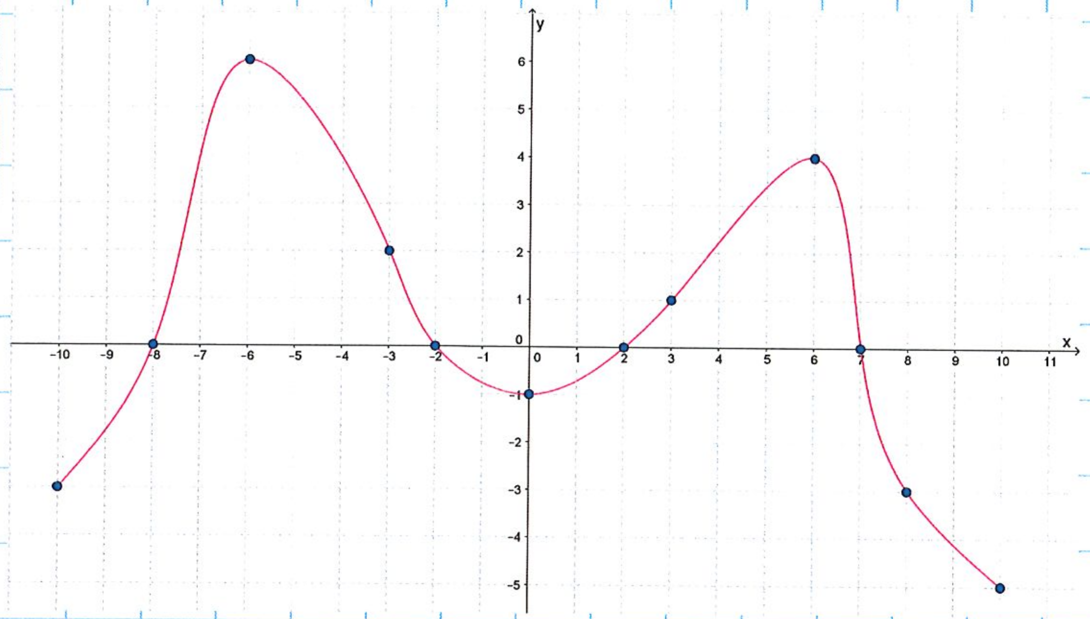
(c) détermine les zéros de la fonction

$\simeq -6,2$, $\simeq -3,2$, -2 , 5

(d) détermine le(s) réel(s) ayant 1 pour image par la fonction

$\simeq -6$, $\simeq -3,5$, $\simeq 1,8$, $\simeq 2,6$, $\simeq 6,3$

2. On donne les courbes suivantes, représentations graphiques de fonctions.
Courbe 1



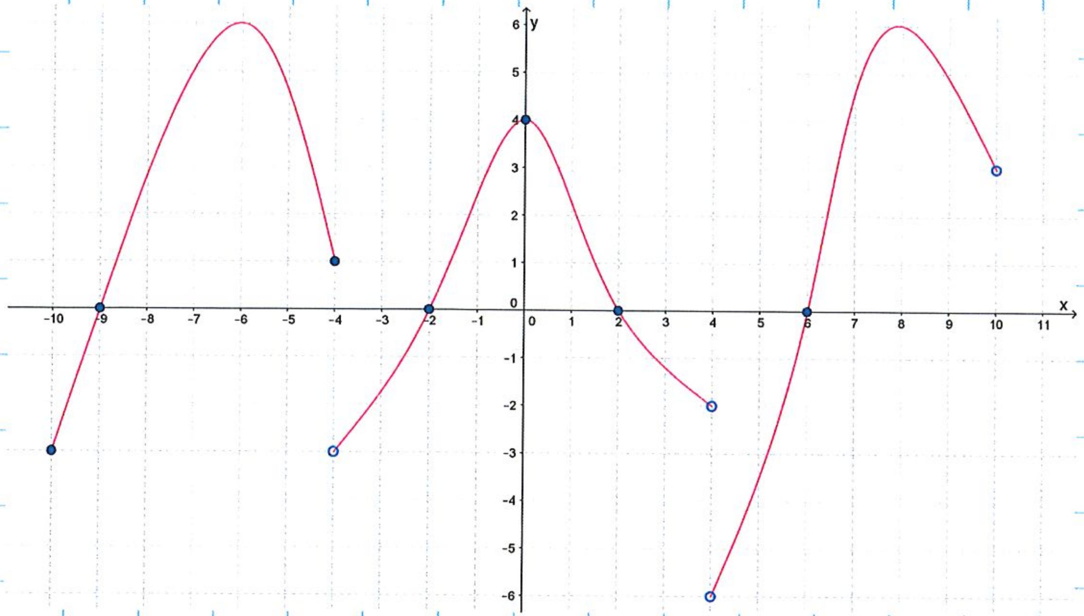
Pour chacune des deux courbes, répondre par vrai ou faux :

- la fonction est paire ; F
- la fonction est croissante sur $[0, 6]$ V
- la fonction est positive sur $[0, 2]$ F
- l'équation $f(x) = 0$ possède quatre solutions V
- la fonction présente un maximum en -6 V
- $f(3) > f(-1)$ V

Pour chacune des deux courbes, déterminer

- dom_f $[-10, 10]$
- im_f $[-5, 6]$
- $f(3)$ $= 1$
- les racines de f : $-8 ; -2 ; 2 ; 7$
- les solutions de l'équation $2f(x) + 6 = 0$ $-10 ; 8$

Courbe 2



Pour chacune des deux courbes, répondre par vrai ou faux :

- la fonction est paire ; F
- la fonction est croissante sur $[0,6]$ F
- la fonction est positive sur $[0,2]$ V
- l'équation $f(x)=0$ possède quatre solutions V
- la fonction présente un maximum en -6 V
- $f(3) > f(-1)$ F

Pour chacune des deux courbes, déterminer

- dom_f $[-10, 4[\cup]4, 10[$
- im_f $]-6, 6]$
- $f(3)$ $\simeq -1,2$
- les racines de f $-9 ; -2 ; 2 ; 6$
- les solutions de l'équation $2f(x)+6=0$ $-10 ; \simeq 5,2$

