Géométrie analytique dans l'espace : Solutions

1 Exercices de base

1. On donne les droites

$$d \equiv \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 5z = -1 \end{cases}$$

et

$$d' \equiv \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

   (a) Ecrire les équations paramétriques de d et d'.

   (b) Déterminer les composantes d'un vecteur directeur et les coordonnées d'un point de d et d'.

a) $d \equiv \begin{cases} x = k \\ k + 2y = 5 \\ 3k - 5z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = \frac{5}{2} - \frac{k}{2} \\ z = \frac{1}{5} + \frac{3k}{5} \end{cases}$

$d' \equiv \begin{cases} x = k \\ k + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2k - y - z - 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = k \\ 5k - 5z - 9 = 0 \\ -5k + 5y + 16 = 0 \end{cases}$

$\equiv \begin{cases} x = k \\ y = -\frac{16}{5} + k \\ z = -\frac{9}{5} + k \end{cases}$

b) $\underline{d}$: $A\left(0, \frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right)$ $\quad \vec{v}_d : \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$\underline{d'}$: $A\left(0, -\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}\right)$ $\quad \vec{v}_{d'} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Ecrire les équations cartésiennes et paramétriques des droites passant par les points

(a) $A(-2,1,3)$ et $B(4,2,-2)$

$$\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$AB \equiv \begin{cases} x = -2 + 6k \\ y = 1 + k \\ z = 3 - 5k \end{cases}$$

$$AB \equiv \frac{x+2}{6} = y - 1 = \frac{z-3}{-5}$$

$$\equiv \frac{x+2}{6} = y - 1 = \frac{3-z}{5}$$

(b) $A(-2,2,-3)$ et $B(2,-2,3)$

$$\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{cases} x = -2 + 4k \\ y = 2 - 4k \\ z = -3 + 6k \end{cases}$$

$$AB = \frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+3}{6}$$

$$= \frac{x+2}{4} = \frac{2-y}{4} = \frac{z+3}{6}$$

(c) $A(1,2,3)$ et $B(-2,3,3)$

$$\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AB \equiv \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 2 + k \\ z = 3 \end{cases}$$

$$AB \equiv \begin{cases} \dfrac{1-x}{3} = y - 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

3. Ecrire l'équation de la droite d, parallèle à $d' \equiv \dfrac{x-1}{2} = y+3 = \dfrac{z-5}{3}$ et passant par le point A(0,1,-2).

$\vec{v}_d : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$d \equiv \begin{cases} x = 2k \\ y = 1 + k \\ z = -2 + 3k \end{cases}$

$d \equiv \dfrac{x}{2} = y - 1 = \dfrac{z+2}{3}$

4. Ecrire l'équation de la droite d, parallèle à l'axe Ox et passant par le point A(1,3,2).

$\vec{v}_d : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d \equiv \begin{cases} y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$

5. Montrer que les droites $d_1 \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{3} = 7-z$ et $d_2 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{1-y}{3} = z-3$ sont perpendiculaires.

$\vec{u_1} : \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{u_2} : \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 10 - 9 - 1 = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2$

6. On donne les plans

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3\lambda + \mu - 1 \\ z = 2\mu + 1 \end{cases}$$

et

$$\pi' \equiv 3y - z = 2x + 1$$

Déterminer les composantes de deux vecteurs directeurs et les coordonnées d'un point de π et π'.

$\underline{\Pi}$: $A(1, -1, 1)$

$$\vec{v} : \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\Pi'} \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -2\lambda + 3\mu - 1 \end{cases}$$

$A : (0, 0, 1)$

$$\vec{v} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

7. Ecrire l'équation cartésienne du plan passant par $A(1,1,-1)$, $B(-2,-2,2)$ et $C(1,-1,2)$.

$\vec{AB} : \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} : \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi \equiv -3(x-1) + 9(y-1) + 6(z+1) = 0$$

$$\equiv -3x + 9y + 6z = 0$$

$$\equiv -x + 3y + 2z = 0$$

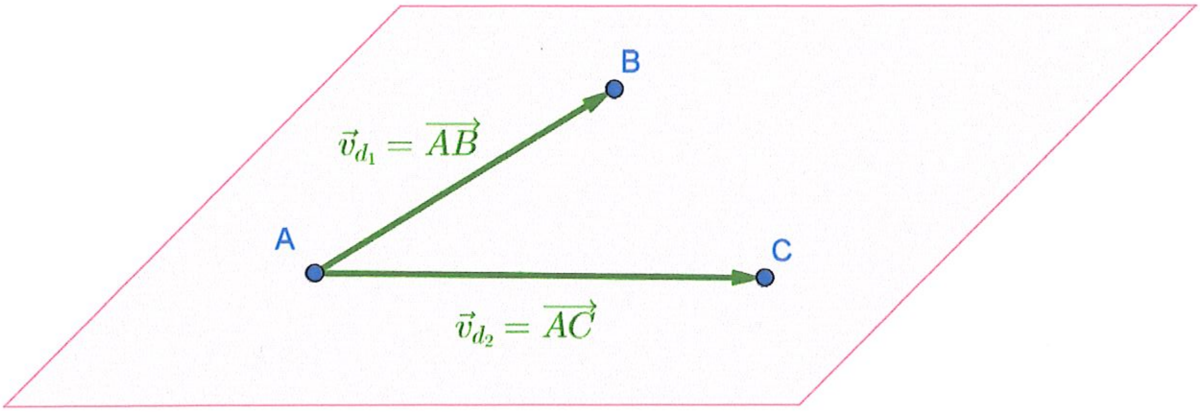
Dessin en annexe

8. Ecrire l'équation du plan π, parallèle à Oxz et passant par le point $A(1,3,2)$.

$\vec{n} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\pi \equiv y + d = 0$ $\qquad A \in \pi \Rightarrow d = -3$

