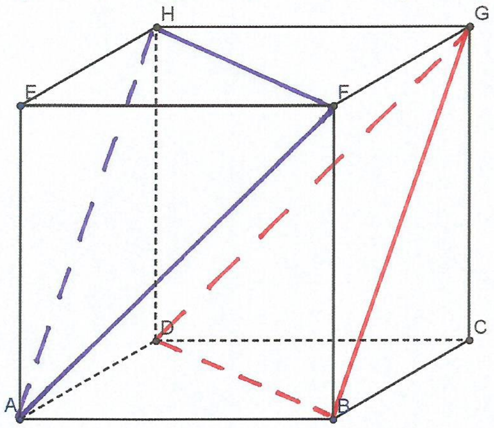
Parallélisme : Solutions

1. Dans un cube $ABCDEFGH$, démontrer que les plans AHF et GBD sont parallèles.



(H) AB...GH = cube

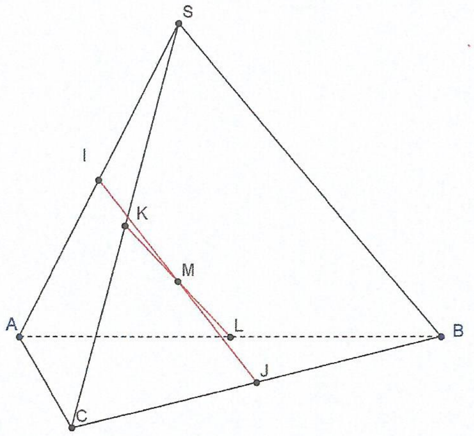
(T) $AHF \,//\, GBD$

(D) Dans AHF $\begin{cases} AH \,//\, GB \\ HF \,//\, BD \end{cases}$

→ $AHF \,//\, GBD$ (critère de //isme plan-plan)

CQFD

2. Démontrer que les segments joignant les milieux de deux arêtes gauches d'un tétraèdre se coupent en leur milieu



(H) SABC = tétraèdre
I milieu de [SA]
J " " [CB]
K " " [SC]
L " " [AB]

(T) IJKL parallélogramme

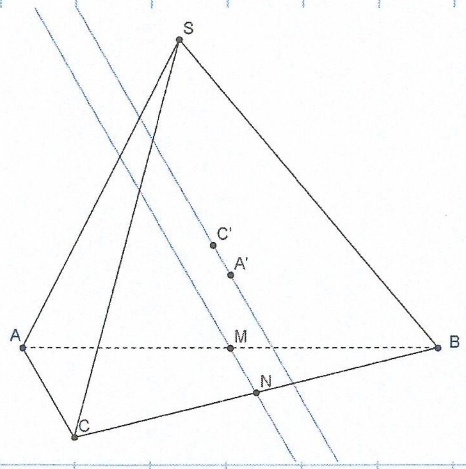
(D) Dans SAC, IK // AC (Thalès)
Dans ABC, LJ // AC (Thalès)

⇒ IK // LJ (axiome 2)
et IK et LJ coplanaires (déf //)

De m̂ IL // KJ (m̂ justifications)

⇒ IJKL est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en leurs milieux.

3. Dans le tétraèdre $SABC$ on désigne par C' le centre de gravité de la face SAB et par A' le centre de gravité de la face SBC. Démontrer que $A'C'$ est parallèle à AC



(H) $SABC$ tétraèdre

C' : centre de gravité de SAB

A' : " " " " SBC

(T) $A'C' \parallel AC$

(D) A' et C' sont des centres de gravité (= $\cap$ de médianes)

