Opérations sur les fonctions : Solutions

1. Les fonctions suivantes sont-elles égales ? Si non, déterminer la restriction du domaine de définition sur laquelle elles le sont.

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$ et $g(x) = x - 4$

   dom f : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dom g : $\mathbb{R}$

   $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)}$

   $= (x-4)$

   $\Rightarrow f(x) \neq g(x)$ restriction : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

   (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{x}$

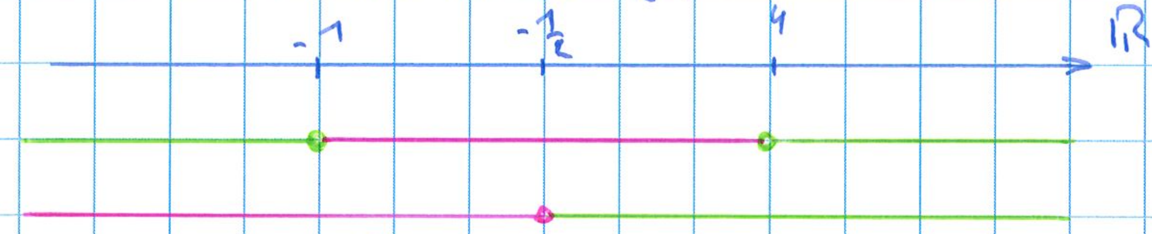
   dom f : $\mathbb{R}_0^+$ dom g : $\mathbb{R}_0^+$

   $f = g$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{\sqrt{2x+1}}$ et $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-3x-4}{2x+1}}$

dom f : CE : $x^2-3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) \geq 0$ (1)

$2x+1 > 0$ (2)



$\Rightarrow$ dom f : $[4, +\infty$

dom g : CE : $\dfrac{x^2-3x-4}{2x+1} \geq 0$ $\quad (2x+1 \neq 0)$

x		-1		$-\frac{1}{2}$		4	
N	+	0	−		−	0	+
D	−		−	0	+		+
CE	−	0	+	$\nexists$	−	0	+

dom g : $[-1, -\frac{1}{2}[\cup [4, +\infty$

$\Rightarrow f \neq g$ restriction : $[4, +\infty$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2x + |x|}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

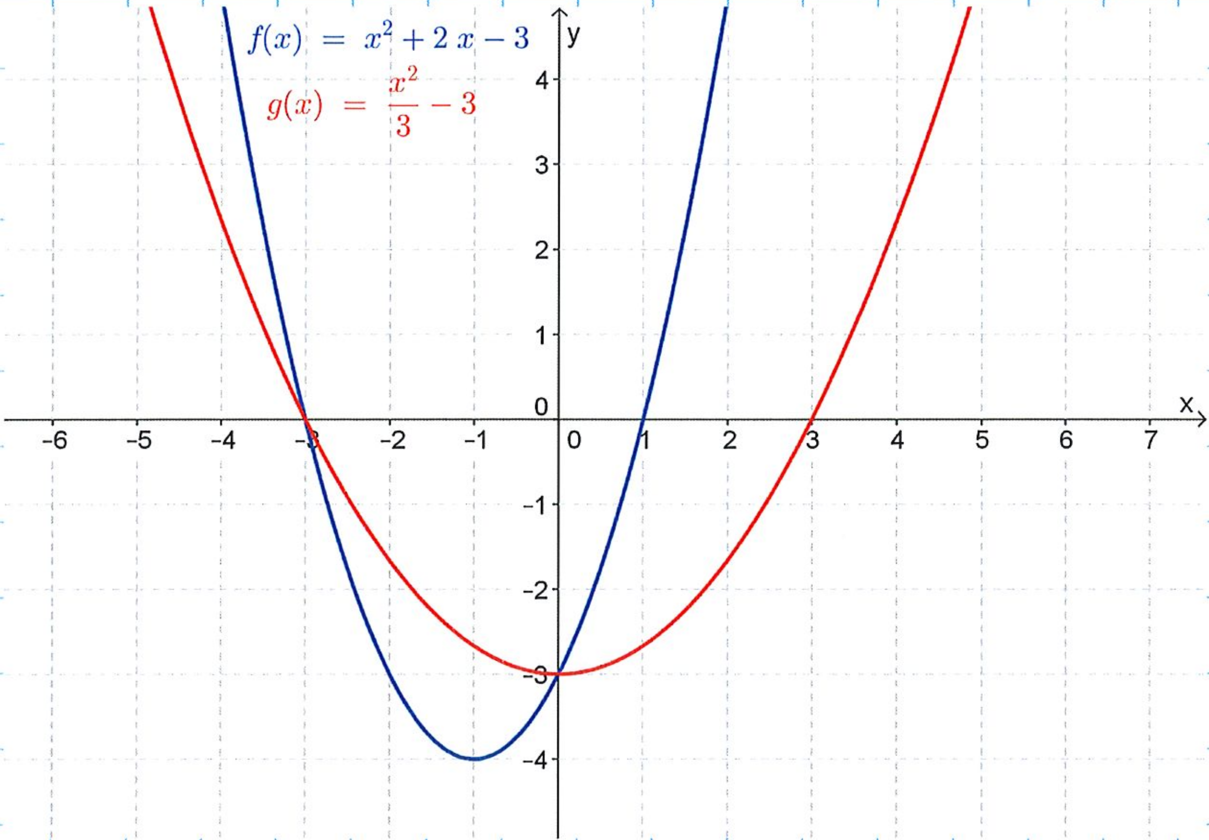
dom f : $\mathbb{R}_0$ dom g : $\mathbb{R}_0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f \neq g$ restriction : $\mathbb{R}_0^-$

2. Tracer le graphe des fonctions $f(x)$ et $g(x)$.En déduire les solutions graphiques de l'inéquation donnée et vérifier algébriquement le résultat.

   (a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{3} - 3$. L'inéquation est $f(x) \leq g(x)$.



graph : $S : [-3, 0]$

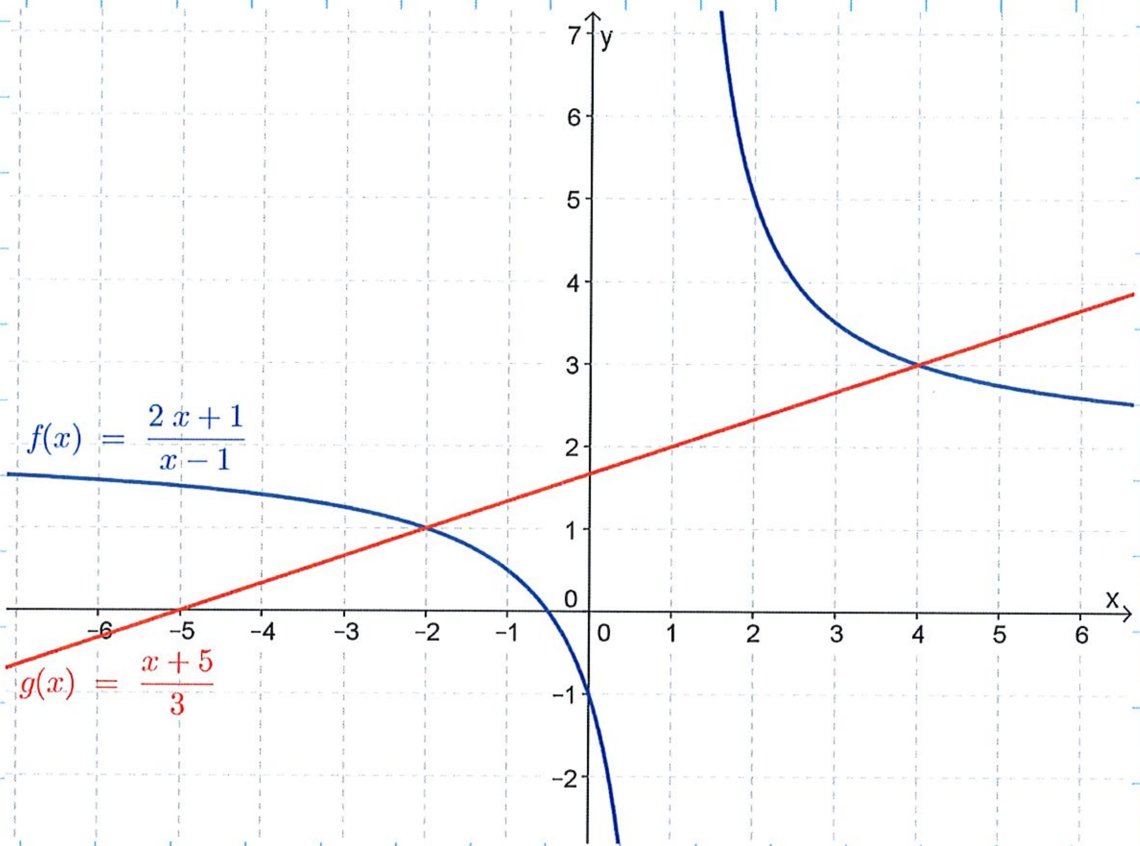
alg : $x^2 + 2x - 3 \leq \dfrac{x^2}{3} - 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{3} + 2x \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x \leq 0 \Leftrightarrow x(x+3) \leq 0$