3. Déterminer parmi les réponses proposées celle qui est exacte et justifier complètement la réponse.

(a) Si $f(x) = x^2 - 2x$, alors $f(x^2)$ vaut

$x^4 + 2x^2$	$x^4 - 3x^3 + 4x^2$	0	$-x^2$	$x^4 - 2x^2$

$f(x^2) = (x^2)^2 - 2x^2 = x^4 - 2x^2$

(b) Si $f(x-2) = x^3 - 3x + 1$, alors $f(0)$ vaut

1	-1	3	-3	2

$f(0) = 2^3 - 3.2 + 1 = 3$

(c) Si $f(x-2) = x^3 - 3x + 1$, alors $f(x)$ vaut

$x^3 - 6x^2 + 9x - 1$	$x^3 - 3x + 3$	$x^3 - 3x - 1$
$x^3 + 6x^2 + 9x + 3$	$x^3 + 6x^2 + 9x + 15$	

$f(x) = (x+2)^3 - 3(x+2) + 1$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 3x - 6 + 1$

$= x^3 + 6x^2 + 9x + 3$

(d) Si $f(x) = \dfrac{4-x}{x+4}$, alors $f(-x)$ vaut

$\dfrac{1}{f(x)}$	$-f(x)$	$\dfrac{1}{f(-x)}$	$-f(-x)$	$f(x)$

$f(-x) = \dfrac{4+x}{-x+4} = \dfrac{1}{\dfrac{4-x}{x+4}} = \dfrac{1}{f}$

4. Trouver le domaine et le(s) zéro(s) des fonctions suivantes[1] :

(a) (*) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

dom$_f$: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

zéro —

(b) (*) $f(x) = \sqrt{x+3}$

dom$_f$: $[-3, +\infty$

zéro : $x = -3$

1. Les exercices (*) doivent être fait, les autres servent d'exercices supplémentaires

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-4}{x+2}}$

dom f : CE $\dfrac{x-4}{x+2} \geq 0$

x		-2		4	
N	$-$		$-$	0	$+$
D	$-$	0	$+$		$+$
CE	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

dom f : $-\infty, -2 [\cup [4, +\infty$

zéros : $x = 4$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

dom f : CE : $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$\Delta = 1 \qquad x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \left< \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right.$

dom f : $-\infty, 2] \cup [3, +\infty$ (T.S.)

zéros : $x = 2$ et $x = 3$

(e) (*) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{\sqrt{x^2 + 5x}}$

dom_f : c.e.: $x^2 + 5x > 0$

dom_f : $-\infty, -5 [\cup] 0, +\infty$ (T.S.)

zeros : $x = \pm \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(f) (*) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{15x - 3x^3}}$

dom f : CE : $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{15x - 3x^3} \geq 0$

zéros N : $x = 2$ et $x = 3$

D : $x = 0$, $x = \pm\sqrt{5}$ $\left(3x(5-x^2)\right)$

x		$-\sqrt{5}$		0		2		$\sqrt{5}$		3	
N	+		+		+	0	−		−	0	+
$3x$	−		−	0	+		+		+		+
$5-x^2$	−	0	+		+		+	0	−		−
CE	+	∄	−	∄	+	0	−	∄	+	0	−

dom f : $-\infty, -\sqrt{5}\,[\cup]0, 2] \cup]\sqrt{5}, 3]$

zéros : $x = 2$, $x = 3$

(g) $f(x) = \sqrt{5 - 3|x|}$

dom f : CE : $5 - 3|x| \geq 0$

si $x > 0$: $5 - 3x \geq 0 \iff x \leq \frac{5}{3}$

si $x < 0$: $5 + 3x \geq 0 \iff x \geq -\frac{5}{3}$

dom f : $\left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$

zéros : $\pm \frac{5}{3}$

(h) (*) $f(x) = \dfrac{1}{|2x+1| - |3-5x|}$

dom f : CE : $|2x+1| - |3-5x| \neq 0$

	$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	
$\lvert 2x+1 \rvert$	$-2x-1$	$2x+1$		$2x+1$
$\lvert 3-5x \rvert$	$3-5x$	$3-5x$		$5x-3$
	$3x-4 \neq 0$	$7x-2 \neq 0$		$-3x+4 \neq 0$
	$x \neq \frac{4}{3}$ AR	$x \neq \frac{2}{7}$ (ok)		$x \neq \frac{4}{3}$ ok

dom f : $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{7}, \frac{4}{3} \right\}$

zéros /

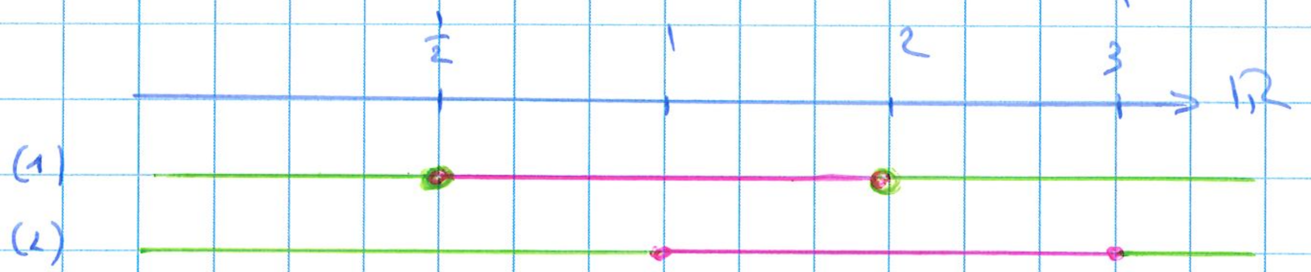
(i) (*) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

dom : CE (1) $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$

(2) $x^2 - 4x + 3 > 0$

(1): $\Delta = 25 - 16 = 9 \qquad x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{4} < \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$ (T.S.)