$\pi \equiv y = 3$


B
$\vec{v}_{d_1} = \overrightarrow{AB}$
A
C
$\vec{v}_{d_2} = \overrightarrow{AC}$

9. Trouver l'équation cartésienne du plan contenant les droites $d_1 \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$ et $d_2 \equiv \frac{x+3}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+1}{3}$

$P : (1, -1, 2)$, $\vec{v} : \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} : \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

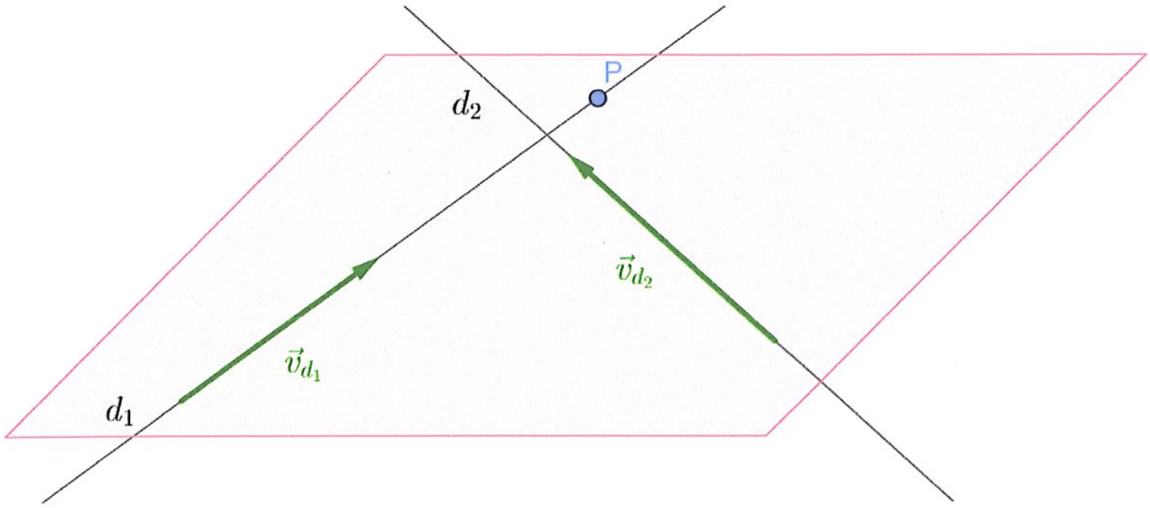
$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv -6(x-1) + 3(y+1) + 6(z-2) = 0$$

$$\equiv -6x + 3y + 6z - 3 = 0$$

$$\equiv -2x + y + 2z - 1 = 0$$

Dessin en annexe



P
d_2
$\vec{v}_{d_2}$
$\vec{v}_{d_1}$
d_1

10. Trouver l'équation du plan médiateur du segment $[AB]$ si $A(-3,2,1)$ et $B(9,4,3)$.

$$\vec{n} = \vec{AB} : \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \left[= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