Soient M et N les milieux de $[AB]$ et $[BC]$

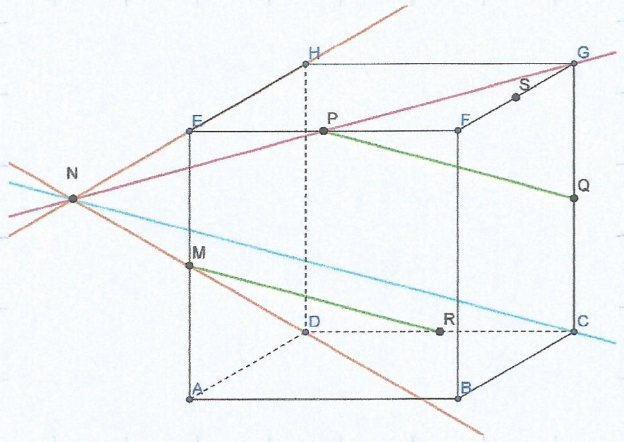
Dans SMN : $A'C' \parallel MN$ (Thalès car les centres de gravité sont au $\frac{2}{3}$ de la longueur de la médiane /. aux sommets)

Dans BAC : $AC \parallel MN$ (Thalès)

$\Rightarrow$ $A'C' \parallel AC$ (axiome 2)

4. Dans un cube $ABCDEFGH$, les points M, P, Q, R et S sont les milieux des arêtes $[AE]$, $[EF]$, $[GC]$, $[DC]$ et $[GF]$. N est l'intersection de HE et DM.

(a) Démontrer que PQ et MR sont parallèles



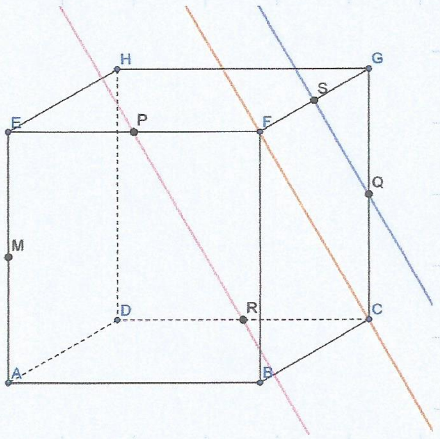
Dans Δ GNC : $\frac{GP}{GN} = \frac{GD}{GC} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ PQ // NC (Thalès)

Dans Δ DNC $\frac{DR}{DC} = \frac{DM}{DN} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ MR // NC $\Rightarrow$ PQ // MR (ariome 2)

(b) Démontrer que QS et PR sont parallèles.



Dans EGC : QS//FC (Thalès)

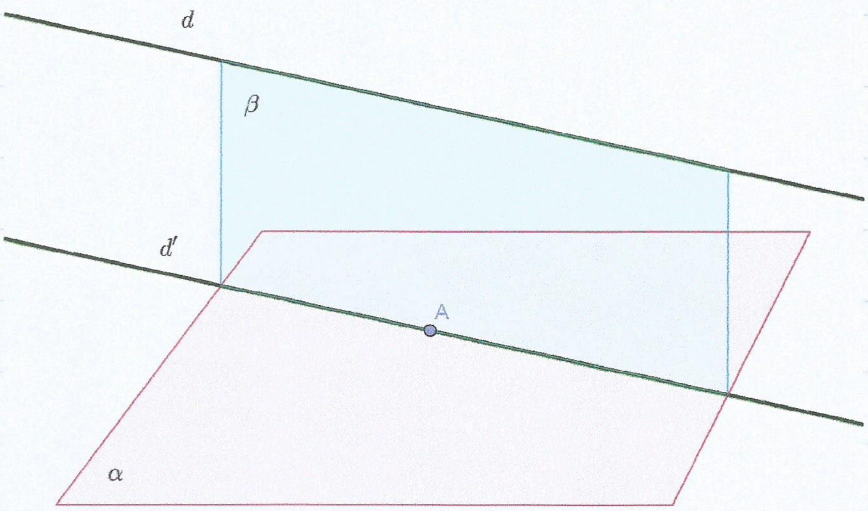
PR // FC (par contruction)

$\Rightarrow$ QS // PR (ariome 2)

(c) La propriété 4a reste-t-elle vraie si les points M, P, Q, R sont au tiers de $[AE]$, $[EF]$, $[CG]$ et $[CD]$ à partir de C et E ?