T.S. $\Rightarrow$ $S : [-3, 0]$

(b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{x+5}{3}$. L'inéquation est $f(x) > g(x)$



graph : $S :]-\infty, -2[\cup]1, 4[$

alg : $\dfrac{2x+1}{x-1} > \dfrac{x+5}{3} \iff \dfrac{6x+3-(x-1)(x+5)}{3(x-1)} > 0$

$\iff \dfrac{6x+3-(x^2+4x-5)}{3(x-1)} > 0$

$\iff \dfrac{-x^2+2x+8}{3(x-1)} > 0$

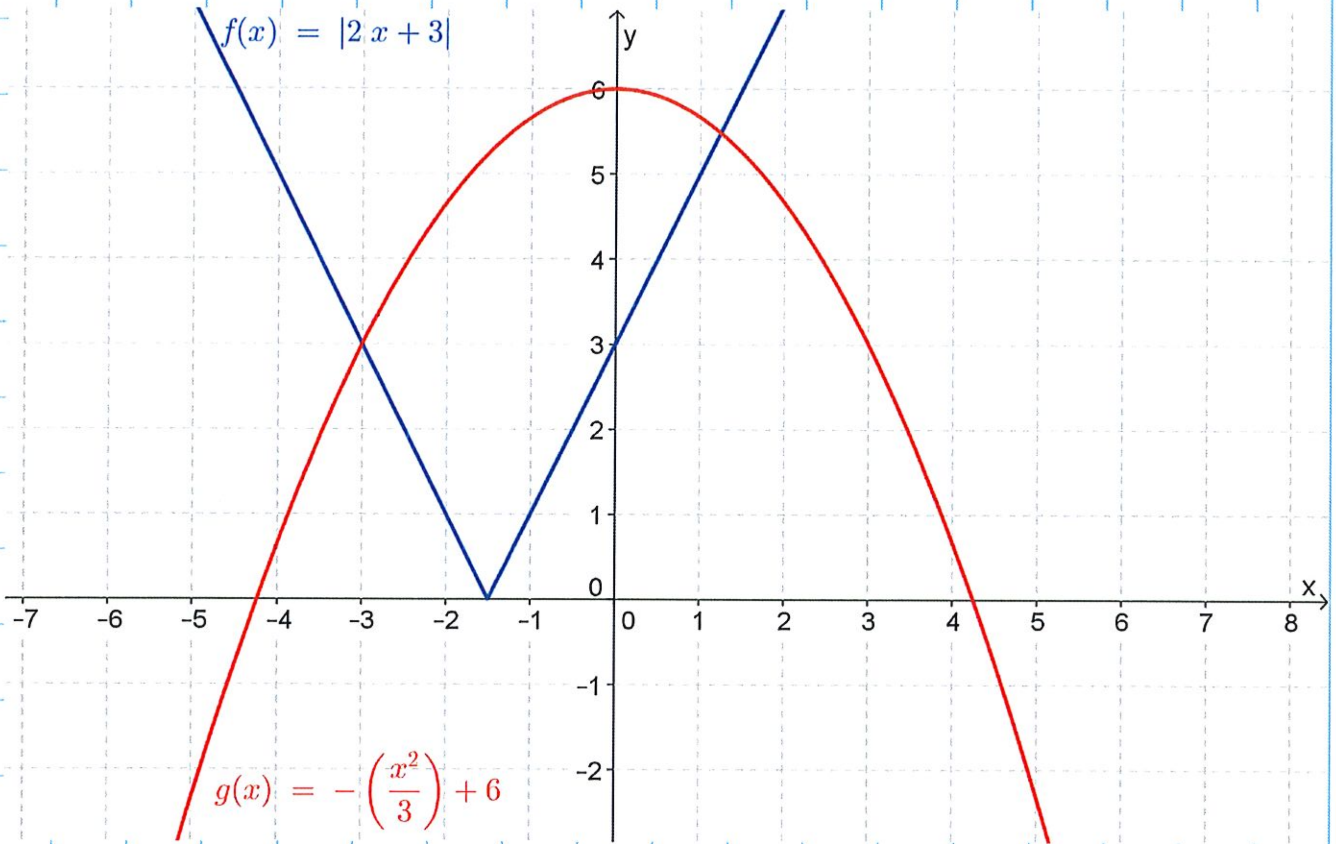
$\Delta : 4 + 32 = 36$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 6}{-2} \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$

x		-2		1		4	
N	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
D	$-$		$-$	0	$+$		$+$
In	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

$S :]-\infty, -2[\cup]1, 4[$

(c) $f(x) = |2x+3|$ et $g(x) = \dfrac{-x^2}{3} + 6$. L'inéquation est $f(x) \geq g(x)$



$$f(x) \geq g(x) \iff \begin{cases} 2x+3 \geq -\dfrac{x^2}{3} + 6 \quad \text{si} \quad x \geq -\dfrac{3}{2} & (1) \\ -2x-3 \geq -\dfrac{x^2}{3} + 6 \quad \text{si} \quad x < -\dfrac{3}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \iff \frac{x^2}{3} + 2x - 3 \geq 0 \overset{\Delta - TS}{\iff} x \in \underbrace{-\infty, -3-3\sqrt{2}}_{A.R.}] \cup [-3+3\sqrt{2}, +\infty$$

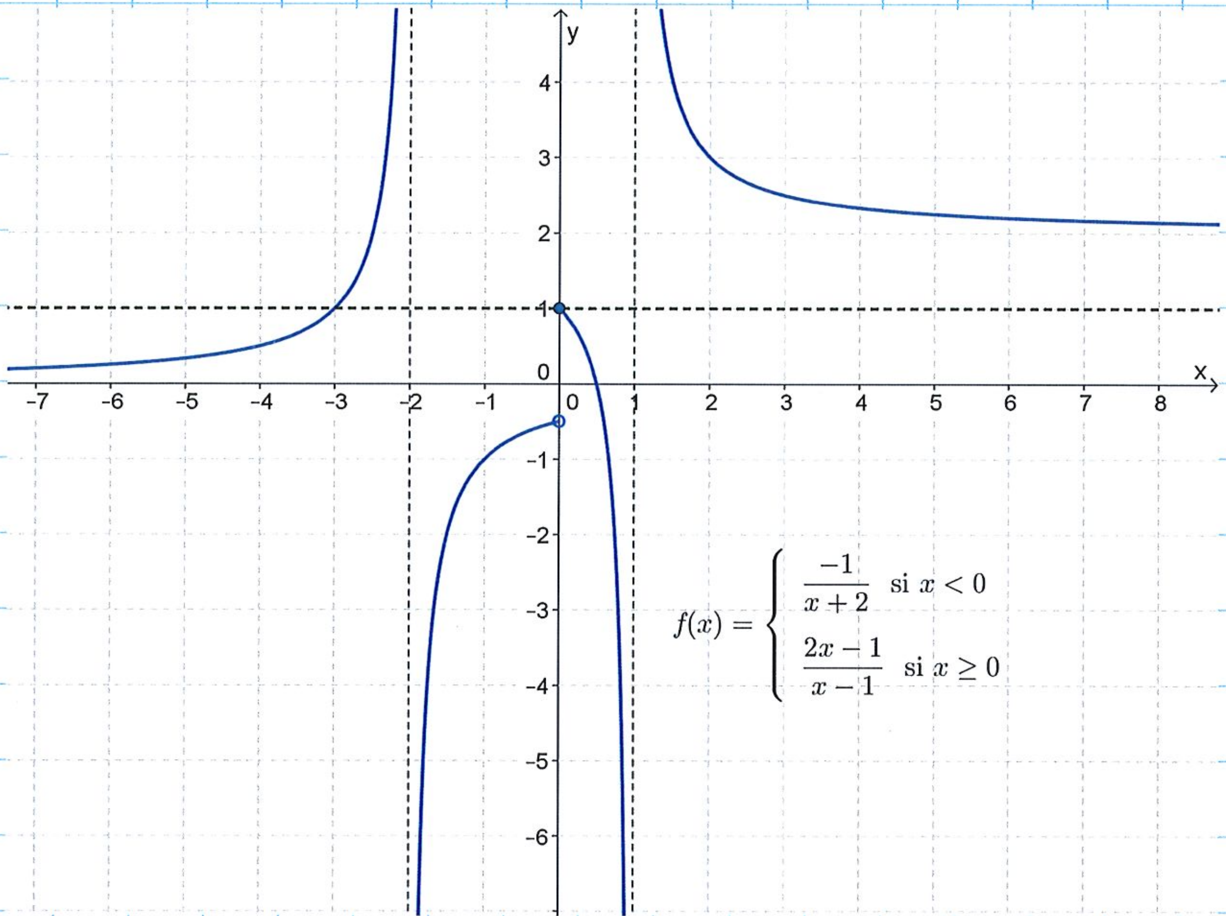
$$(2) \iff \frac{x^2}{3} - 2x - 9 \geq 0 \overset{\Delta - TS}{\iff} x \in -\infty, -3] \cup \underbrace{[9, +\infty}_{AR}$$

$$S : -\infty, -3] \cup [-3+3\sqrt{2}, +\infty$$

3. Construire la graphe de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x+2} \text{ si } x < 0 \\ \\ \dfrac{2x-1}{x-1} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calculer $f(0)$ et l'antécédent (les antécédents) de -1. Résoudre $f(x) \leq +1$.