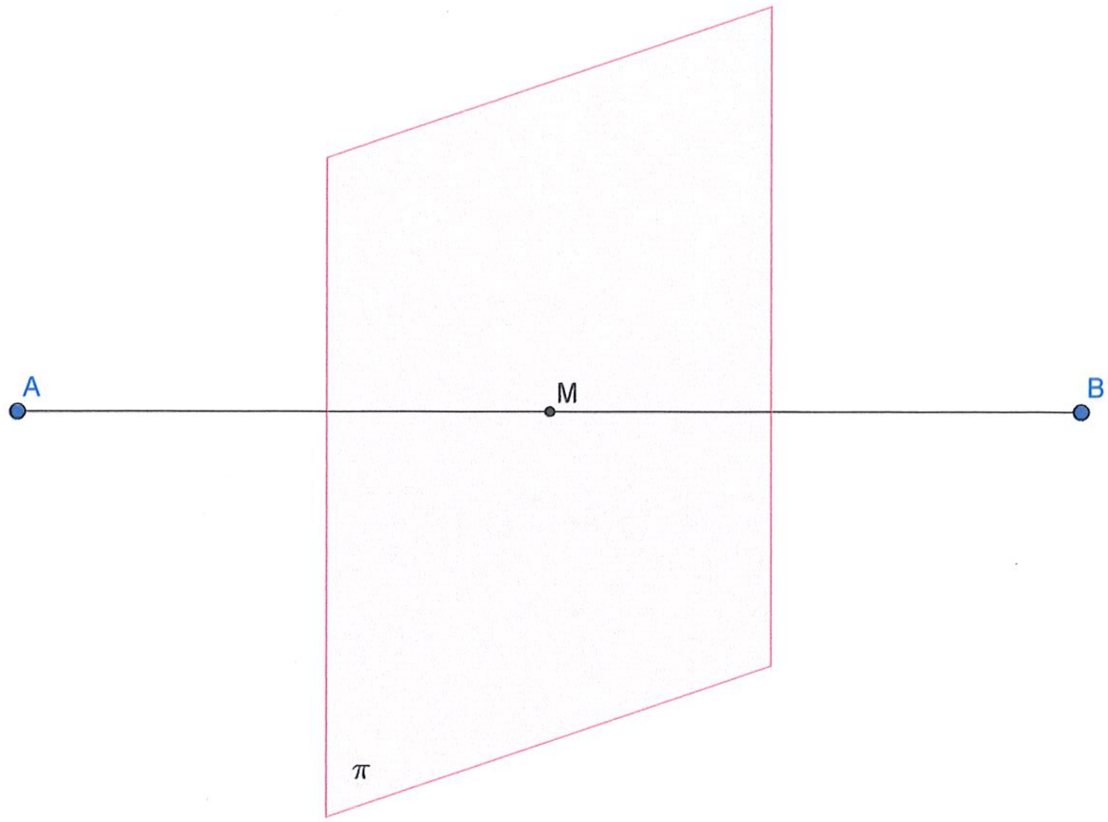
$$M : (3, 3, 2)$$

$$\pi \equiv 12x + 2y + 2z + d = 0$$

$$M \in \pi \iff 36 + 6 + 4 + d = 0$$
$$\iff d = -46$$

$$\pi \equiv 6x + y + z - 23 = 0$$

Dessin en annexe


A
M
B
π

11. Ecrire l'équation du plan passant par $A(1,-2,3)$ et parallèle au plan d'équation $\pi \equiv x - 3y + 2z = 0$.

$\vec{n} : \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\pi \equiv x - 3y + 2z + d = 0$

$A \in \pi \Leftrightarrow 1 + 6 + 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = -13$

$\pi \equiv x - 3y + 2z - 13 = 0$

12. Trouver l'équation cartésienne du plan passant par $A(4,-2,1)$ et perpendiculaire à la droite de vecteur directeur (7,2,-3).

$\pi \equiv 7x + 2y - 3z + d = 0$

$A \in \pi \Leftrightarrow 28 - 4 - 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -21$

$\pi \equiv 7x + 2y - 3z - 21 = 0$

13. Ecrire les équations cartésiennes et paramétriques de la droite passant par A(1,-3,4) et perpendiculaire au plan $\pi \equiv x - 3y + 2z = 4$.

$$\vec{n} : \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -3 - 3k \\ z = 4 + 2k \end{cases}$$

$$d \equiv x - 1 = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-4}{2}$$

14. Trouver le point d'intersection des plans

(a) $\begin{cases} \pi_1 \equiv x + 2y - z = 6 \\ \pi_2 \equiv 2x - y + 3z = -13 \\ \pi_3 \equiv 3x - 2y + 3z = -16 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x - y + 3z = -13 \\ 3x - 2y + 3z = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ -5y + 5z = -25 & (2) - 2.(1) \\ -8y + 6z = -34 & (3) - 3(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ -y + z = -5 & \frac{(2)}{5} \\ -4y + 3z = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ -y = -2 & (3) - 3.(2) \\ -y + z = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

$I : (-1, 2, -3)$

(b) $\begin{cases} \pi_1 \equiv x + 2y - z = 6 \\ \pi_2 \equiv -4y + 3z = -12 + 2x \\ \pi_3 \equiv 3x - 2y + 3z = -16 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ -2x - 4y + 3z = -12 \\ 3x - 2y + 3z = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)+(3):\ 4x + 2z = -10 \\ (2)-(3):\ -5x - 2y = +4 \\ x + 2y - z = +6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 5 \\ -2y = 4 + 5x \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ y = -2 - \frac{5}{2}x \\ x - 4 - 5x + 2x + 5 = +6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 5 \\ y = -2 - \frac{5}{2}\left(-\frac{5}{2}\right) \\ -2x = +5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = \frac{17}{4} \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$I\left(-\frac{5}{2}, \frac{17}{4}, 0\right)$$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(c) $\begin{cases} \pi_1 \equiv -\dfrac{z}{2} = 3 - y - \dfrac{x}{2} \\ \pi_2 \equiv x + 2y - z = 8 \\ \pi_3 \equiv 3x - 2y + 3z = -16 \end{cases}$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} x + 2y - z = 6 \\ x + 2y - z = 8 \end{array}\right\} \text{imp} \\ 3x - 2y + 3z = -16 \end{cases}$$

(2 plans // coupés par un 3^{e})

15. Trouver les coordonnées du point de percée de la droite passant par $A(3,\text{-}1,2)$ et $B(1,2,1)$ dans le plan $\pi \equiv 3x - y - z = 2$.

$$\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad AB \equiv \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 1 - k \end{cases}$$

$$AB \cap \pi : 3(1-2k) - (2+3k) - (1-k) = 2$$

$$\Leftrightarrow -8k = 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{1}{4}$$

$$I : \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2} \\ y = 2 - \frac{3}{4} \\ z = 1 + \frac{1}{4} \end{cases} \qquad I : \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

16. Ecrire l'équation du plan contenant la droite $d \equiv \begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{z}{3} \\ y = 5 \end{cases}$ et le point P(-1,0,1).