Oui car les démonstrations sont basées sur Thalé

5. Démontrer que toute droite extérieure à un plan est parallèle à ce plan.



(H) $d \cap \alpha = \emptyset$

(T) $d \parallel \alpha$

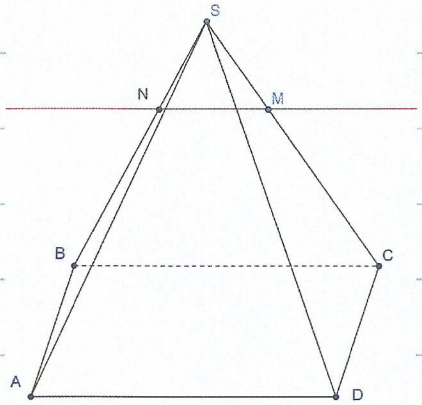
(D) Soit $A \in \alpha$ et soit $\beta = (d, A)$

$\alpha \cap \beta = d'$ (car $A \in \alpha$ et β)

d et d' coplanaires (car d et $d' \in \beta$)
et $d \parallel d'$ (car sinon d aurait une intersection avec α)

$\Rightarrow d \parallel \alpha$ (critère de $\parallel^{\text{isme}}$ dte/plan)

6. $SABCD$ est une pyramide de sommet S, la base est un parallélogramme. M est un point de l'arête $[SC]$ et N un point de $[SB]$. $[MN]$ est parallèle à $[BC]$.



(a) Faire un schéma de la situation ;

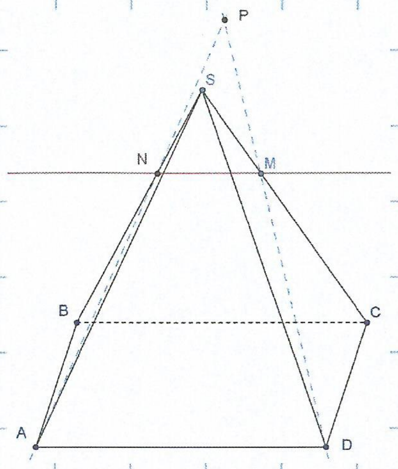
(b) Démontrer que AD et MN sont parallèles.

$MN \parallel BC$ (construction)

$AD \parallel BC$ (base carrée)

$\Rightarrow MN \parallel AD$ (axiome 2)

(c) Dans le plan $ADMN$, les droites AN et DM se coupent en P.



i. Démontrer que P appartient à SAB et SDC

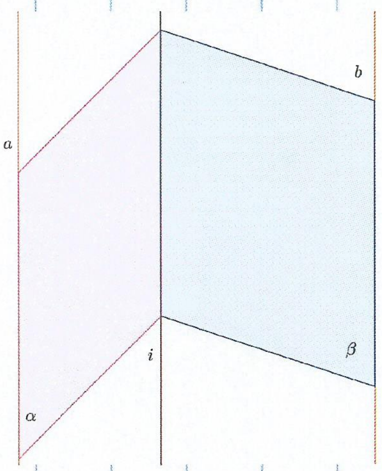
$\left.\begin{array}{l} P \in AN \\ AN \in SAB \end{array}\right\} P \in SAB$, idem pour SDC

ii. Déterminer la droite d'intersection de SAB et SDC

P et S $\in$ tous les deux à SAB et SDC

$\Rightarrow$ la droite PS est la droite d'intersection

iii. Démontrer que SP est parallèle à AB et à CD



C'est le théorème du toit :
« Si deux droites sont //, tout plan contenant respectivement une de ces droites se coupent selon une dte // aux deux autres droites »

(H) $a \parallel b$; $a \subset \alpha$; $b \subset \beta$
$\alpha \cap \beta = i$

(T) $a \parallel i$
$b \parallel i$

(D) $a \parallel b \Rightarrow a \parallel \beta$ (critère de $\parallel^{ire}$ dte/pl)

On $\alpha \cap \beta = i \Rightarrow a$ et i sont coplanaires

$\Rightarrow$ Soit $a \parallel i$, soit $a \nparallel i$ ce qui est impossible vu que $a \parallel \beta$

$\Rightarrow a \parallel i$ et donc $b \parallel i$ (exercice 2)