Fonctions circulaires : Solutions

Exercices de base

1. Déterminer le domaine de définition et le(s) zéro(s) des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = \sin x + \cos x$

dom f : $\mathbb{R}$

$f(x) = 0 \iff \sin x + \cos x = 0$

$\iff \sin x = -\cos x$

$\iff \sin x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\iff \begin{cases} x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi & (\text{imp.}) \\ x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \end{cases}$

$\iff 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\iff x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

   (b) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{1 + \sin x}$

dom f : CE : $1 + \sin x \neq 0 \iff \sin x \neq -1$

$\iff x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

dom f : $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$f(x) = 0 \iff \sin 2x = 0$

$\iff 2x = k\pi$

$\iff x = \frac{k\pi}{2}$

zéro : $x = \frac{k\pi}{2}$ $\quad (k \in \mathbb{Z}$ et $k \neq 3 + 4m \mid m \in \mathbb{Z})$

(c) $f(x) = \cos x + \dfrac{1}{\sin x}$

CE : $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$

dom$_f$: $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

zéro $\cos x + \dfrac{1}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \cos x \sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2 . \cos x \sin x = -1 . 2$

$\Leftrightarrow \sin 2x = -2$ imp $\Rightarrow$ zéro : /

(d) $f(x) = \sqrt{1 - \tan x}$

CE : $1 - \tan x \geq 0 \Leftrightarrow \tan x \leq 1$

$\Leftrightarrow x \in \left] -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4} \right] + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

zéro : $1 - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

$(k \in \mathbb{Z})$

(e) $f(x) = \dfrac{1 - \tan x}{1 - \cot x}$

dom f : $\tan x \ \exists \iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\cot x \ \exists \iff x \neq k\pi$

$1 - \cot x \neq 0 \iff \cot x \neq 1 \iff x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

dom f : $\left\{ \left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

zéro : $f(x) = 0 \iff 1 - \tan x = 0 \iff \tan x = 1$

$\iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (A.R. à cause du domaine.)

(f) $f(x) = \dfrac{1 - \cos 2x}{x \tan x}$

dom f : CE : $\tan x \ \exists \iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\tan x \neq 0 \iff x \neq k\pi$

dom f : $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

zéro : $1 - \cos 2x = 0 \iff \cos 2x = 1$

$\iff 2x = 2k\pi$

$\iff x = k\pi$ (A.R.)

(g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+2\cos x}{1-2\cos x}}$ $\quad\quad T = 2\pi$

$\underline{CE}$ $\quad \dfrac{1+2\cos x}{1-2\cos x} \geq 0$ $\quad$ zéros N : $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

D : $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
N		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
D		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
CE		$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	

dom f : $\left\{ \left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\underline{\text{zéros}}$: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $\quad (\in \text{dom } f)$

(h) $f(x) = \dfrac{-\sqrt{-x^2-2x+3}}{\sqrt{\sin x + \sqrt{3}\cos x - 1}}$

$\underline{CE}$: $\cdot$ $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$ (1)

$\cdot$ $\sin x + \sqrt{3}\cos x - 1 > 0$ (2)

$\underline{(1)}$: $\Delta = 4 + 12 = 16$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4}{-2} \left\langle \begin{array}{l} -3 \\ 1 \end{array} \right.$

x		-3		1	
$CE(1)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(2) Avec les formules en $\tan \frac{x}{2}$ $(=t)$:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \sqrt{3}\,\frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 > 0$$

$\Leftrightarrow$ $2t + \sqrt{3} - \sqrt{3}t^2 - 1 - t^2 > 0$ $\quad$ (car $1+t^2 > 0$)

$\Leftrightarrow$ $-(\sqrt{3}+1)t^2 + 2t + (\sqrt{3}-1) > 0$

$\Delta = 4 + 4(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$

$= 12$

$t_{1,2} = \dfrac{+\cancel{2} \pm \cancel{2}\sqrt{3}}{+\cancel{2}(\sqrt{3}+1)} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{-2} = -2+\sqrt{3} \\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 1 \end{array} \right.$