(2) $\Delta = 16 - 12 = 4 \qquad x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} < \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$ (T.S.)



dom f : $-\infty, \frac{1}{2}\,] \cup\,]\,3, +\infty$

zéro : $x = \frac{1}{2}$

(j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 6}}$

dom f : $\underline{CE}$: $x^3 - 4x^2 + x + 6 > 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$\Leftrightarrow \quad (x+1)(x^2 - 5x + 6) > 0$

x		-1		2		3	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-5x+6	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
CE	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

dom f : $]-1, 2[\cup]3, +\infty[$

zéros : /

(k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^3 - 5x^2 - 4x + 4}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2}}$

CE : (1) $3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$

(2) $2x + 3 \geq 0 \iff x \geq -\frac{3}{2}$

(3) $x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2$

(4) $\sqrt{2x+3} \neq \sqrt{x+2} \iff 2x+3 \neq x+2 \iff x \neq -1$

(1)

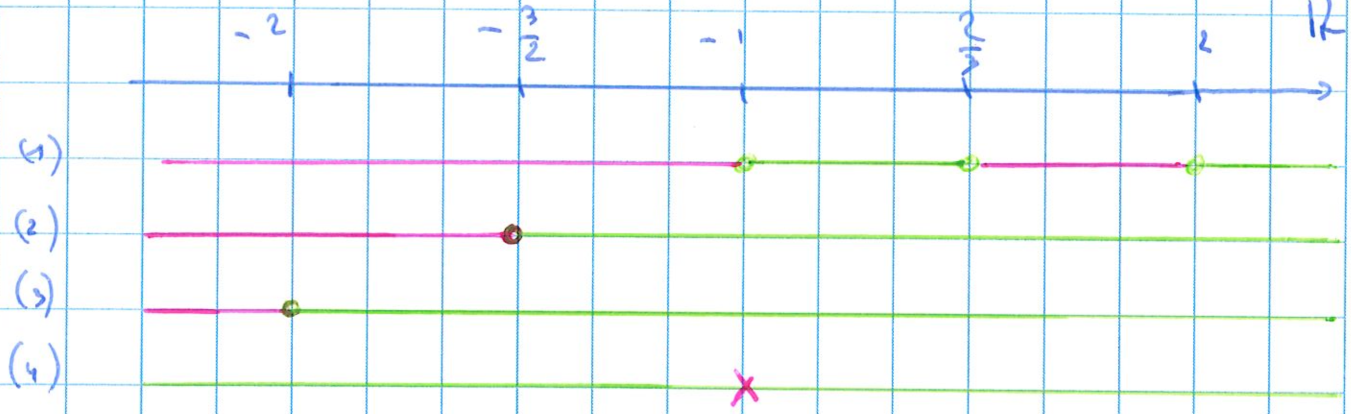
	3	-5	-4	4
2		6	2	-4
	3	1	-2	0

$\iff (x-2)(3x^2 + x - 2) \geq 0$

$\hookrightarrow \Delta = 1 + 24$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{6} \left< \begin{matrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{matrix} \right.$

x		-1		$\frac{2}{3}$		2	
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$3x^2+x-2$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
CE_1	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



dom f : $]-1, \frac{2}{3}] \cup [2, +\infty[$

zéro : $x = \frac{2}{3}$, $x = 2$

5. Pour les fonctions suivantes, détermine l'image de 0, de -1 et de 4 ; détermine ensuite le(s) réel(s) ayant -1 pour image et ceux ayant 2 pour image.

$$f(x) = \frac{x(2x-1)}{x+2} \quad g(x) = \frac{10\sqrt{x-1}}{x+2}$$

$f(0) = 0$

$f(-1) = 3$

$f(4) = \frac{14}{3}$

$g(0)\ \nexists$

$g(-1)\ \nexists$

$g(4) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

$f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{x(2x-1)}{x+2} = -1$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x + x + 2 = 0$

imp

$g(x) = -1$

$\Leftrightarrow 10\sqrt{x-1} = -x-2$

CE : $x \leq -2$, $x \geq 1$

$\Leftrightarrow 100(x-1) = x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow x^2 - 96x + 104 = 0$ imp

$\Delta = 8800 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{96 \pm 20\sqrt{22}}{2}$

$= 48 \pm 10\sqrt{22}$

$\rightarrow$ A.R.

$f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = 9 + 32 = 41$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$

$g(x) = 2$

$\Leftrightarrow 10\sqrt{x-1} = 2x+4$

CE $x \geq -2$

$\Leftrightarrow 100x - 100 = 4x^2 + 16x + 16$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 84x + 116 = 0$

$\Delta = 5200$

$x_{1,2} = \frac{84 \pm 20\sqrt{13}}{8}$

$= \frac{21 \pm 5\sqrt{13}}{2}$ OK

6. Dans le cas des fonctions suivantes et de leur graphe

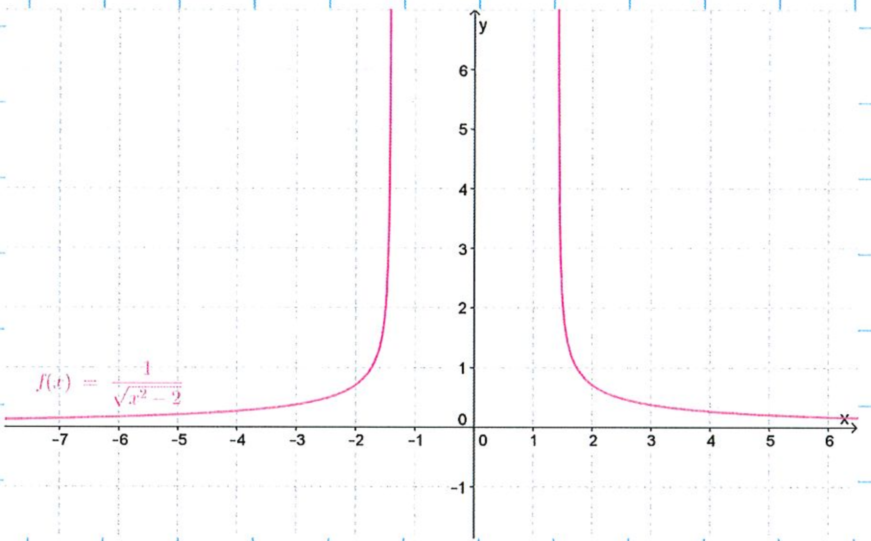
   (a) Déterminer graphiquement le domaine de définition de cette fonction et le vérifier algébriquement.