$A \in d : (3,5,0) \longrightarrow \overrightarrow{AP} : \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

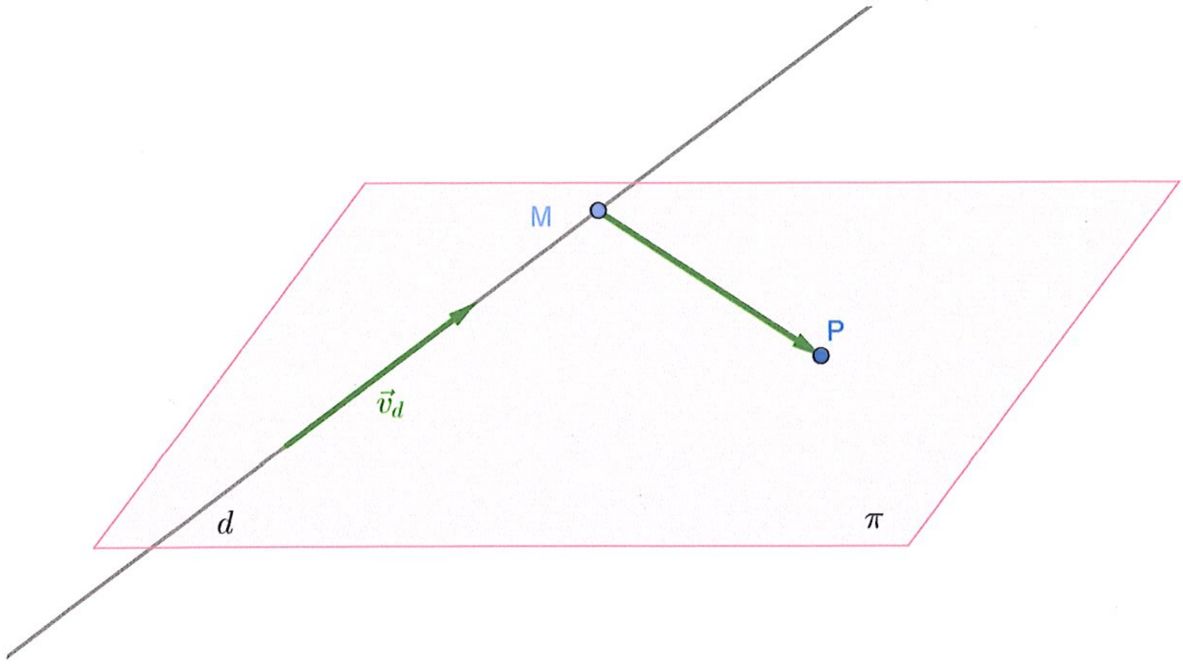
$\vec{u_d} : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv (x+1)(-15) - y(-14) + (z-1)(10) = 0$$

$$\equiv -15x + 14y + 10z - 25 = 0$$

Dessin en annexe


M
P
$\vec{v}_d$
d
π

17. Trouver la distance du point A(5,-2,3) au point B(-4,3,7).

$$d(A,B) = \sqrt{(5+4)^2 + (-2-3)^2 + (7-3)^2}$$

$$= \sqrt{122}$$

18. Trouver la distance du point A(1,2,3) à la droite $d \equiv 1 - x = \frac{y-1}{3} = -\frac{z}{2}$.

$$d \equiv \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 1 + 3k \\ z = -2k \end{cases} \longrightarrow \vec{v}_d : \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\pi \equiv -x + 3y - 2z + d = 0$$

$$A \in \pi \equiv -1 + 6 - 6 + d = 0 \iff d = 1$$

$$\Rightarrow \pi \equiv -x + 3y - 2z + 1 = 0$$

$$d \cap \pi : -(1-k) + 3(1+3k) - 2(-2k) + 1 = 0$$

$$\iff 14k = -3 \iff k = -\frac{3}{14}$$

$$\Rightarrow I : \begin{cases} x = 1 + \frac{3}{14} \\ y = 1 - \frac{9}{14} \\ z = +\frac{6}{14} \end{cases} \qquad I : \left(\frac{17}{14}, \frac{5}{14}, \frac{6}{14}\right)$$

$$d(A,I) = \sqrt{\ldots}$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{\sqrt{1834}}{14}$$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

19. Trouver la distance du point P à la droite AB si $P(1,0,3)$, $A(1,2,1)$ et $B(2,3,1)$.

$\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad AB \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \\ z = 1 \end{cases}$

$\pi \perp AB$ et $\ni P \equiv x + y + d = 0$

$P \in \pi \Leftrightarrow 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

$\pi \equiv x + y - 1 = 0$

$\{I\} = \pi \cap d : 1 + k + 2 + k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = -1$

$\Rightarrow I(0,1,1)$

$d(P, AB) = d(P, I) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (3-1)^2}$

$= \sqrt{6}$

20. Trouver la distance du point $A(1,2,-1)$ au plan $\pi \equiv 2x+4y+4z+3=0$

$\vec{n} : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d \perp \pi$ et $\ni A$ $= \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + 2k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$

$\{I\} = d \cap \pi \iff 2(1+k) + 4(2+2k) + 4(-1+2k) + 3 = 0$

$\iff 18k = -9 \iff k = -\frac{1}{2}$

$\iff I : \left(\frac{1}{2}, 1, -2\right)$

$d(A,\pi) = d(A,I) = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + (2-1)^2 + (-1+2)^2}$

$= \frac{3}{2}$

21. Ecrire l'équation de la sphère de centre $C(-1, 2, 1)$ et de rayon $r = 5$.

$$S \equiv (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$$

22. Déterminer les coordonnées du centre et le rayon des sphères :

(a) $S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 8z + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+1) + (y^2-4y+4) + (z^2-8z+16) = -8 +1+4+16$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 13$$

$C : (-1, 2, 4)$ $\quad r = \sqrt{13}$

(b) $S_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z = -6$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right) + \left(y^2-3y+\frac{9}{4}\right) + \left(z^2-3z+\frac{9}{4}\right) = -6 + 3 \cdot \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$C : \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2 Exercices récapitulatifs

1. On donne le point $A(1,4,1)$ et la droite $d \equiv \dfrac{x}{2} = 3 - y = \dfrac{z+3}{2}$

   (a) Déterminer une équation cartésienne du plan α comprenant A et perpendiculaire à d.