- $f(0) = 1$
- Antécédents de -1 : • $\dfrac{-1}{x+2} = -1$ si $x < 0$

$\Leftrightarrow 1 = x + 2 \Leftrightarrow x = -1$ (ok)

• $\dfrac{2x-1}{x-1} = -1$ si $x \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x - 1 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ (ok)

$f(x) \leq 1$

Alg : $-\dfrac{1}{x+2} \leq 1 \iff \dfrac{-1-x-2}{x+2} \leq 0$

$\iff \dfrac{-x-3}{x+2} \leq 0$

$\overset{TS}{\iff} \quad x \in]-\infty, -3] \cup]-2, +\infty[$

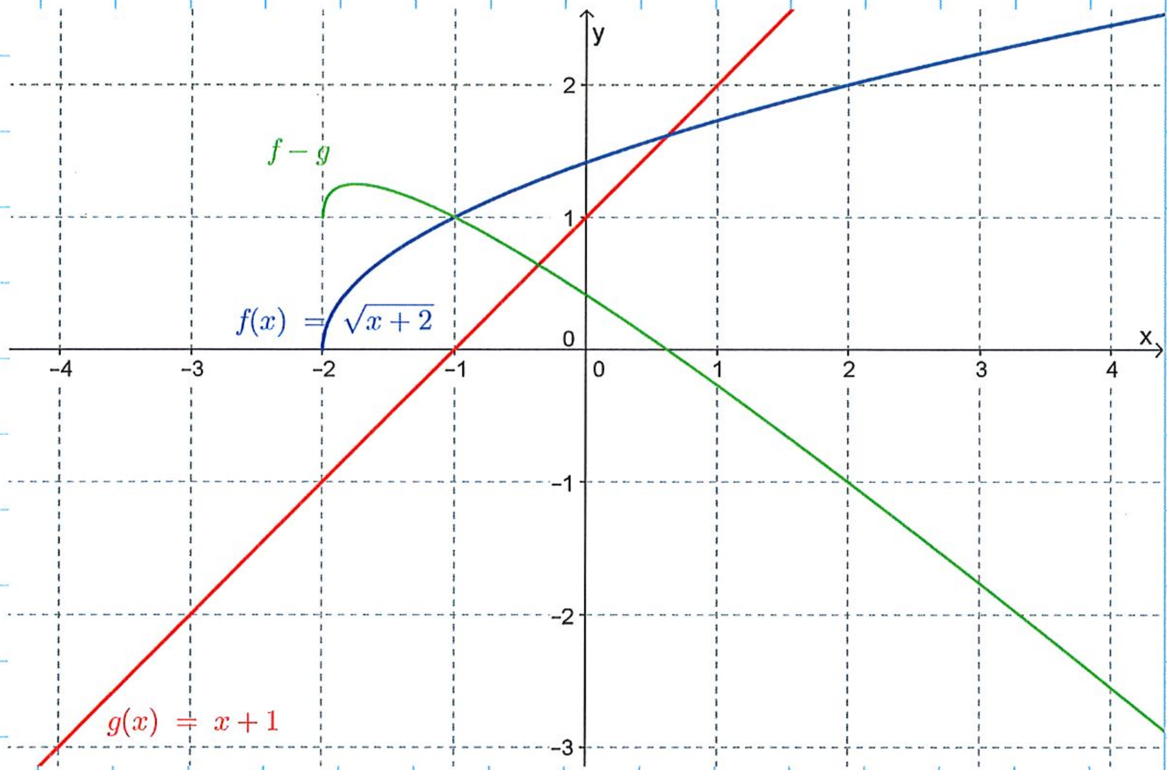
$\overset{Cf}{\iff} \quad x \in]-\infty, -3] \cup]-2, 0[$

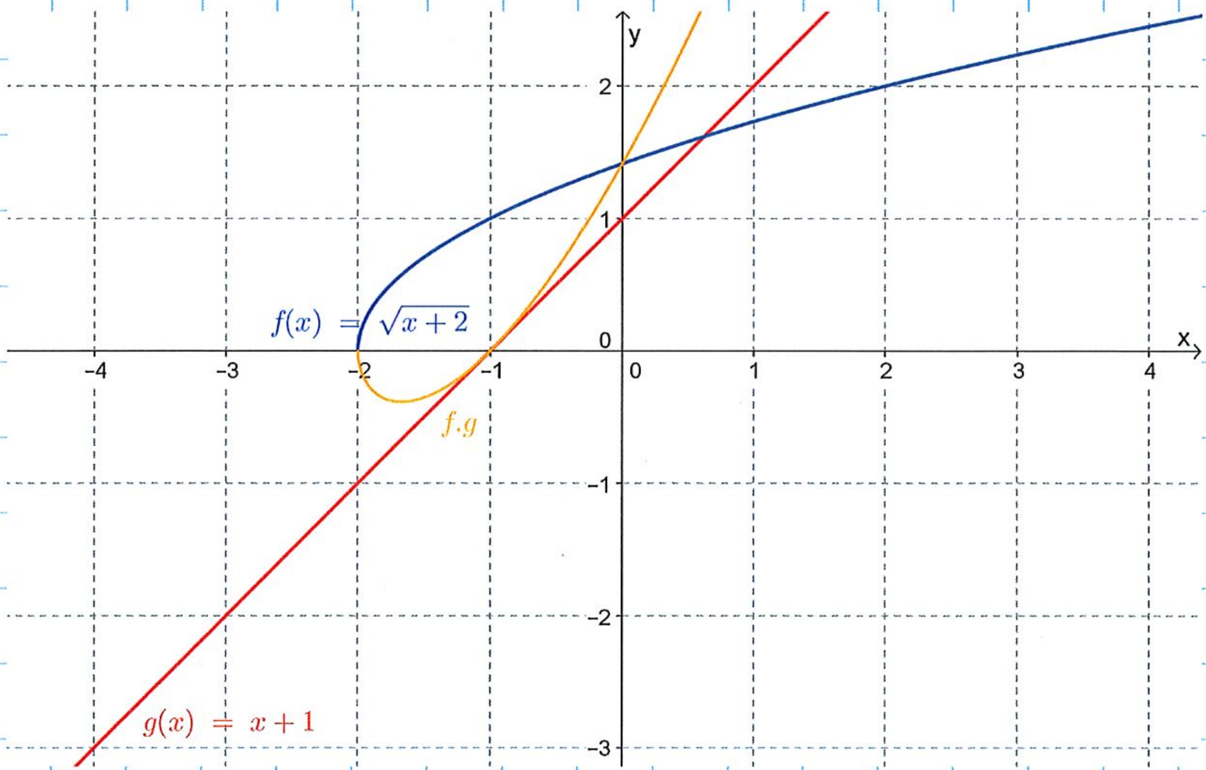
$\dfrac{2x-1}{x-1} \leq 1 \iff x \in [0, 1[$