   (b) Déterminer graphiquement les zéros de cette fonction et le vérifier algébriquement.

   (c) Etudier algébriquement le signe de la fonction et vérifier le résultat graphiquement.

   (d) Déterminer si la fonction est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}}$



i. Domaine :
   - Graphiquement : $-\infty;-1{,}5[\cup]1{,}5;+\infty$
   - Algébriquement : CE : $x^2-2>0 \Leftrightarrow x\in -\infty;-\sqrt{2}\big[\cup\big]\sqrt{2};+\infty$ (tableau de signe)

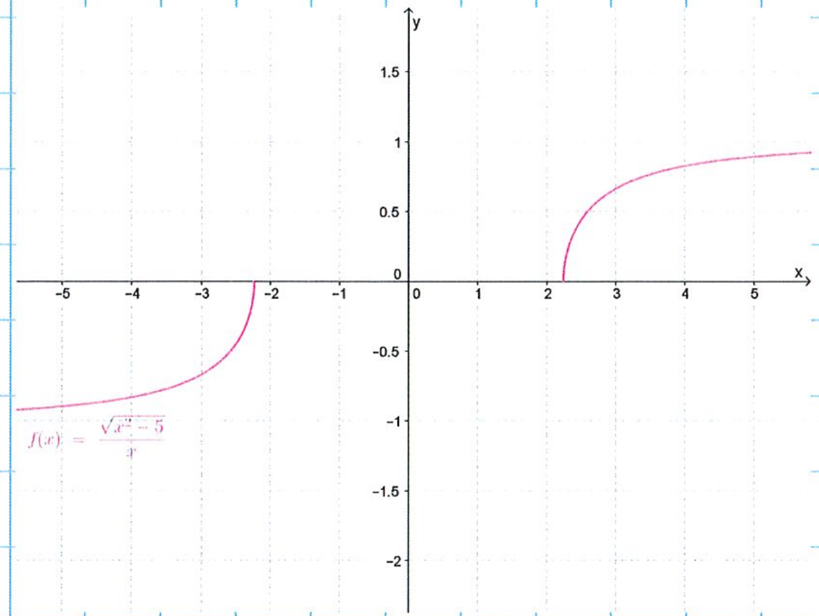
ii. Zéro(s) :
   - Graphiquement : pas d'intersection avec l'axe Ox donc pas de zéros
   - Algébriquement : $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}}=0 \Leftrightarrow 1=0$ ce qui est impossible donc pas de zéro.

iii. Intersection avec Oy :
   - Graphiquement : pas d'intersection avec l'axe Oy
   - Algébriquement : $0\notin \mathrm{dom}f \Rightarrow f(0)\nexists$ donc il n'y pas d'intersection avec l'axe Oy

iv. Signe :
   - Graphiquement : Le graphe de la fonction est toujours située au dessus de l'axe Ox, elle est donc toujours positive.
   - Algébriquement : Une racine carrée étant toujours positive, la fonction est toujours positive

v. Parité :
   - Graphiquement : Le graphe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe Oy, elle est donc paire
   - Algébriquement : $f(-x)=\dfrac{1}{\sqrt{(-x)^2-2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}}=f(x)$, la fonction est donc paire.

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x}$



i. Domaine :
- Graphiquement : $-\infty; -2,2[\cup]2,2; +\infty$
- Algébriquement :

  CE1 : $x^2 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in -\infty; -\sqrt{5}\Big] \cup \Big[\sqrt{5}; +\infty$ (tableau de signe)

  CE2 : $x \neq 0$, ce qui est toujours vérifier vu la CE1.

ii. Zéro(s) :
- Graphiquement : Le graphe de la fonction coupe l'axe Ox en $x = \pm 2,2$. Ce sont les zéros de la fonction.
- Algébriquement : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-5} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

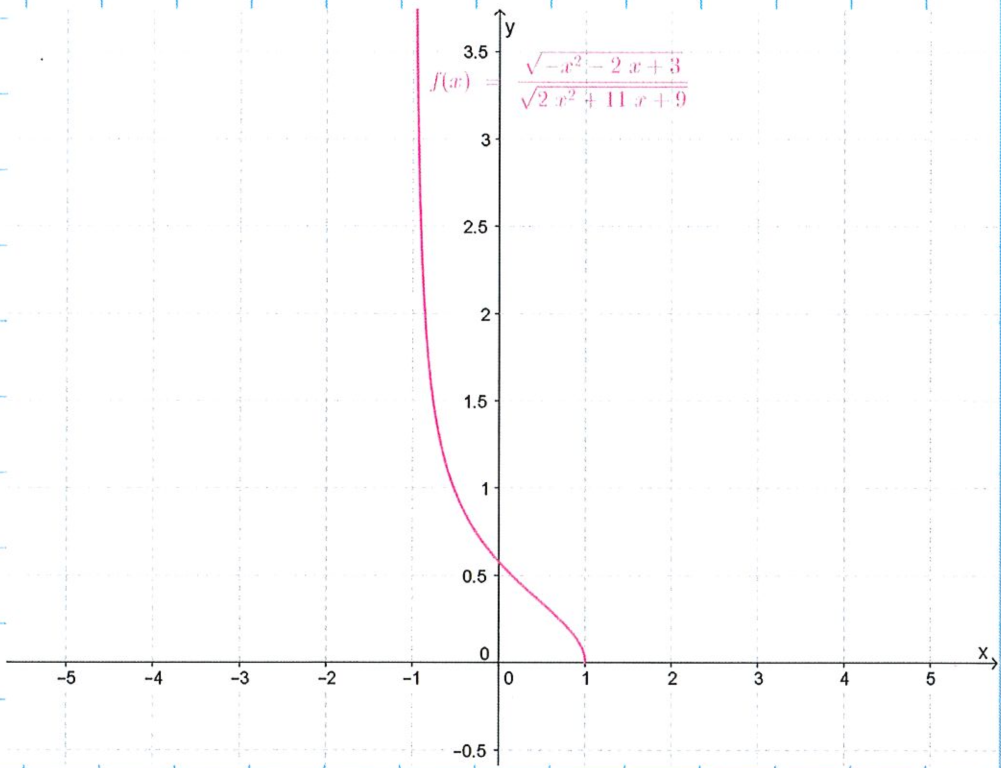
iii. Intersection avec Oy :
- Graphiquement : pas d'intersection avec l'axe Oy
- Algébriquement : $0 \notin \mathrm{dom} f \Rightarrow f(0) \nexists$ donc il n'y pas d'intersection avec l'axe Oy

iv. Signe :
- Graphiquement : La fonction est négative pour $x < 0$ et positive pour $x > 0$.
- Algébriquement :

x		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\sqrt{x^2-5}$	$+$	0	/	/	/	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	/	/	/	0	$+$

v. Parité :
- Graphiquement : Le graphe de la fonction est symétrique par rapport à l'origine, la fonction est donc impaire.
- Algébriquement : $f(-x) = \dfrac{\sqrt{(-x)^2-5}}{-x} = -\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x} = -f(x)$, la fonction est impaire.