   (b) Déterminer les coordonnées du point de percée P de d dans α et calculer la distance de P à l'origine.

   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan β déterminé par O et d.

   (d) Déterminer une équation du plan γ contenant d et perpendiculaire à β.

a) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \equiv 2x - y + 2z + d = 0$

$A \in \alpha \Leftrightarrow 2 - 4 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

$\alpha \equiv 2x - y + 2z = 0$

b) $d \equiv \begin{cases} x = 2k \\ y = 3 - k \\ z = -3 + 2k \end{cases}$ $\quad d \cap \alpha \Rightarrow 4k - (3-k) + 2(-3+2k) = 0$

$\Leftrightarrow 9k - 9 = 0$

$\Leftrightarrow k = 1$

$P(2, 2, -1)$

$d(O,P) = \sqrt{4+4+1} = 3$

c) $\beta \ni O$, $\vec{v_d}$ et $\vec{w_d} = \vec{OB}$ où $B \in d : (0,3,-3)$

$$\beta \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$\equiv -3x + 6y + 6z = 0$

$\beta \equiv -x + 2y + 2z = 0$

d) $\gamma \ni d$ et $\perp \beta$

$\to \gamma \ni B : (0, 3, -3)$

$\vec{w_d} : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w_d} : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\gamma \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z+3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\equiv -6x - 6(y-3) + 3(z+3) = 0$

$\equiv -6x - 6y + 3z + 27 = 0$

$\equiv 2x + 2y - z - 9 = 0$

2. On donne les droites $a \equiv \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = -y \\ z = 2 \end{cases}$ et $b \equiv \begin{cases} x - 2y = 5 \\ z + x = -1 \end{cases}$ et le point $P(3,-1,0)$

(a) Déterminer une équation cartésienne du plan α contenant la droite a et le point P.

(b) Déterminer le point de percée I de la droite b dans le plan α

(c) Déterminer la droite contenant P et qui coupe a et b.

(d) Déterminer les coordonnées du symétrique de P par rapport à I.

(e) Déterminer l'angle entre les droites a et b.

(a) $\vec{a} : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \in a : (-1,0,2) \Rightarrow \overrightarrow{AP} : \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv 2(x-3) + 4(y+1) + 2(z) = 0$$

$$\equiv 2x + 4y + 2z - 2 = 0$$

$$\equiv x + 2y + z - 1 = 0$$

(b) $b \cap \alpha : \{I\}$

$$b \equiv \begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -\frac{5}{2} + \frac{k}{2} \\ z = -1 - k \end{cases}$$

$$b \cap \alpha \Leftrightarrow k + 2\left(-\frac{5}{2} + \frac{k}{2}\right) + -1 - k - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow k - 7 = 0 \Leftrightarrow k = 7$$

$$\Leftrightarrow I : (7, 1, -8)$$

(c) La droite cherchée est la droite IP (voir dessin en annexe)

En effet $I \in \alpha$ (par définition) et $I \in \beta$ (car $I \in b$) $\Rightarrow \{I\} = \alpha \cap \beta$

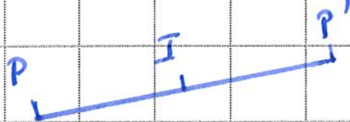
De plus $P \in \alpha$ et $P \in \beta$ (par def).

$\Leftrightarrow PI = \alpha \cap \beta$

$$\overrightarrow{PI} : \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow PI = \begin{cases} x = 3 + 4k \\ y = -1 + 2k \\ z = -8k \end{cases}$$

NB : on aurait pu écrire le système $\begin{cases} (P, a) = 0 \\ (P, b) = 0 \end{cases}$

(d)



P' est le symétrique de P % à I

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PI} = \overrightarrow{IP'}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 7 \\ y - 1 \\ z + 8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P' : (11, 3, -16)$