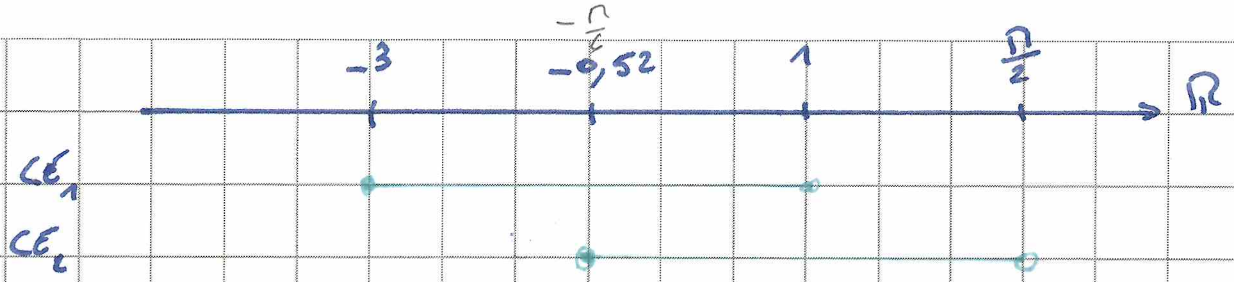
t		$-2+\sqrt{3}$		1	
$CE2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow$ $t \in \,]-2+\sqrt{3}, 1[$

$\Leftrightarrow$ $\tan \frac{x}{2} \in \,]-2+\sqrt{3}, 1[$

$\Leftrightarrow$ $\frac{x}{2} \in \,]-0{,}26 ; \frac{\pi}{4}[\, + k\pi$ $\qquad]-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$

$\Leftrightarrow$ $x \in \,]-0{,}52 ; \frac{\pi}{2}[\, + 2k\pi$ $\qquad]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$



$\Rightarrow \text{dom}_f : \left]-0,52 ; 1\right]$ $\qquad$ $\left]-\frac{\pi}{6} ; 1\right]$

2. Déterminer la période des fonctions suivantes :

(a) $\sin^2 x \cos \frac{3x}{5}$

$\cdot\ \sin^2 x = \sin^2(x+T) \Leftrightarrow \sin x = \pm \sin(x+T)$

$\left.\begin{array}{l} * \sin x = \sin(x+T) \Leftrightarrow T = 2\pi \\ * \sin x = \sin(-x-T) \Leftrightarrow T = \pi \end{array}\right\} T = \pi$

$\cdot\ \cos \frac{3x}{5} \longrightarrow T = \frac{5}{3} 2\pi = \frac{10\pi}{3}$

$\Rightarrow$ PPCM $= 10\pi$

(b) $\tan\left(\frac{2x}{3} + \frac{3\pi}{8}\right) + \sin \frac{8x}{9}$

$\cdot\ \tan\left(\frac{2x}{3} + \frac{3\pi}{8}\right) \longrightarrow T = \frac{3\pi}{2}$

$\cdot\ \sin \frac{8x}{9} \longrightarrow T = \frac{9}{8} \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{4}$

$\Rightarrow$ PPCM $= \frac{9\pi}{2}$

3. Calculer les limites suivantes (si elles existent)

(a) $\lim_{x \to 1} [(3x+2)\cos \pi x]$ $= 5 \cdot (-1) = -5$

(b) $\lim_{x \to \pi} \cot x$ $= \pm \infty$

$\lim_{\pi^-} \cot x = -\infty$

$\lim_{\pi^+} \cot x = +\infty$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x}{4x} = \frac{0}{0}$ FI

$= \frac{3}{4} \lim_{0} \frac{\sin x}{x} = \frac{3}{4}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{0}{0}$ FI $= \lim_{0} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}$

$= 2 \lim_{0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 2}{1 - \cos x} = \frac{1-2}{0^+} = -\infty$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \sin x} = \frac{0}{0}$ FI

$= \lim_{0} \frac{-\cancel{\sin^2} x}{x \cancel{\sin x}} = -1$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{5x \sin x}$ $= \frac{0}{0}$ FI

$= \lim_{0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{5x \sin x (\cos x + 1)}$

$= \lim_{0} \frac{-\cancel{\sin^2 x}\ 1}{5x\ \cancel{\sin x}\ (\cos x + 1)}$

$= \frac{-1}{5 \cdot 2}$

$= -\frac{1}{10}$

(h) $\lim_{x\to -\infty} x \cos \frac{1}{x}$ $= -\infty \cdot 1 = -\infty$

(i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty}$ FI.