S: $x \in]-\infty, -3] \cup]-2, 1[$

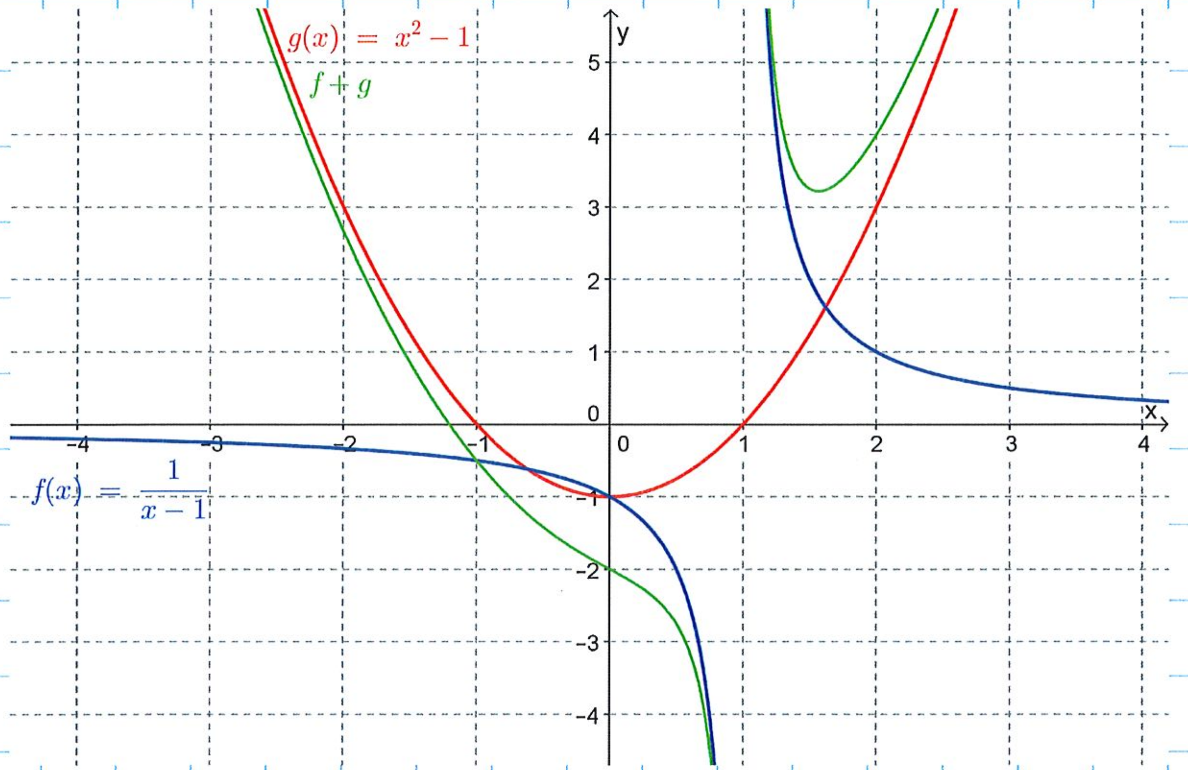
Graph: $x \in]-\infty, -3] \cup]-2, 1[$

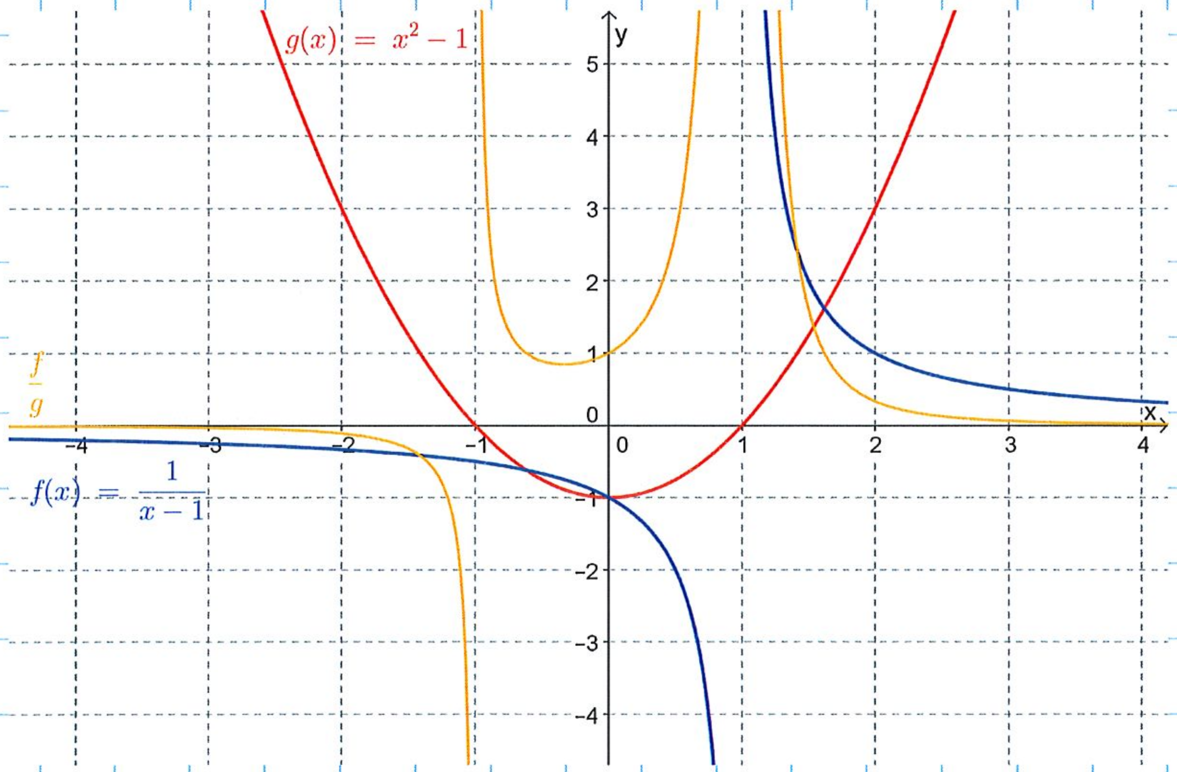
4. (a) On donne les fonctions $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = x + 1$. Tracer les graphes de $f(x) - g(x)$ et $f(x).g(x)$. Expliquer le comportement asymptotiques des fonctions obtenues.

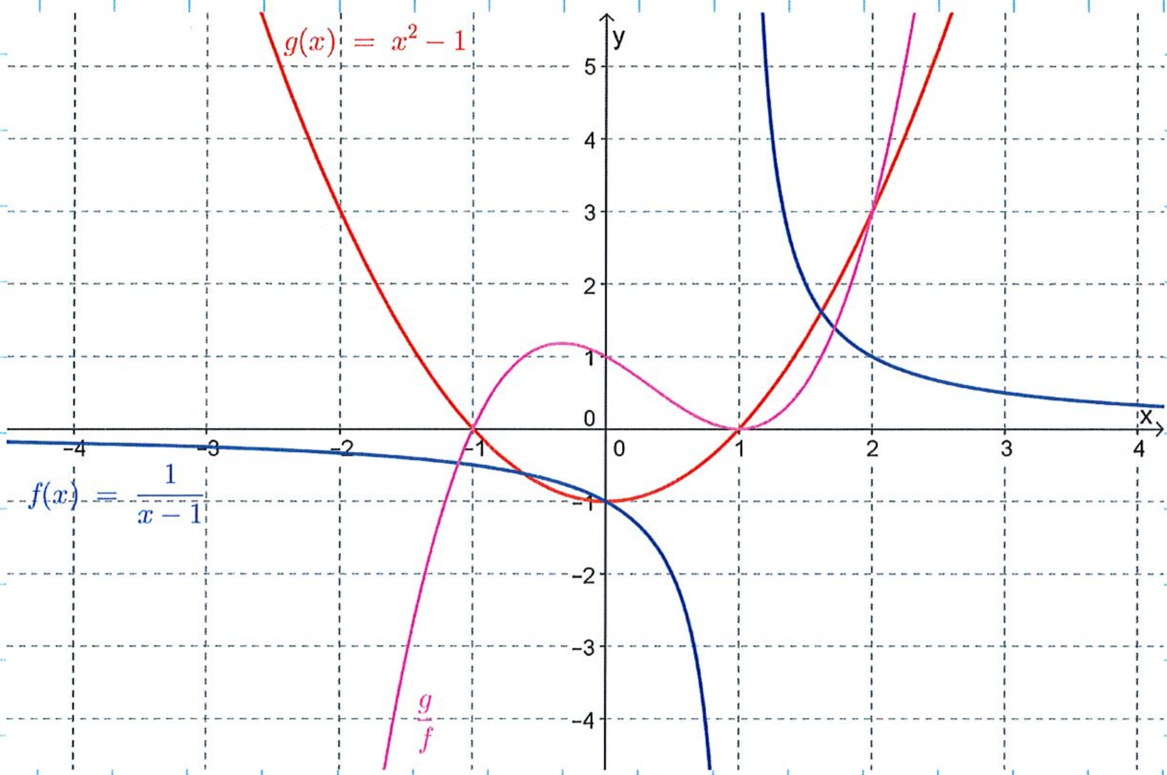




(b) On donne les fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $g(x) = x^2 - 1$. Tracer les graphes de $f(x) + g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ et $\dfrac{g(x)}{f(x)}$. Expliquer le comportement asymptotiques des fonctions obtenues.