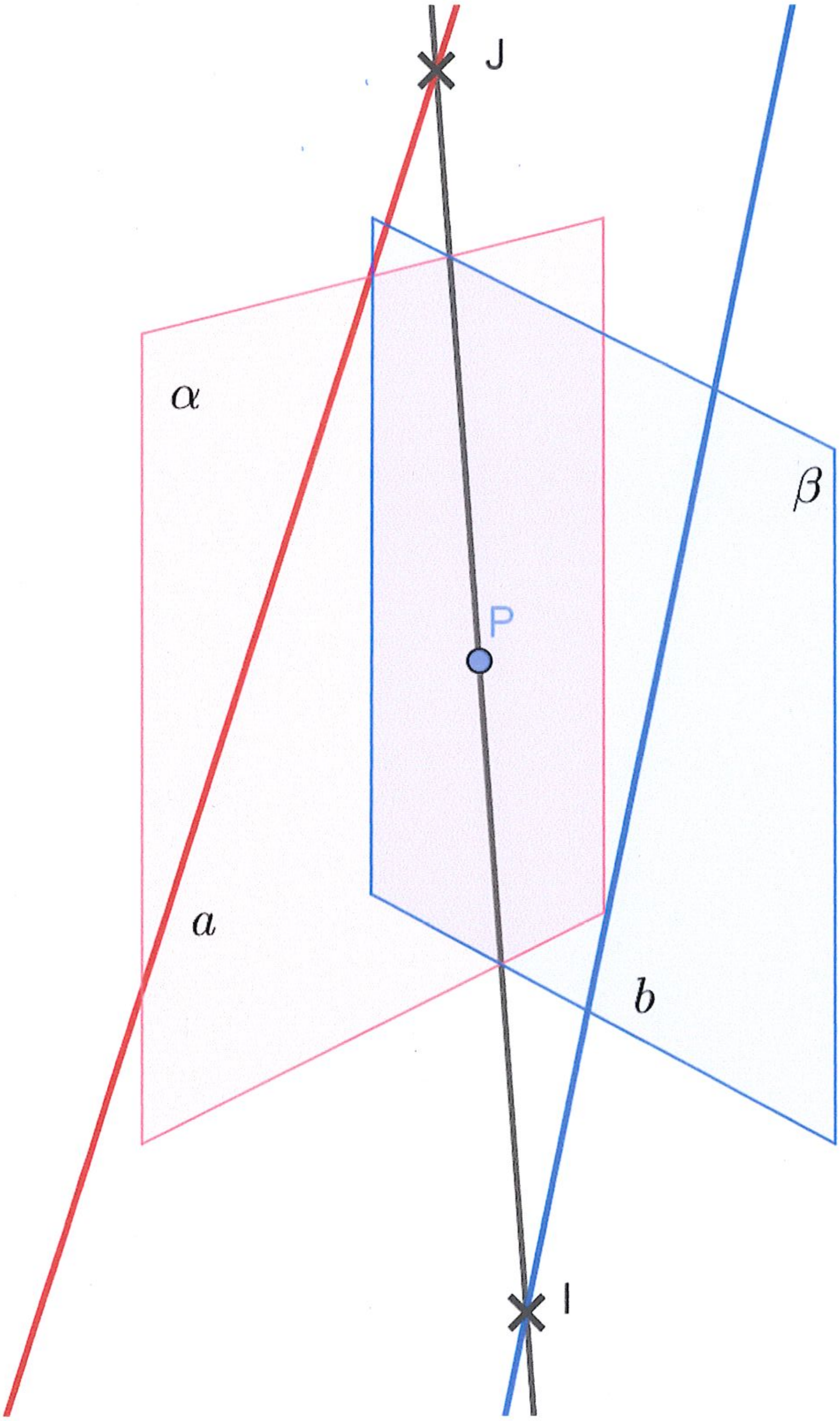
(e) On utilise le produit scalaire

$$\vec{a} : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{5}$$

et $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 - 1 = 3$

$$\vec{b} : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \|\vec{b}\| = 3$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{3\sqrt{5}} \Leftrightarrow \alpha \simeq 1{,}107 \text{ rad.}$$



J
α
β
P
a
b
I

3. Dans l'espace euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{k}, \vec{k})$, on considère la sphère k et le plan π suivants :

$$k \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 20 = 0$$
$$\pi \equiv x + y + z - 3 = 0$$

(a) Déterminer :

i. les coordonnées du centre A et le rayon R de la sphère k

ii. la distance du point A au plan π

(b) Soit le cercle $\mathcal{C}$ intersection du plan π et de la sphère k. Déterminer :

i. le rayon r du cercle $\mathcal{C}$

ii. les coordonnées du centre de ce cercle $\mathcal{C}$

iii. l'équation de la sphère de rayon minimal contenant le cercle $\mathcal{C}$

(a) i) $k \equiv (x^2+2x+1) + (y^2+4y+4) + z^2 = 20+1+4$

$\equiv (x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$

$A : (-1, -2, 0)$ et $R = 5$

ii) Equation de $d \perp \pi$ et $\ni A$:

$$\begin{cases} x = -1 + k \\ y = -2 + k \\ z = k \end{cases}$$

$d \cap \pi \Leftrightarrow (-1+k) + (-2+k) + k - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 3k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = 2$

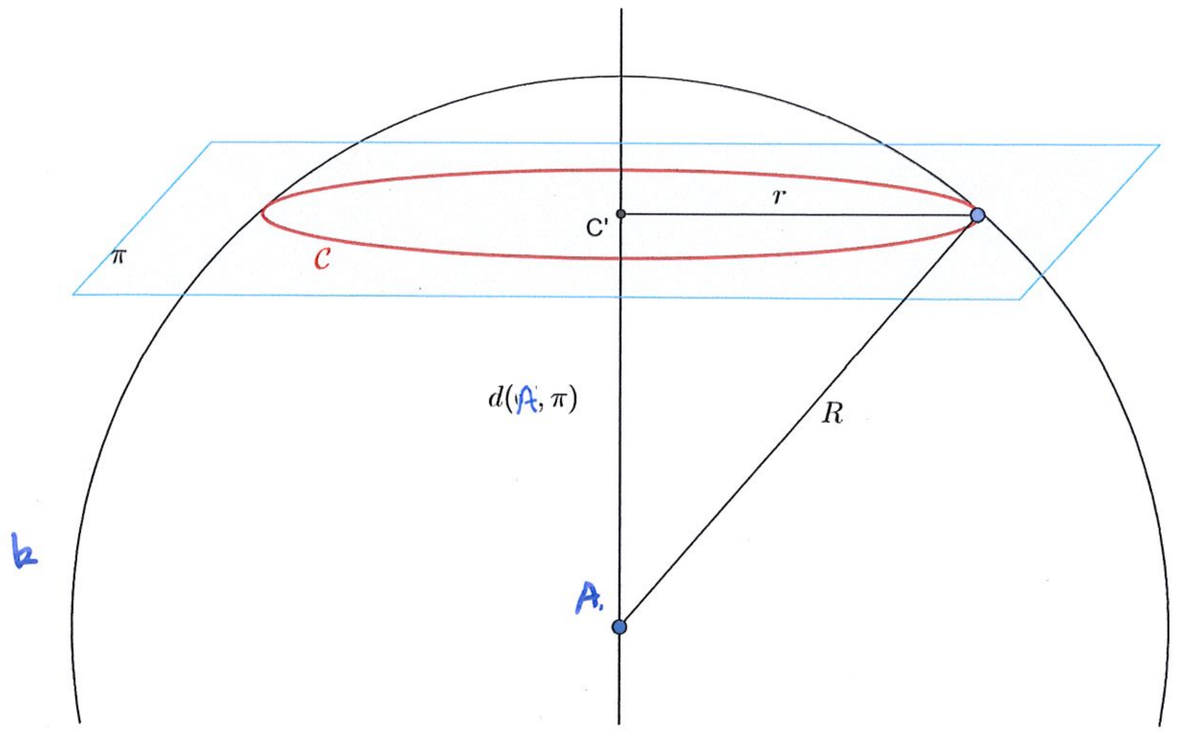
$\Rightarrow I : d \cap \pi : (1, 0, 2)$