$-1 \leq \sin x \leq 1$ (1) ⊛

$\frac{-x}{x^2+1} \geq \frac{x\sin x}{x^2+1} \geq \frac{x}{x^2+1}$

et $\lim_{-\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

$\Rightarrow \lim_{-\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1} = 0$

⊛ $\Leftrightarrow -x \geq x\sin x \geq x$ $(\text{car } x<0)$ (1)(* x)

$\Leftrightarrow \frac{-x}{x^2+1} \geq \frac{x\sin x}{x^2+1} \geq \frac{x}{x^2+1}$) $\div\, x^2+1$

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{0}{0}$ FI

$= \lim_{0} \frac{\cancel{\sin x}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{x^{\cancel{3}\,2}}$

$= \lim_{0} \frac{1-\cos x}{x^2 \cos x} = \frac{0}{0}$ FI

$= \lim_{0} \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{x^2}\cos x\,(1+\cos x)}$

$= \frac{1}{2}$

(k) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\sin x\right)$ $\nexists$

(l) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{3x}$ $= \frac{0}{0}$ FI

$= \frac{2}{3} \lim_{0} \frac{\tan 2x}{2x} = \frac{2}{3}$

(m) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x} = \dfrac{0}{0}$ FI

$$= \lim_{0} \left[\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2x}{\sin 2x}}_{\to 1} \cdot \frac{3\cancel{x}}{2\cancel{x}} \right]$$

$$= \frac{3}{2}$$

(n) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{0}{0}$ FI

$$= \lim_{0} \frac{\overbrace{x}^{\to 1}\,\cancel{\sin x}\,(1+\cos x)}{\sin^{\cancel{2}} x}$$

$$= 2$$

(o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos 2x} = \dfrac{0}{0}$ FI

$= \lim\limits_{0} \dfrac{x^2}{1-(1-2\sin^2 x)} = \lim\limits_{0} \dfrac{x^2}{2\sin^2 x}$

$= \dfrac{1}{2}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + \sin x}{\cos 2x - \cos x} = \dfrac{0}{0}$ FI

$= \lim\limits_{0} \dfrac{2\sin x \cos x + \sin x}{2\cos^2 x - 1 - \cos x}$ (*)

(*) $\Delta = 1 + 8 = 9$ $\cos x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{4} \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right.$

$= \lim\limits_{0} \dfrac{\sin x(\cancel{2\cos x+1})}{(\cancel{2\cos x+1})(\cos x - 1)} = \dfrac{0}{0}$ FI

$= \lim\limits_{0} \dfrac{\cancel{\sin x}(\cos x + 1)}{-\sin^{\cancel{2}} x} = \dfrac{2}{-0} = \pm\infty$

$\lim\limits_{0^-} \dfrac{\sin 2x + \sin x}{\cos 2x - \cos x} = +\infty$

$\lim\limits_{0^+} \dfrac{\sin 2x + \sin x}{\cos 2x - \cos x} = -\infty$

ou SIMPSON (plus rapide) (P. Kohler - Nov 2016)

4. Dériver les fonctions suivantes

(a) $\sin\left(\frac{5x}{6}\right)$

$$\left[\sin \frac{5x}{6}\right]' = \cos \frac{5x}{6} \cdot \left(\frac{5x}{6}\right)'$$

$$= \frac{5}{6} \cos \frac{5x}{6}$$

(b) $\sin^2 x$

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$$

$$= \sin 2x$$

(c) $\dfrac{2}{1+\cos x}$

$$\left(\frac{2}{1+\cos x}\right)' = 2 \cdot \frac{-(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} = \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

(d) $\dfrac{\cos x}{1+\cos^2 x}$

$$\left(\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\right)' = \frac{-\sin x(1+\cos^2 x) + \cos x \, 2\cos x \sin x}{(1+\cos^2 x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin x \cos^2 x + 2\sin x \cos^2 x}{D}$$

$$= \frac{-\sin x + \sin x \cos^2 x}{D}$$

$$= \frac{-\sin x(1-\cos^2 x)}{D}$$

$$= \frac{-\sin^3 x}{(1+\cos^2 x)^2}$$

(e) $\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

$$\left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{}} \quad \frac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\frac{1+\sin x}{\cancel{1-\sin x}}\,(1-\sin x)^{\cancel{2}\,1}}\;(1-\sin x)}\;\cancel{2}\cos x$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}\,(1-\sin x)}$$

$$= \frac{1}{1-\sin x}$$

(f) $\dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$

$$\left(\frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}\right)' = \frac{(\cancel{\cos x}-\cancel{\cos x}+x\sin x)(\cos x + x\sin x) -}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