$g(x) = x^2 - 1$
$f(x) = \frac{1}{x-1}$
$\frac{g}{f}$
x
y

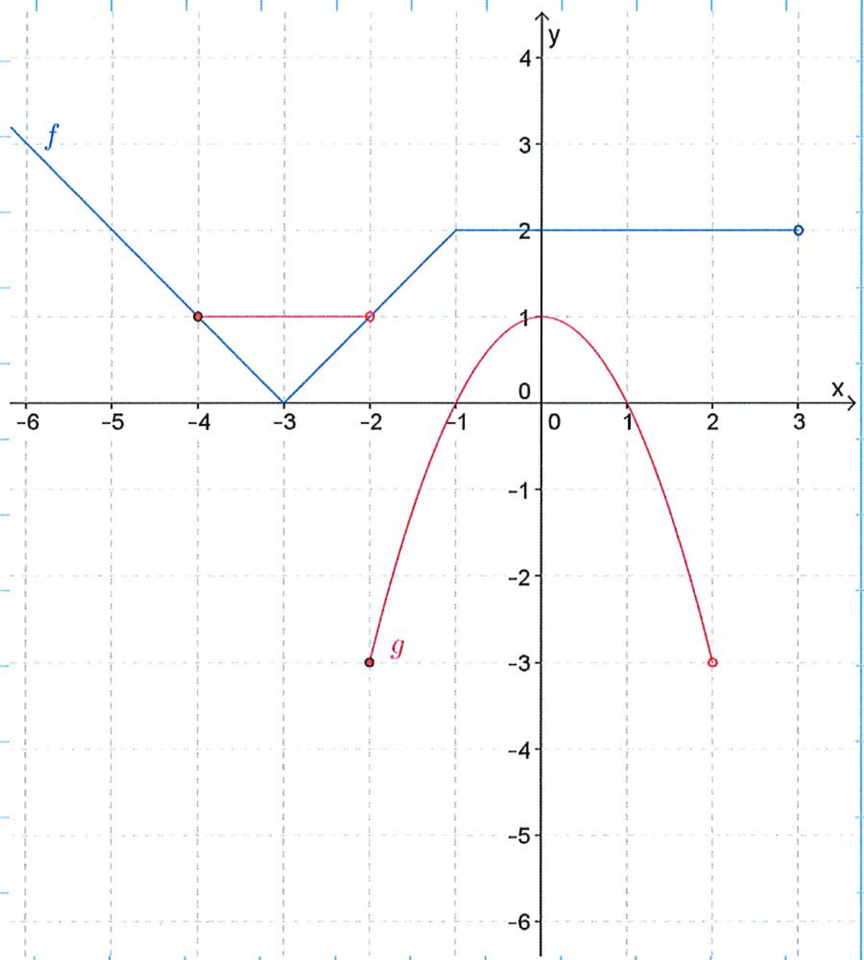
5. On donne les fonctions

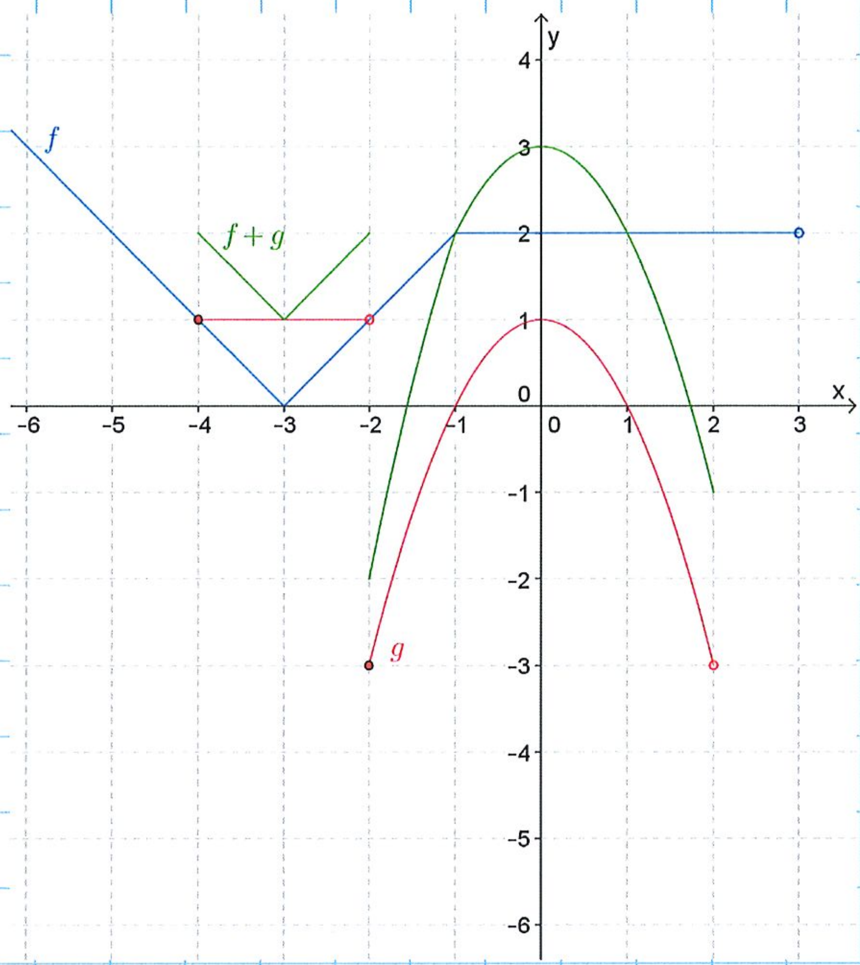
$$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} |x+3| \text{ si } x \leq -1 \\ 2 \text{ si } -1 < x < 3 \end{cases}$$

