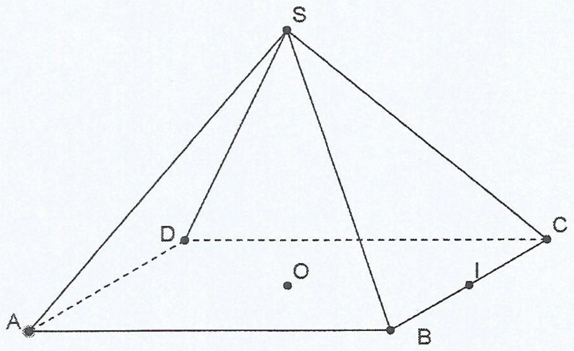
Orthogonalité : Solutions

1. $SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$; O est le centre de $ABCD$ et I le milieu de $[BC]$.



(a) Démontrer que SO est orthogonale à BC

$SO \perp ABC$ (car pyramide régulière)

$\rightarrow SO \perp_o BC$ (conséquence du critère)

CC

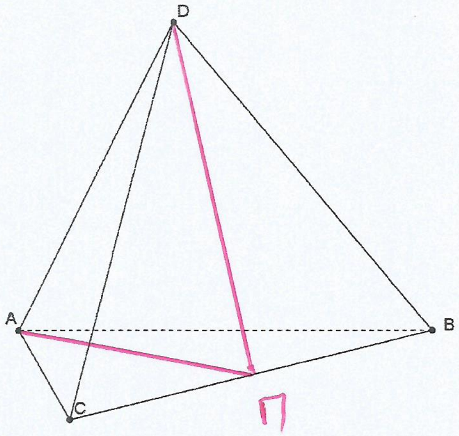
(b) En déduire que CB est perpendiculaire au plan SOI

$CB \perp OI$ (O et I sont des milieux)

$CB \perp_o SO$ (a)

$\Rightarrow CB \perp SOI$ (critère)

2. Démontrer que les arêtes gauches d'un tétraèdre régulier sont orthogonales.



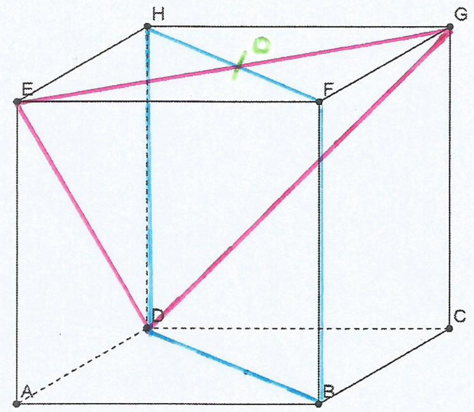
Tétraèdre régulier $\Rightarrow$ face = Δ équilat.

Soit M le milieu de BC $\Rightarrow$ AM et MD sont des médiatrices

$$\Rightarrow \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp DM \end{cases} \Leftrightarrow BC \perp AMD \text{ (critère)}$$

$$\Leftrightarrow BC \underset{o}{\perp} AD \text{ (cc)}$$

3. $ABCDEFGH$ est un cube de 4cm de côté ; O est le centre de $EFGH$



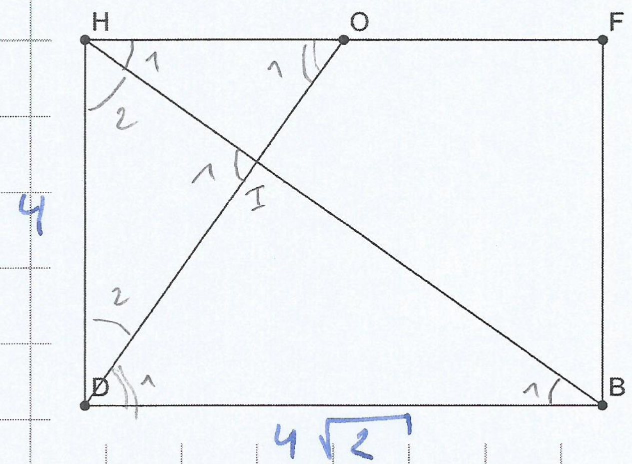
(a) Démontrer que OD est l'intersection de EDG et HDB ;

D est un pt commun aux deux plans

$\{O\} = HF \cap EG \rightarrow O \in$ aux deux plans

$\Rightarrow$ DO est la droite d'intersection des deux plans

(b) Dessiner en vraie grandeur le rectangle $HFBD$, placer O et prouver que HB est perpendicualire à OD ;



$HB = 4\sqrt{3}$

$OD = 2\sqrt{6}$

$\cos \hat{O}_1 = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin \hat{O}_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos \hat{B}_1 = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \rightarrow \sin \hat{B}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \cos(\hat{O}_1 + \hat{B}_1) = 0 \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{B}_1 = 90° \Rightarrow OD \perp HB$

(c) Démontrer que HD est orthogonale à EG ;

HD ⊥ EFG (car cube)

⇒ HD $\underset{o}{\perp}$ EG (cc)

(d) En déduire que EG est perpendiculaire à $HFBD$ et orthogonale à HB.

EG ⊥ HD (par (c))

EG ⊥ HF (diagonale de carré)

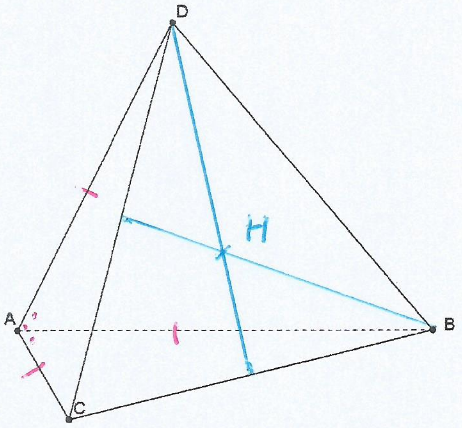
⇒ EG ⊥ HFBD (critère)

⇒ EG $\underset{o}{\perp}$ HB (cc)

(e) Démontrer que HB est perpendiculaire à DEG.

$\left.\begin{array}{l}\text{HB} \underset{o}{\perp} \text{EG (d)} \\ \text{HB} \perp \text{ED (b)}\end{array}\right\}$ HB ⊥ DEG (critère)

4. $ABCD$ est un tétraèdre dont les faces BAC, CAD et DAB sont des triangles rectangles isocèles en A. On note H l'orthocentre du triangle BCD.



(a) Quelles est la nature du triangle BCD ?

Les trois côtés sont des hypoténuses de Δ rectangles isocèles. Elles sont identiques $\Rightarrow$ BCD est équilatéral

(b) Montrer que DA et BC sont orthogonales ;

$DA \perp AC$
$DA \perp AB$ $\Big\}$ $\Rightarrow DA \perp ABC$ (critère)

$\Rightarrow DA \underset{o}{\perp} BC$ (CC)

(c) Montrer que BC est perpendiculaire à DAH et donc orthogonale à AH

$BC \perp DH$ (car BCD équilatéral)
$BC \underset{o}{\perp} DA$ (b)

$\Rightarrow BC \perp DAH$ (critère)
$\Rightarrow BC \underset{o}{\perp} AH$ (CC)