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2-2x+3}}{\sqrt{2x^2+11x+9}}$



i. Domaine :
   - Graphiquement : $]-1,1]$
   - Algébriquement :
     CE1 :$-x^2-2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3,1]$
     CE2 : $2x^2+11x+9 > 0 \Leftrightarrow x \in -\infty, -\frac{9}{2}\left[\cup\right]-1,+\infty$
     En réunissant des deux CE sur la droite des réels, on obtient $x \in]-1,1]$

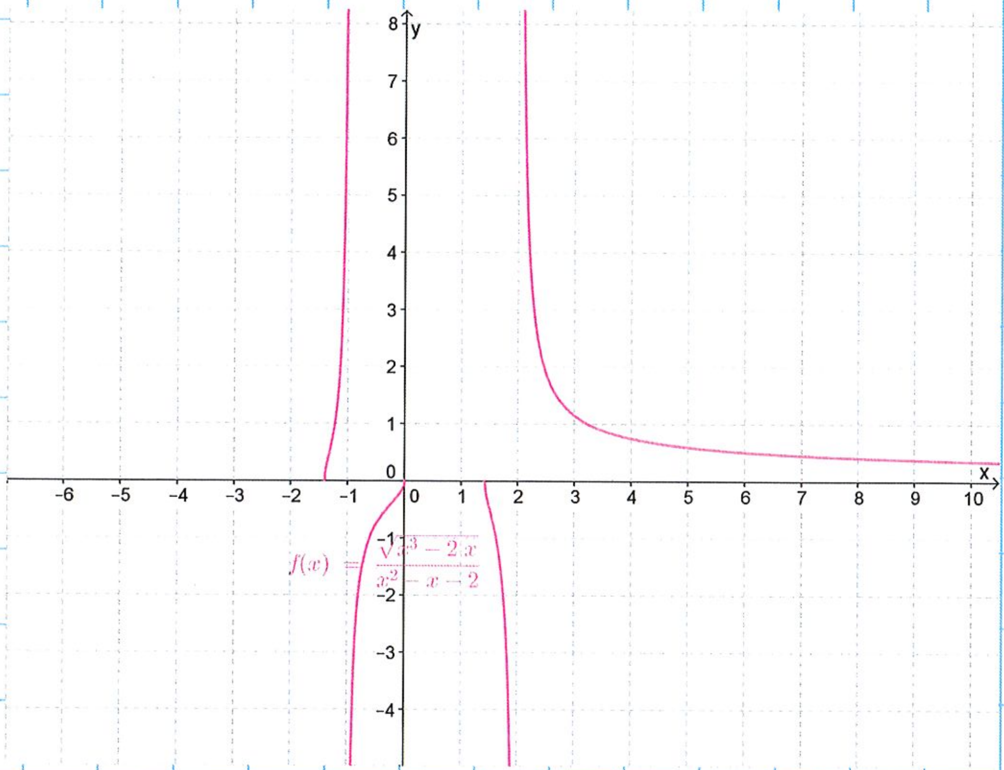
ii. Zéro(s) :
   - Graphiquement : $x = 1$
   - Algébriquement :$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2-2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ou} x = 1$. La valeur $x = -3$ est à rejeter car hors du domaine de définition.

iii. Intersection avec Oy :
   - Graphiquement : $x \approx 0.6$
   - Algébriquement : $f(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.57$

iv. Signe :
   - Graphiquement : La fonction est toujours positive.
   - Algébriquement : Vu la présence des racines carrées, $f(x) \geq 0$

v. Parité :
   - Graphiquement : Pas de symétrie dans le graphique, la fonction n'est ni paire ni impaire.
   - Algébriquement : En calculant $f(-x)$, on n'obtient ni $f(x)$ ni $-f(x)$, la fonction n'est ni paire ni impaire. On aurait pu également remarquer l'absence de symétrie dans le domaine et les zéros de la fonction , ce qui entraine d'office que la fonction n'est ni paire ni impaire.

(d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 - 2x}}{x^2 - x - 2}$



(a) Domaine :

- Graphiquement : $[-1,5;-1[\,\cup\,]-1;0]\cup[1,5;2[\,\cup\,]2,+\infty$
- Algébriquement :

  CE1 : $x^3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{2},0\right] \cup \left[\sqrt{2},+\infty\right.$

  CE2 : $x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ ou $x \neq 2$

  En prenant l'intersection des deux CE (droite des réels), on obtient :

  $\left[-\sqrt{2};-1\right[\,\cup\,]-1;0]\cup\left[-\sqrt{2};2\right[\,\cup\,]2,+\infty$

(b) Zéro(s) :

- Graphiquement : $x = 0$ ou $x = \pm 1,5$
- Algébriquement : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{2}$

(c) Intersection avec Oy :

- Graphiquement : L'intersection avec l'axe Oy a lieu en l'origine des axes.
- Algébriquement : $f(0) = 0$

(d) Signe :

- Graphiquement : La fonction est positive sur l'intervalle $\left[-\sqrt{2};-1\right[\cup]2,+\infty$ et négative sur l'intervalle $]-1;0]\cup\left[\sqrt{2};2\right[$
- Algébriquement :

x		$-\sqrt{2}$		-1		0		$\sqrt{2}$		2	
N	/	0	+		+	0	/	0	+		+
D	+		+	0	$-$		$-$		$-$	0	+
$f(x)$	/	0	+	$\pm\infty$	$-$	0	/	0	$-$	$\pm\infty$	+