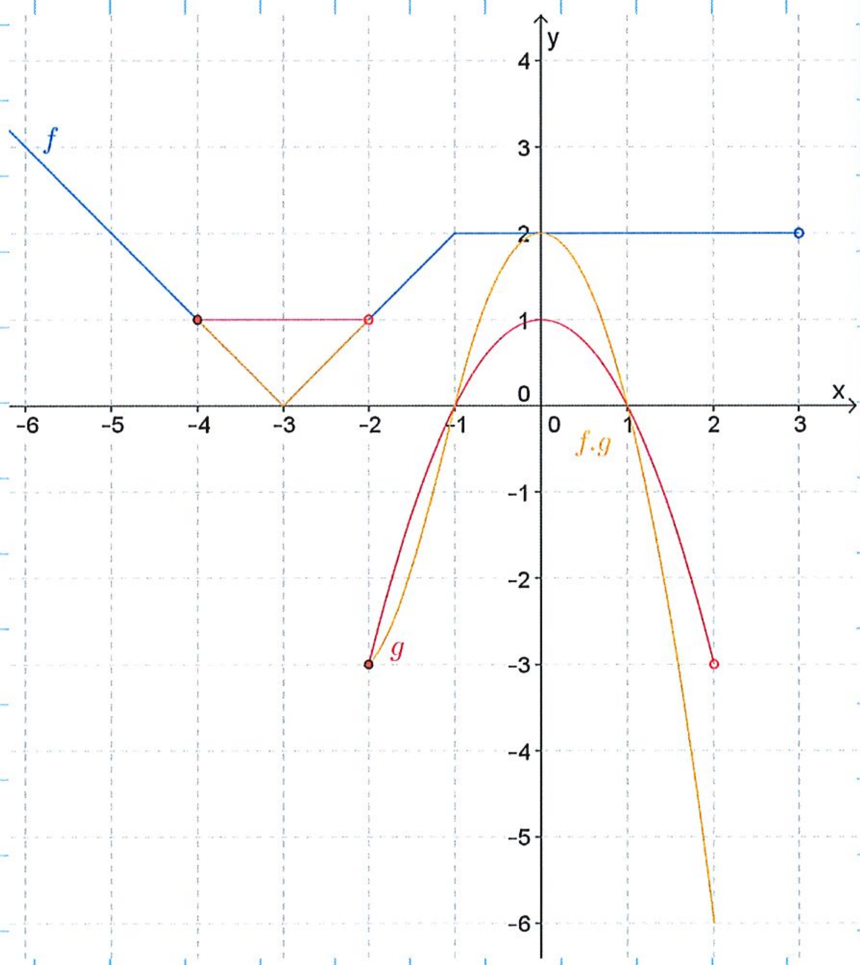
et

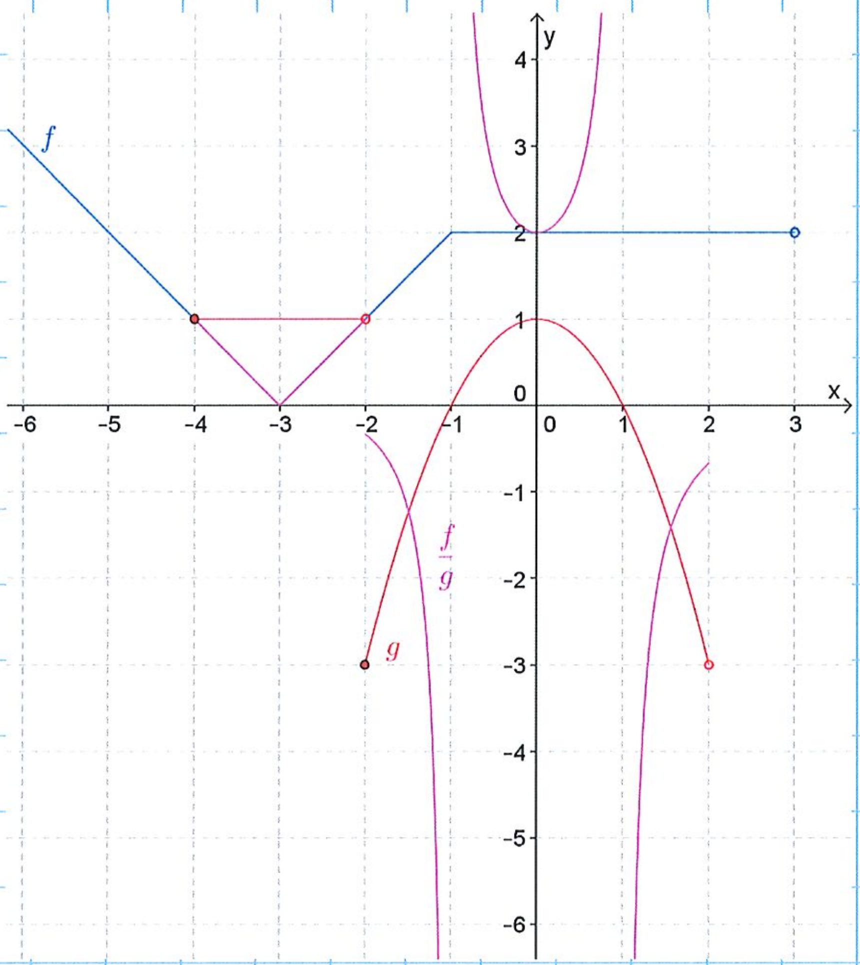
$$g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1 \text{ si } -4 \leq x < -2 \\ 1 - x^2 \text{ si } -2 \leq x < 2 \end{cases}$$

(a) Déterminer le graphe des fonctions $f(x) + g(x)$, $f(x).g(x)$ et $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Justifier le comportement asymptotique des fonctions ;




y
x
f
f + g
g
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3


y
x
f
g
f·g
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3



(b) Déterminer le domaine de ces fonctions ;

dom : $[-4, 2[$

(c) Trouver les racines des fonctions $f(x) + g(x)$, $f(x).g(x)$ et $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

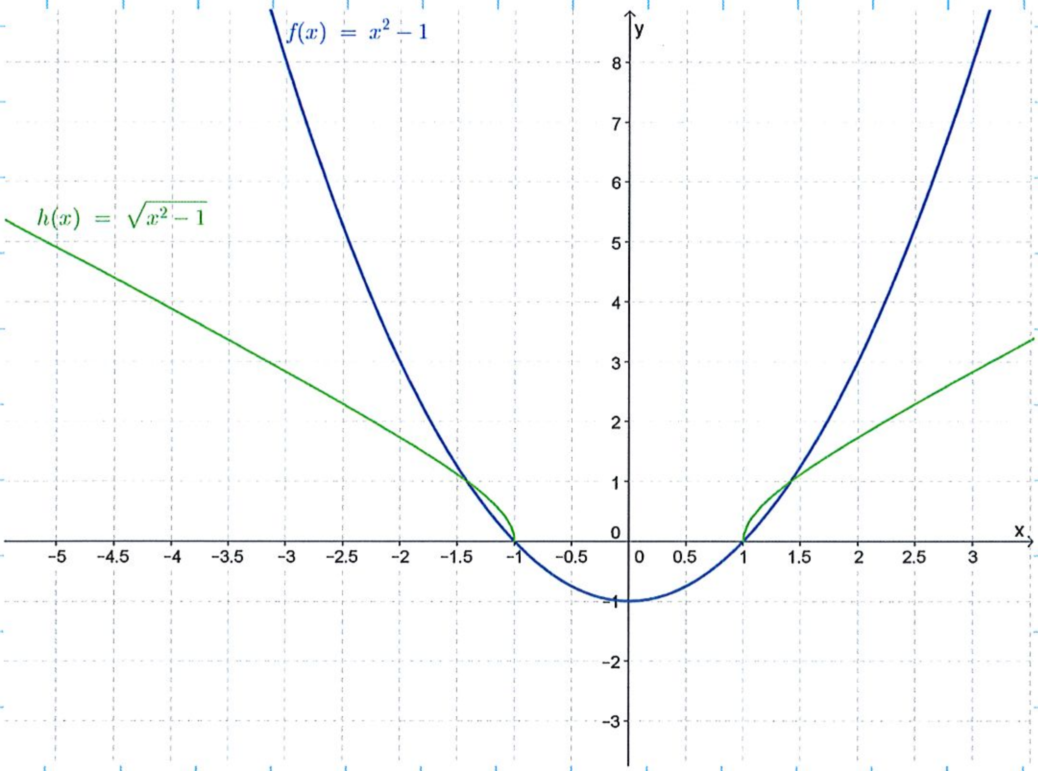
$f+g$: $x \simeq -1,7$ et $x \simeq 1,8$

$f.g$: $x = -3$, $x = -1$ et $x = 1$

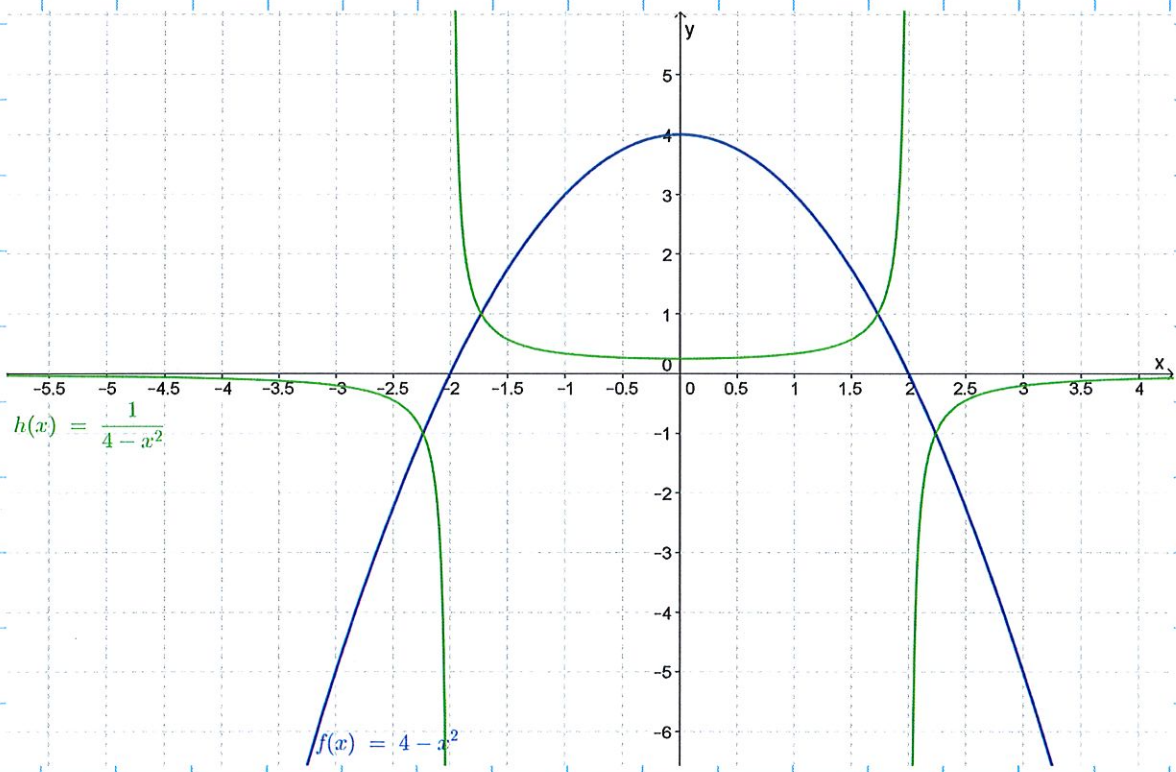
$\frac{f}{g}$: $x = -3$

6. *Graphe rapide* : établir avec un minimum de calcul, le graphe des fonctions suivantes, en explicitant la démarche. Justifier le comportement asymptotique des fonctions.