$$\ldots \frac{(\sin x - x\cos x)(-\cancel{\sin x}+\cancel{\sin x}+x\cos x)}{D}$$

$$= \frac{x\,\cancel{\sin x\cos x}+x^2\sin^2 x - x\,\cancel{\sin x}\cos x + x^2\cos^2 x}{D}$$

$$= \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

(g) $\cot\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$

$$\left(\cot\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}\right)' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}} \cdot \frac{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}\,\sin^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}} \cdot \frac{2x\,x-(x^2+1)}{x^2}$$

$$= -\frac{x^2-1}{D}$$

(h) $x\cos^2 x\sin^3 x$

$$(x\cos^2 x\sin^3 x)' = \cos^2 x\sin^3 x + x\,2\cos x(-\sin x)\sin^3 x + x\cos^2 x\,3\sin^2 x\cos x$$

$$= \cos^2 x\sin^3 x - 2x\cos x\sin^4 x + 3x\cos^3 x\sin^2 x$$

$$= \cos x\sin^2 x\,(\cos x\sin x - 2x\sin^2 x + 3x\cos^2 x)$$

$=$

5. ~~Déterminer la période et~~ étudier la variation des fonctions suivantes

(a) $\sin x - \sin 2x$

• <u>période</u> : $\sin x \to 2\pi$ et $\sin 2x \to \pi$

$\to T = 2\pi$

• $f'(x) = \cos x - 2\cos 2x$

$f'(x) = 0 \iff \cos x - 2(2\cos^2 x - 1) = 0$

$\iff -4\cos^2 x + \cos x + 2 = 0 \quad (1)$

$\Delta = 1 + 32 = 33$

$$\cos x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{-8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \quad (*)$$

(1) se factorise en $-4(\cos x - \cos x_1)(\cos x - \cos x_2)$

x	$-\pi$		$-2{,}205$		$-0{,}593$		$0{,}593$		$2{,}205$		π
$\cos x - \cos x_1$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\cos x - \cos x_2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
-4		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	m	↗	M	↘	m	↗	M	↘	

Les coordonnées des extrémums sont trop complexes à calculer.

(*) $\cos x_1 = \dfrac{1+\sqrt{33}}{8} \iff x_1 = \pm 0{,}593 + 2k\pi$

$\cos x_2 = \dfrac{1-\sqrt{33}}{8} \iff x_2 = \pm 2{,}205 + 2k\pi$

(b) $f(x) = \tan x \cos 2x$ $\qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \;/\; T = \pi$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\cos 2x + 2\tan x\,(-\sin 2x)$$

$$= \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} - 4\,\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\cdot \sin x\,\cancel{\cos x}$$

$$= \frac{(2\cos^2 x - 1) - 4\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x - 1 - 4(1-\cos^2 x)\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{4\cos^4 x - 2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}$$

zéros : N: $\Delta = 4 + 16 = 20 \quad \cos^2 x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$ AR (<0)

$$\cos^2 x = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \iff \cos x = \pm\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2} = \cos x_{1,2}$$

$x_1 \simeq \pm 0,45 + 2k\pi$ ou $x_2 \simeq \pm 2,69 + 2k\pi$

x	$-\pi$		$-2,69$		$-\frac{\pi}{2}$		$-0,45$		$0,45$		$\frac{\pi}{2}$		$2,69$		π
$\cos x - \cos x_1$		+		+		+	0	−	0	+		+		+	
$\cos x - \cos x_2$		−	0	+		+		+		+		+	0	−	
$\cos^2 x$		+		+	0	+		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	0	+	‖	+	0	−	
$f(x)$		↘	m	↗		↗	M	↘	m	↗		↗	M	↘	

Les coordonnées des ext. sont trop complexes à calculer

5. Etudier complètement les fonctions suivantes (on ne demande pas la dérivée seconde)

(a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\tan x}$

- dom f : $\begin{cases} 1+\tan x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ \tan x \ \exists \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$
- période : $2\pi \Rightarrow$ dom f : $\left\{-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right\} + 2k\pi$
- zéro : $x = k\pi$
- parité : qcq
- AV : $\lim\limits_{\pm\frac{\pi}{2}} f(x) = 0$ AV ✗

$\lim\limits_{-\frac{\pi}{4}} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{\frac{3\pi}{4}} f(x) = \pm\infty$