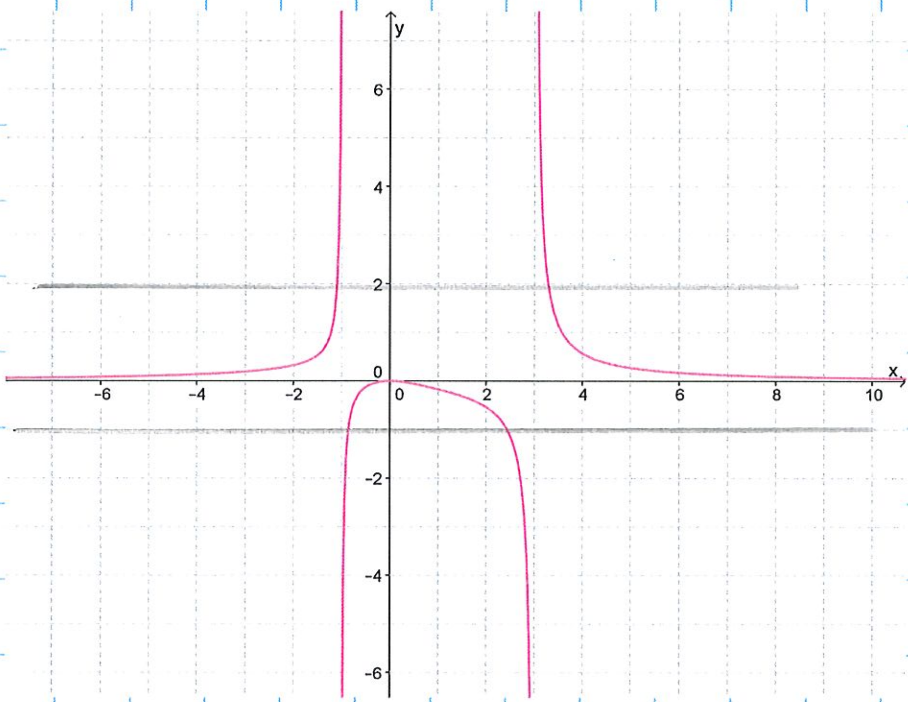
(e) Parité :

- Graphiquement : Aucune symétrie dans le graphe, la fonction n'est ni paire ni impaire.
- Algébriquement : Aucune symétrie dans le domaine ni les zéros, la fonction n'est ni paire ni impaire.

7. On donne le graphe des fonctions suivantes.

   On demande de résoudre graphiquement pour chacune des fonctions les équations et inéquation suivantes