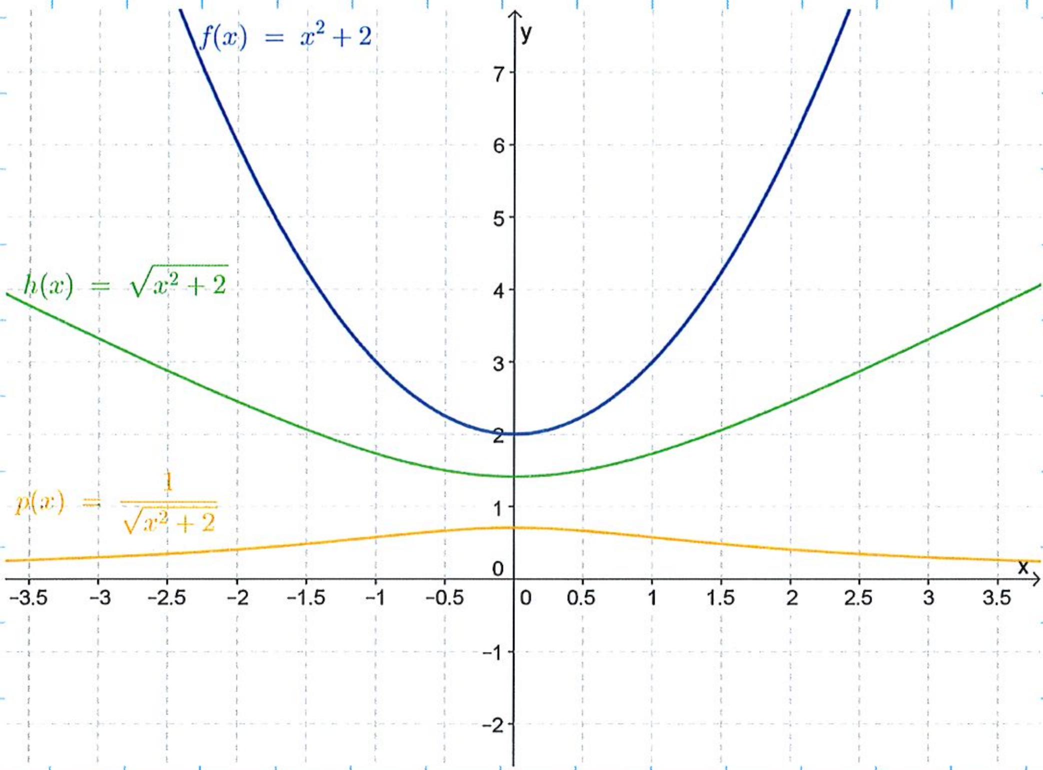
(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$



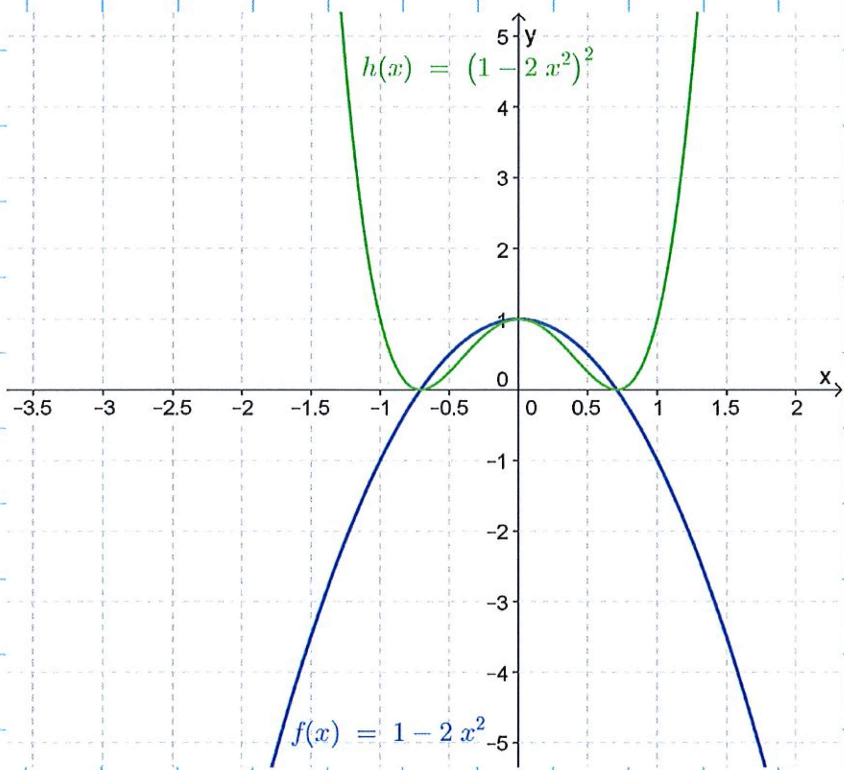
(b) $f(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}$



(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$



(d) $f(x) = (1-2x^2)^2$



7. Composition de fonctions

(a) On donne les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x - 2$ Déterminer la forme analytique et le domaine de la composée $f \circ g$;

$f \circ g = (3x - 2)^2$ dom $f \circ g = \mathbb{R}$

(b) On donne les fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ et $g(x) = x^2 - 3$ Déterminer la forme analytique et le domaine des composées $f \circ g$ et $g \circ f$;

$f \circ g = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ dom $f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$g \circ f : \left(\dfrac{1}{x+2}\right)^2 - 3$ dom $g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

(c) Exprimer la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ comme la composée de deux fonctions;

$f(x) = g(x) \circ h(x)$ où $\begin{cases} g(x) = \sqrt{x} \\ h(x) = x^2 + 4 \end{cases}$

(d) Exprimer la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 5}$ comme la composée de deux fonctions;

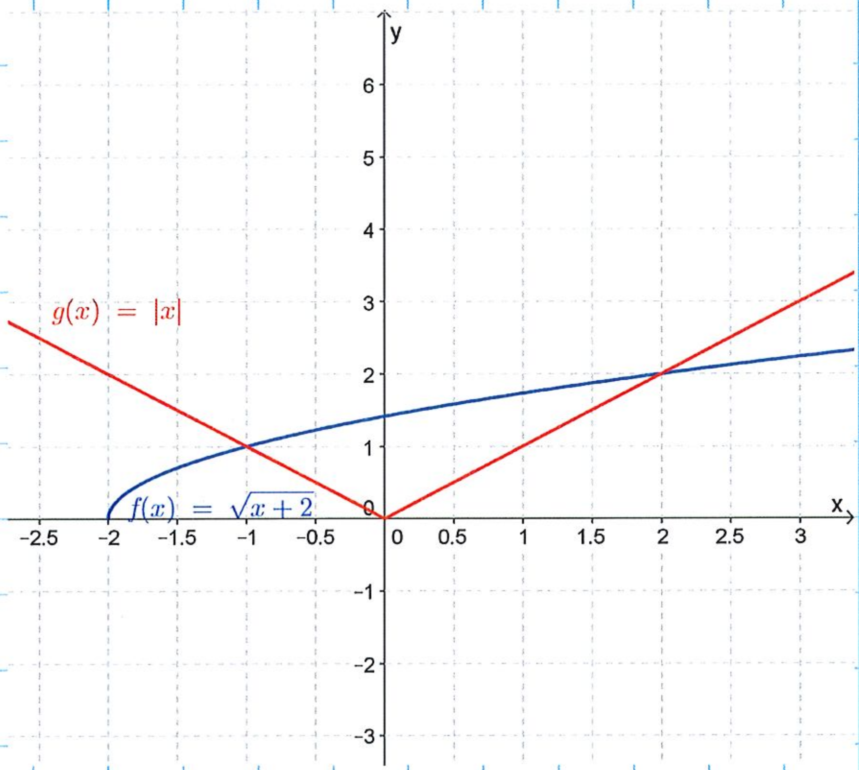
$f(x) = g(x) \circ h(x)$ où $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x - 5} \\ h(x) = x^3 \end{cases}$

(e) Exprimer la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 4}}$ comme la composée de trois fonctions;

$f(x) = g(x) \circ h(x) \circ i(x)$ où $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x} \\ h(x) = \sqrt{x} \\ i(x) = x^2 + 4 \end{cases}$