$\Rightarrow d(A, I) = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-0)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{3}$

b) Dessin voir annexe

i) $C' = I$ ($\text{car } C' = $ intersection de la $\perp$ à π passant par A (d) et π)

$\Rightarrow r^2 = R^2 - [d(A, \pi)]^2 = 25 - 12 = 13 \Rightarrow r = \sqrt{13}$


r
C'
π
c
d(A, π)
R
k
A.

ii) $C = I : (1,0,2)$

iii) La sphère de rayon minimale est celle de centre C et de rayon r

$$S = (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 13$$

4. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne la sphère $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 62$ et le plan π passant par le point $A(0;1;1)$ et de vecteur normal $\vec{n} : (2, -3, -8)$

   (a) Déterminer une équation cartésienne du plan π

   (b) L'intersection du plan π et de la sphère S est un cercle. Déterminer le centre M de ce cercle et le rayon r de ce cercle

   (c) Soient P et Q deux points de S tels que $P(7, 3, \alpha)$ avec $\alpha > 0$ et $Q(6, \beta, 1)$ avec $\beta > 0$

      i. Déterminer une équation pour chacun des plans tangents à la sphère S aux points P et Q

      ii. Calculer l'angle formé par la droite PQ et le plan tangent à S en Q

(a) $\pi \equiv 2x - 3y - 8z + d = 0$

$A \in \pi \Leftrightarrow 2.0 - 3.1 - 8.1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 11$

$\pi \equiv 2x - 3y - 8z + 11 = 0$

(b) Dessin en annexe

Les caractéristiques de S sont : $C(0,0,0)$ et $R = \sqrt{62}$

M est l'intersection entre π et la droite $\perp$ à π passant par C. Soit d cette droite :

$$d \equiv \begin{cases} x = 2k \\ y = -3k \\ z = -8k \end{cases}$$

$\{M\} = d \cap \pi \Leftrightarrow 2(2k) - 3(-3k) - 8(-8k) + 11 = 0$

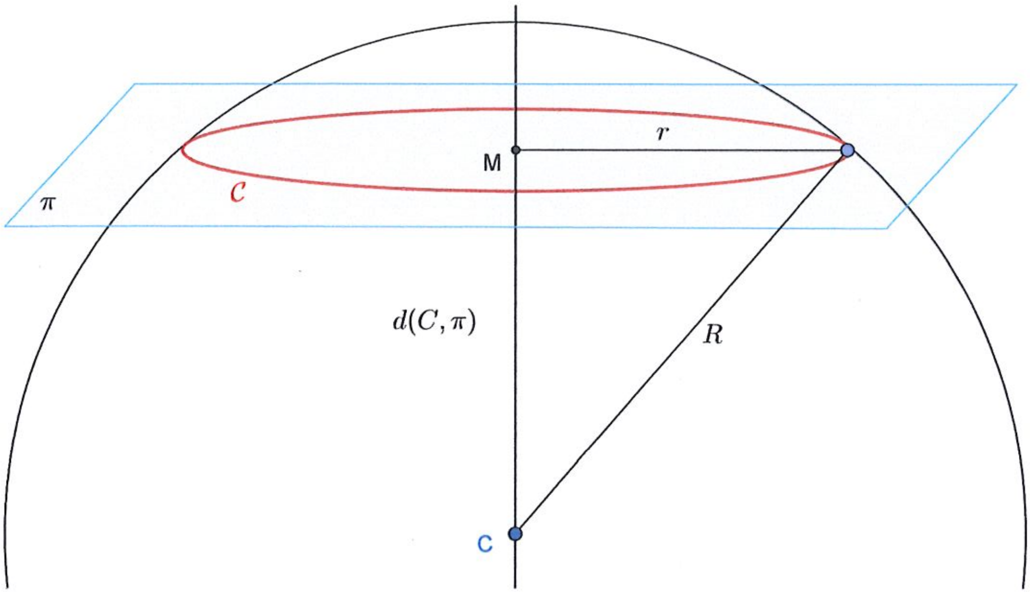
$\Leftrightarrow 77k + 11 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{7}$

$\Leftrightarrow M : \left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{8}{7}\right)$

et $r^2 = R^2 - [d(C, M)]^2$ avec $d(C,M) = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{8}{7}\right)^2}$