   (a) $f(x) = 0$
   (b) $f(x) \leq 0$
   (c) $-1 \leq f(x) < 2$



a) $x = 0$

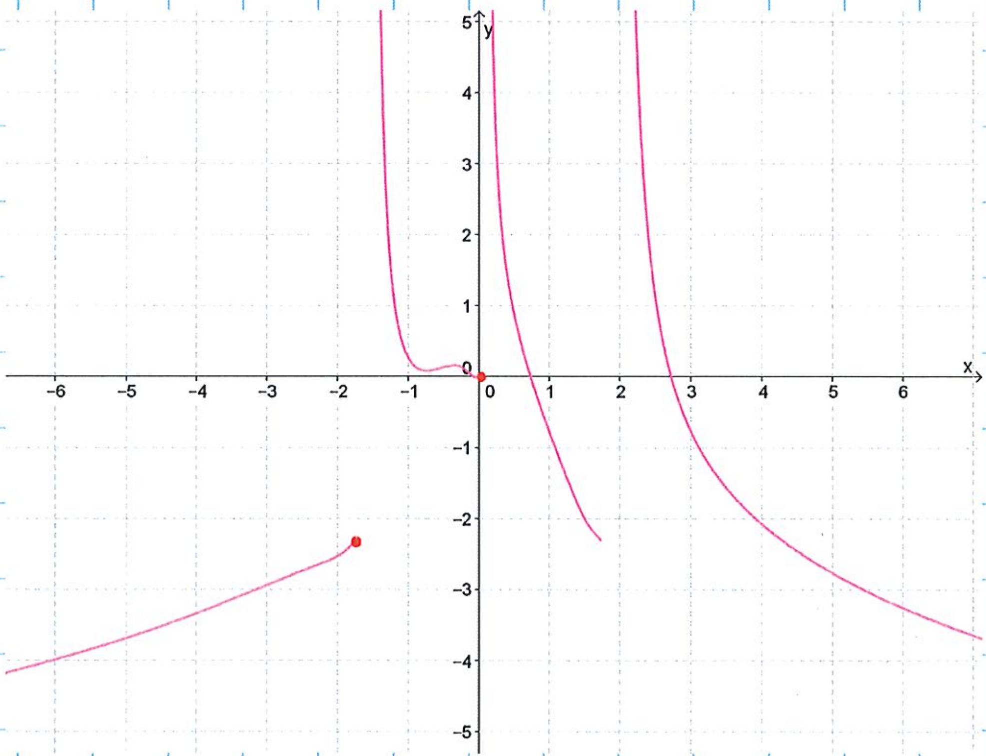
b) $]-1, 3[$

c) $\cancel{]-1,1 ; 1[\cup [-0,9 ; 2,8] \cup]3 ; 3,3[}$

$-\infty ; -1,1[\cup$

$[-0,9 ; 2,5] \cup$

$]3,1 ; +\infty$



a) $x = 0,$

$x \simeq 0,8,$

$x \simeq 2,8$

b) $-\infty, \cancel{-2,3}\ 1,8]$

$\cup [0,8 ; 1,6[$

$\cup [2,8 ; +\infty$

c) $]-1,4 ; 0]$

$\cup]0,4 ; 1,1]$

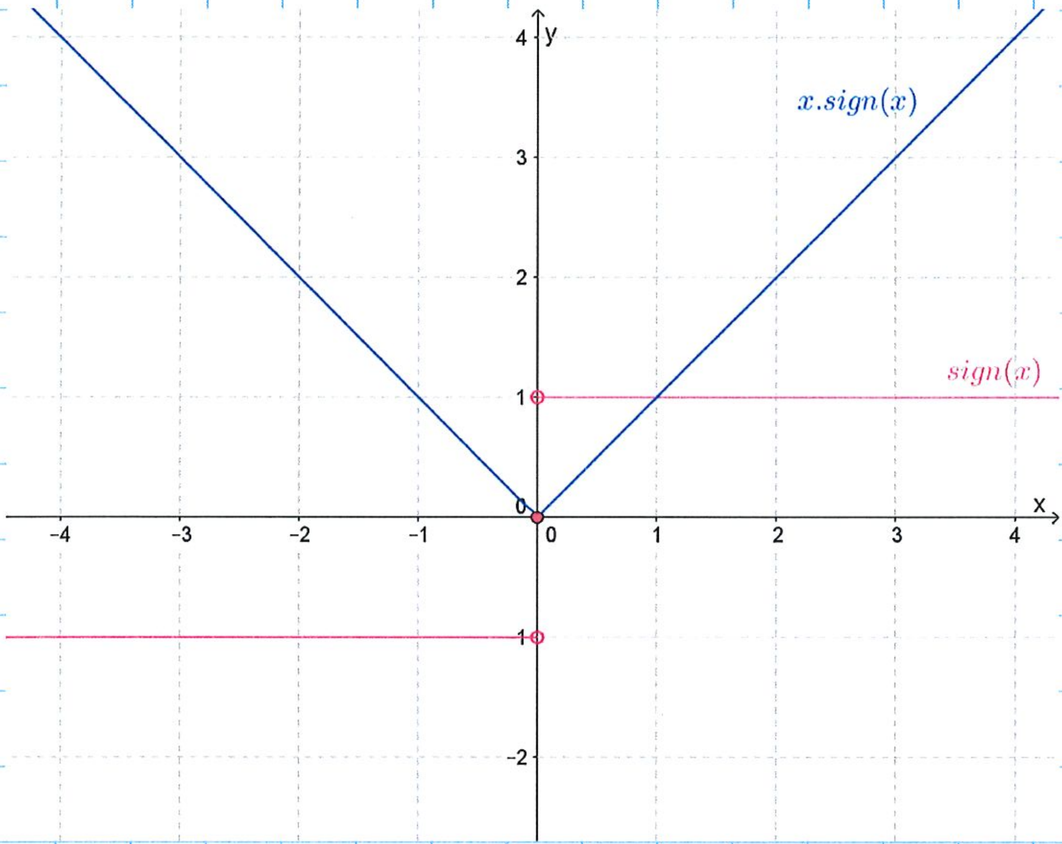
$\cup]2,5 ; 3,2]$

8. La fonction "*sign*" est définie par

$$sign(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Tracer le graphe de cette fonction

(b) Tracer le graphe de la fonction $h(x) = x.sign(x)$

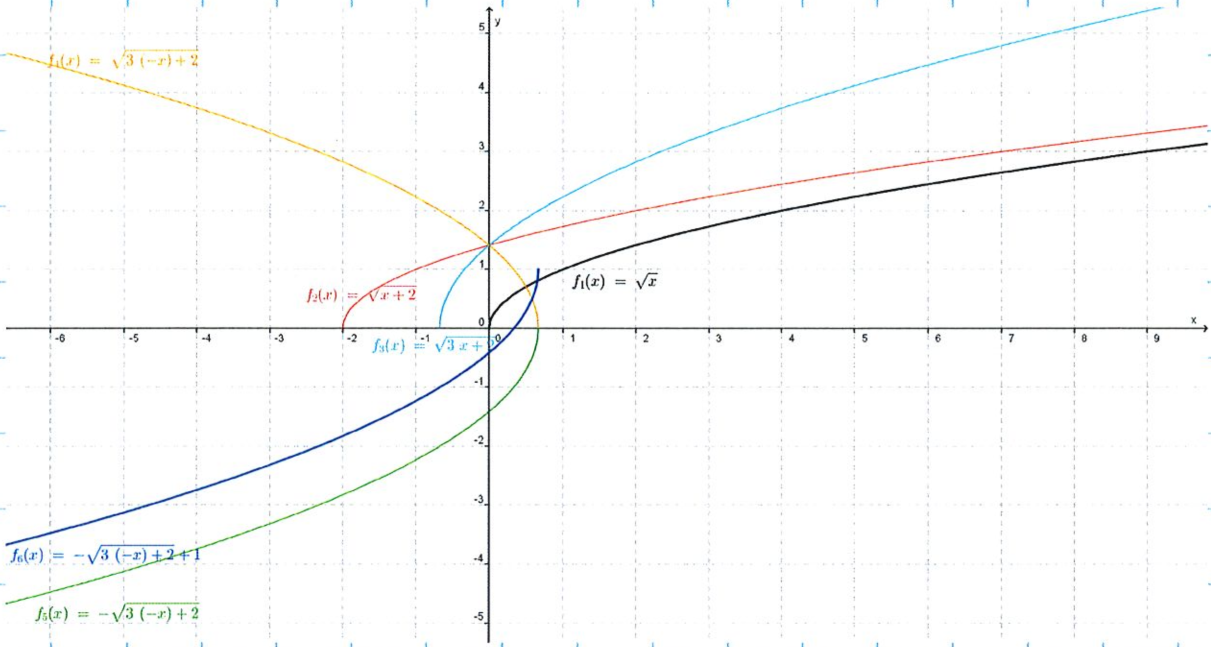


(c) A quelle fonction connue la fonction $h(x)$ est-elle égale ?