8. ***Questions diverses***

(a) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $\sqrt{x+2} \leq |x|$



CE : $x \geq -2$ graph : S : $[-2, -1] \cup [2, +\infty$

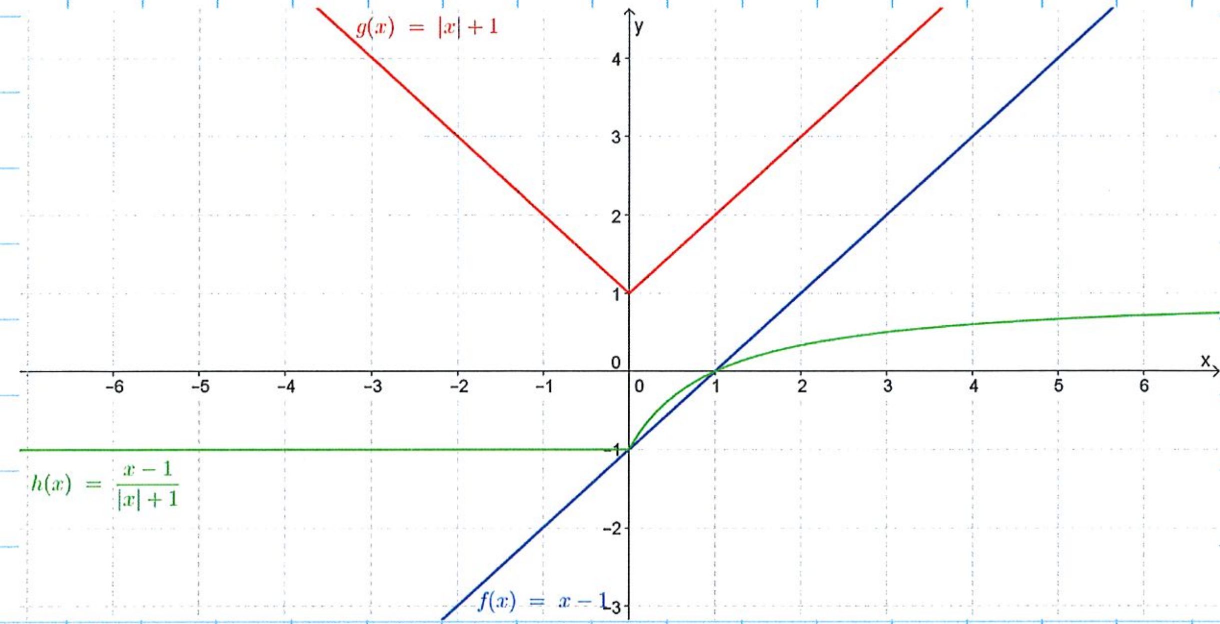
$x + 2 \leq x^2 \iff x^2 - x - 2 \geq 0$

$\Delta = 9 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} <^{-1}_{2}$

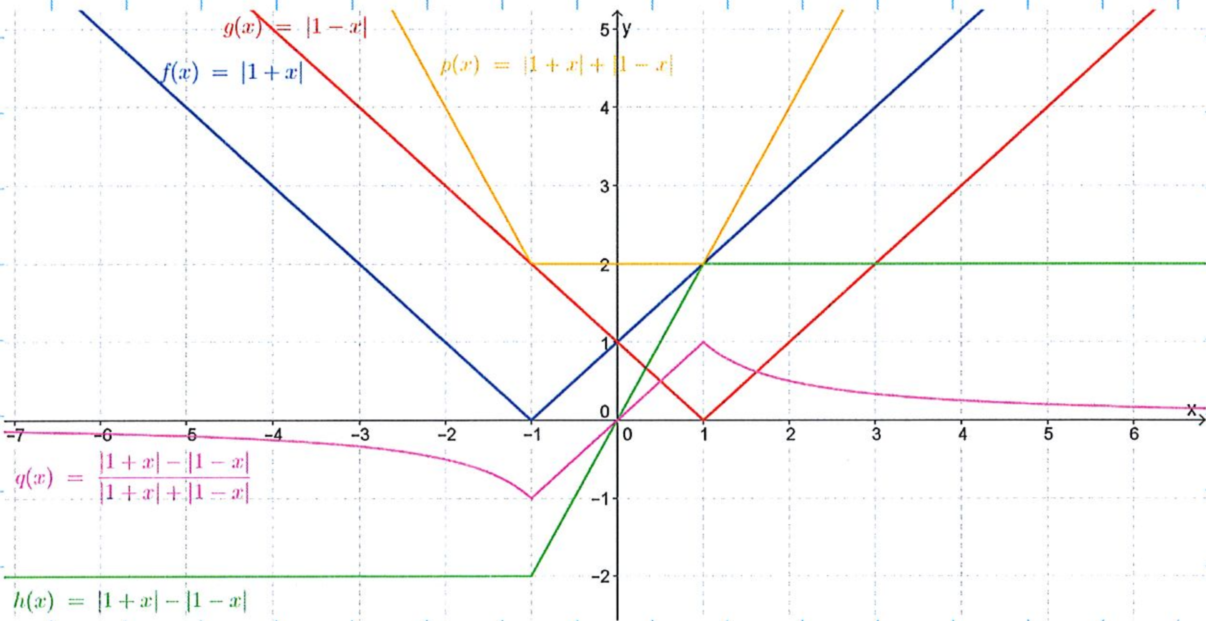
x		-2		-1		2	
I_x	+		+	0	−	0	+

S : $[-2, -1] \cup [2, +\infty$

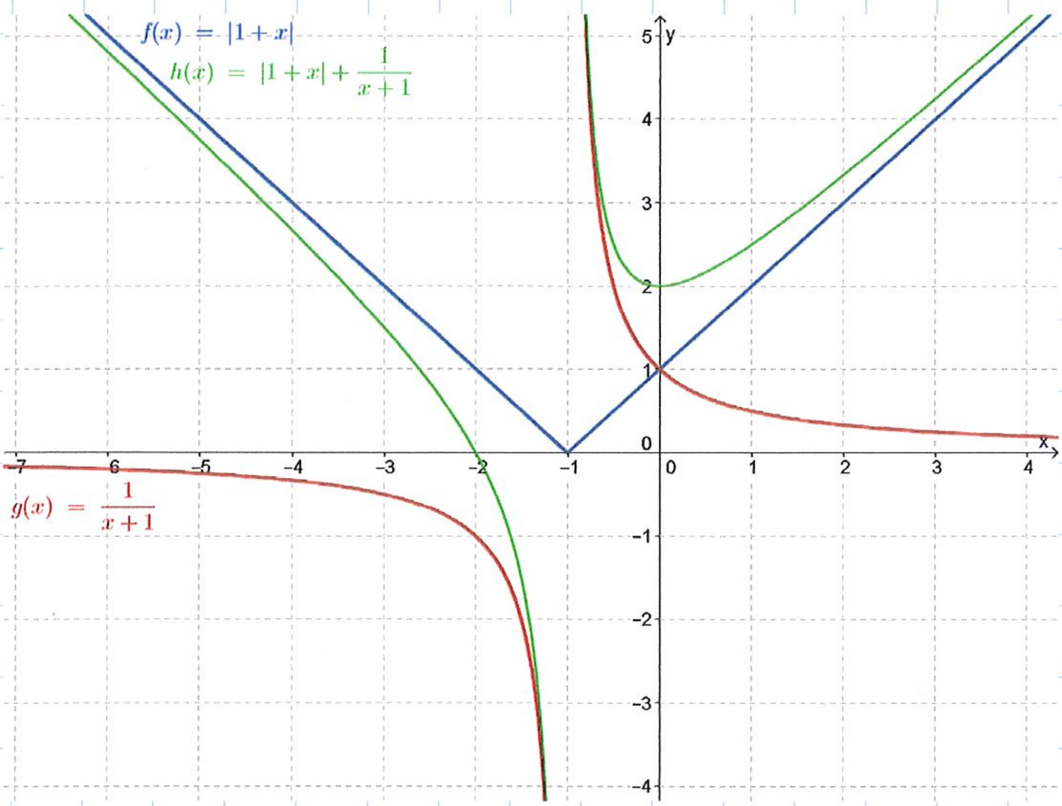
(b) Etablir le graphe de $f(x) = \dfrac{x-1}{|x|+1}$



(c) Etablir le graphe de $f(x) = \dfrac{|1+x| - |1-x|}{|1+x| + |1-x|}$



(d) Etablir le graphe de $f(x) = |1+x| + \dfrac{1}{x+1}$. Résoudre ensuite algébriquement l'inéquation $|1+x| + \dfrac{1}{x+1} > 0$ et vérifier graphiquement le résultat.



__Graph__ : $]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[$

__Alg__ :

x		-1	
$\vert 1+x \vert$	$-1-x$		$1+x$

• si $x < -1$: $-1 - x + \dfrac{1}{1+x} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-(1+x)^2 + 1}{1+x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 - 2x}{1+x} > 0$$

x		-2		-1		0	
N	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
D	$-$		$-$	0	$+$		$+$
Im	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

$$S_1 : -\infty, -2[$$

- si $x \geq -1$

$$1+x+\frac{1}{1+x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+2}{x+1} > 0$$

x		-1	
N	$+$		$+$
D	$-$	0	$+$
Im	$-$	$\nexists$	$+$

$$S_2 :]-1, +\infty$$

$$S : S_1 \cup S_2$$