$= 62 - \frac{77}{49}$

$\Leftrightarrow r = \frac{3}{7} \sqrt{329}$



r
M
$\mathcal{C}$
π
$d(C,\pi)$
R
C

c) i) P et Q $\in S \iff \begin{cases} 7^2+3^2+\alpha^2 = 62 \\ 6^2+\beta^2+1^2 = 62 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha^2 = 4 \\ \beta^2 = 25 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 5 \end{cases}$ (dessin en annexe)

. $\vec{n}_\alpha = \vec{CP} : \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \alpha \equiv 7x+3y+2z+d=0$

$P \in \alpha \implies d = -62$

$\implies \alpha \equiv 7x+3y+2z-62=0$

. $\vec{n}_\beta = \vec{CQ} : \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \beta \equiv 6x+5y+z+d=0$

$Q \in \beta \iff d = -62$

$\implies \beta \equiv 6x+5y+z-62=0$

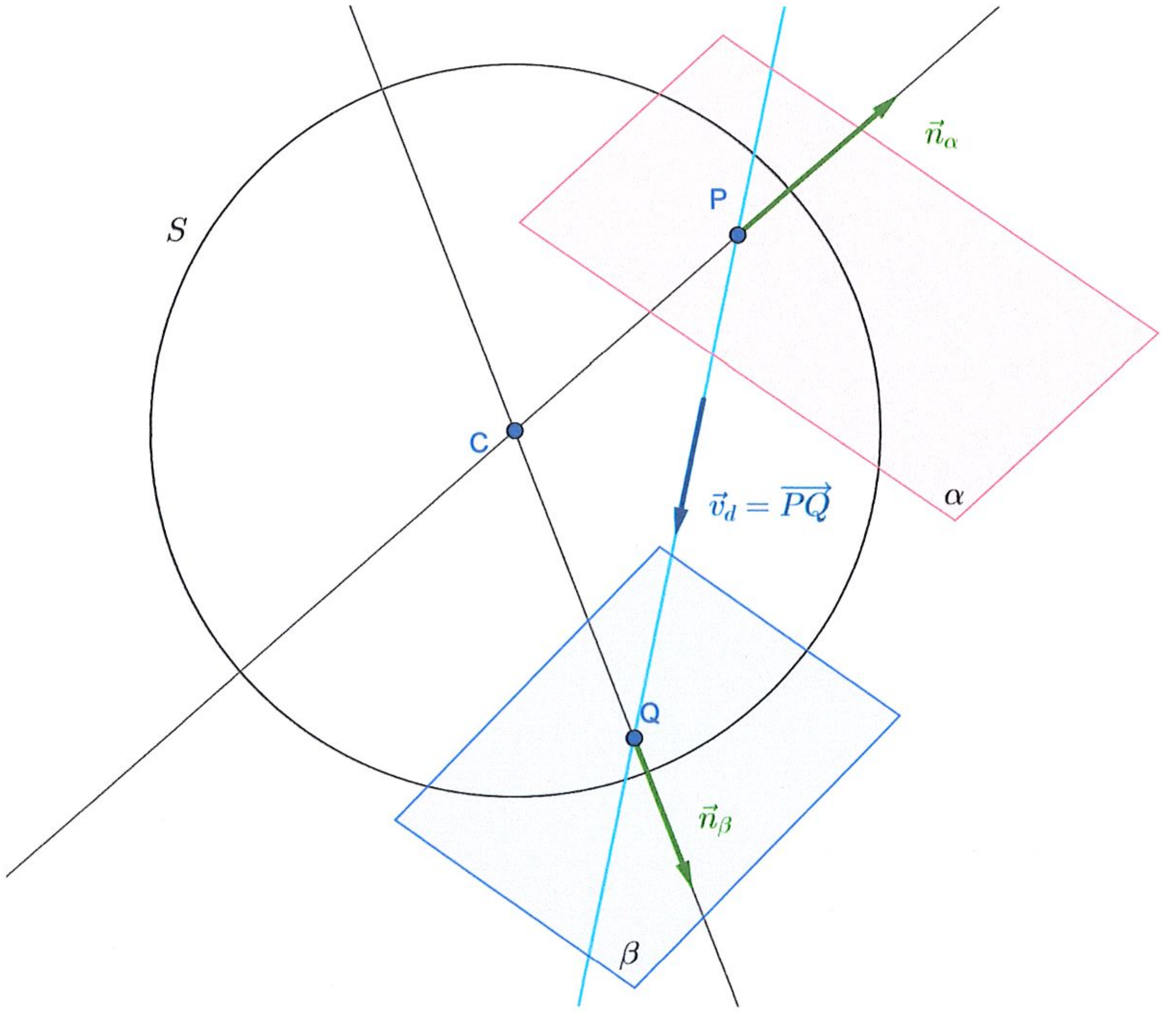
ii) Angle entre PQ et β = angle entre $\vec{PQ}$ et $\vec{n}_\beta$

$\vec{PQ} : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \|\vec{PQ}\| = \sqrt{6}$

$\vec{n}_\beta : \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \|\vec{n}_\beta\| = \sqrt{62}$

et $\vec{PQ} \cdot \vec{n}_\beta = 3$

$\implies \cos \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{6}\sqrt{62}} \iff \alpha \simeq 1{,}41$ rad.



$\vec{n}_\alpha$
P
S
C
$\vec{v}_d = \overrightarrow{PQ}$
α
Q
$\vec{n}_\beta$
β