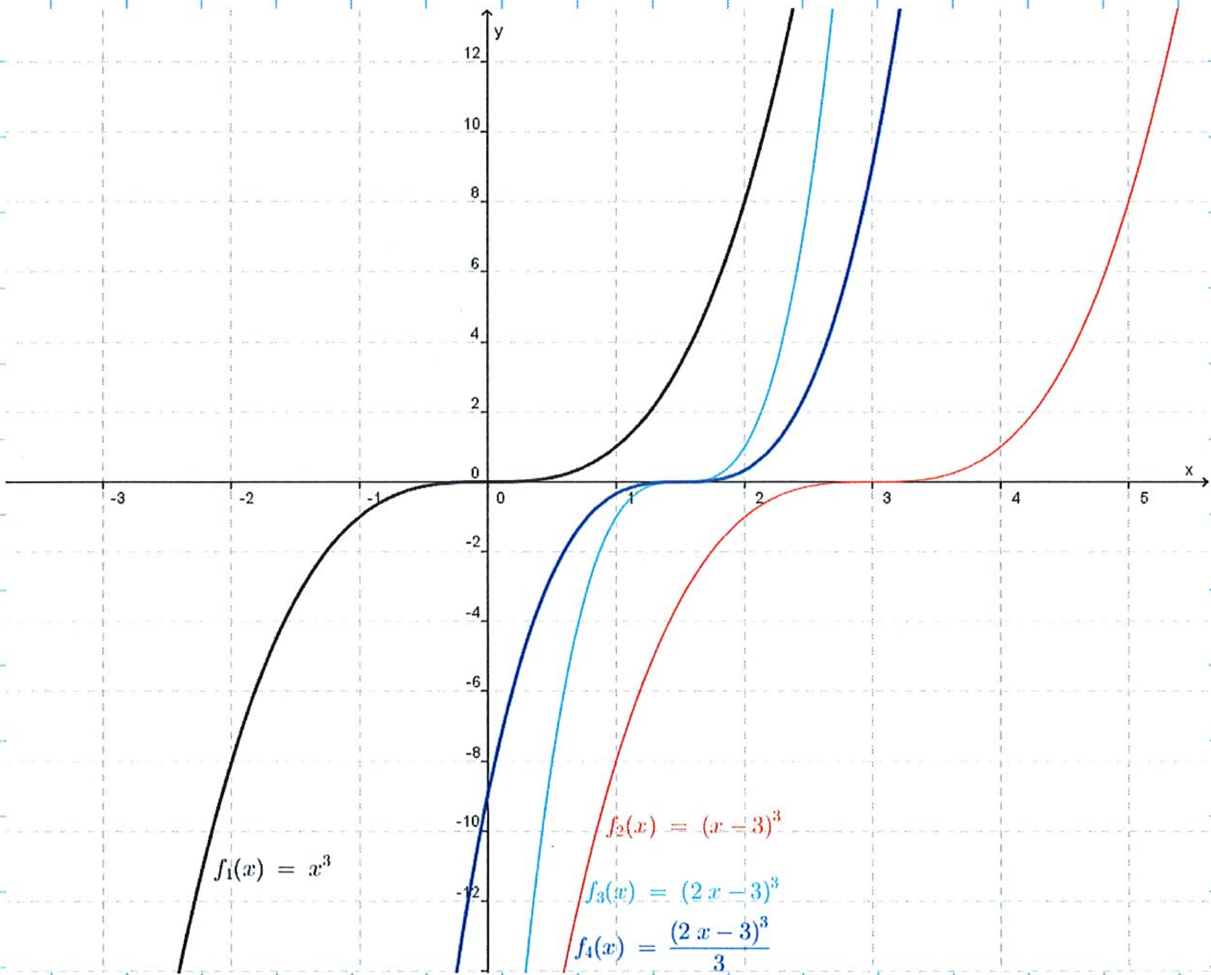
$f(x) = |x|$

9. Trace le graphe des fonctions suivantes

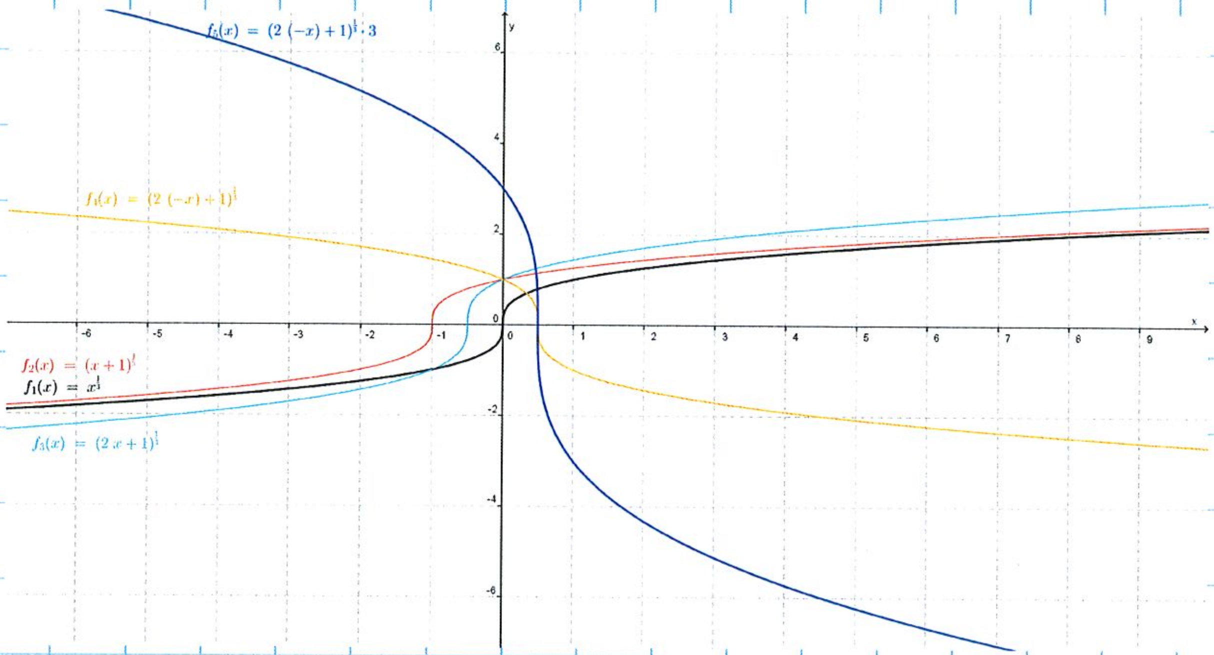
(a) $f(x) = 1 - \sqrt{2-3x}$



(b) $f(x) = \dfrac{(2x-3)^3}{3}$



(c) $f(x) = 3\sqrt[3]{1-2x}$



(d) $f(x) = \dfrac{2}{|x-1|} - 1$