$\Rightarrow AV_1 \equiv x = -\frac{\pi}{4}$ et $AV_2 \equiv x = \frac{3\pi}{4}$

- AO, AH ✗
- $f'(x) = \dfrac{\cos x(1+\tan x) - \sin x \frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan x)^2}$

$= \dfrac{\cos x + \sin x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}}{D}$

$= \dfrac{\cos^3 x + (\sin x \cos^2 x - \sin x)}{\cos^2 x(1+\tan x)^2}$ $\rightarrow -\sin^2 x$

$= \dfrac{\cos^3 x + \sin(\cos^2 x - 1)}{D}$

$= \dfrac{\cos^3 x - \sin^3 x}{D}$

$= \dfrac{(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x)}{D}$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x)}{\cos^2 x \,(1 + \tan x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff \cos x = \sin x \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos x - \sin x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0		$-$	$-$		$-$	
$(1 + \dots)$		$+$		$+$		$+$		$+$			$+$	$+$		$+$	
$\cos^2 x$		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$(1 + \tan x)^2$		$+$		$+$	$\pm\infty$	$+$	0	$+$		$+$	$\pm\infty$	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	?	$+$	AV	$+$	0	$-$	?	$-$	AV	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	?	$\nearrow$		$\nearrow$	M	$\searrow$	?	$\searrow$		$\searrow$	

$\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

(b) $f(x) = \dfrac{3\sin x}{2\sin x - 1}$

- CE : $2\sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

  dom f : $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

- période : 2π
- zéros : $x = k\pi$
- AV : $\lim\limits_{\frac{\pi}{6}} f(x) = \lim\limits_{\frac{5\pi}{6}} f(x) = \pm\infty$

  $\rightarrow$ AV $\equiv x = \frac{\pi}{6}$ et AV $\equiv x = \frac{5\pi}{6}$

- $f'(x) = \dfrac{3\cos x(2\sin x - 1) - 6\sin x\cos x}{(2\sin x - 1)^2}$

  $= \dfrac{-3\cos x}{(2\sin x - 1)^2}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
N		+	0	−		−	0	+		+	
D		+		+	0	+		+	0	+	
$f'(x)$		+	0	−	AV	−	0	+	AV	+	
$f(x)$		↗	M	↘		↘	m	↗		↗	
			$(-\frac{\pi}{2}, 1)$				$(\frac{\pi}{2}, 3)$				

(c) $f(x) = \sin^2 x \cos x$

- dom f : $\mathbb{R}$
- période : 2π
- zéros : $\frac{k\pi}{2}$
- paire
- AV, AH, AO —
- $f'(x) = 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$

$$= \sin x \left(2\cos^2 x - (1-\cos^2 x)\right)$$

$$= \sin x \left(3\cos^2 x - 1\right)$$

$x = k\pi$

$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm 0{,}955 + 2k\pi \\ x = \pm 2{,}186 + 2k\pi \end{cases}$$

x	0		$0{,}955$		$2{,}186$		π
$\sin x$	0	$+$		$+$		$+$	0
$\sqrt{3}\cos x - 1$		$+$	0	$-$		$-$	
$\sqrt{3}\cos x + 1$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	M

(d) $\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

- dom f : $\mathbb{R}$
- période 2π
- zéros : $x = k\pi$
- AV, AH, AO —
- impaire
-
- $f'(x) = \dfrac{\cos x\,(1+\cos^2 x) - \sin x\,(2\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos^2 x)^2}$

$= \dfrac{\cos x + \cos^3 x + 2\sin^2 x \cos x}{D}$

$= \dfrac{\cos x + \cos^3 x + 2(1-\cos^2 x)\cos x}{D}$

$= \dfrac{\cos x + \cos^3 x + 2\cos x - 2\cos^3 x}{D}$

$= \cos x \,\dfrac{(3 - \cos^2 x)}{D}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	M $(\frac{\pi}{2}, 1)$	$\searrow$	

2 Mouvement harmonique

1. Déterminer l'amplitude, la vitesse angulaire, le décalage temporel, la phase, la période, la fréquence et le décalage vertical des fonctions suivantes :

   (a) $f(t) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}t + 2\right)$

$A = 1$

$\omega = \frac{3\pi}{4}$

$t_d \left\{ \frac{3\pi}{4} t_d + 2 = 0 \right.$

$\Leftrightarrow t_d = -\frac{8}{3\pi}$

$\varphi = 2$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8}{3}$

$f = \frac{1}{T} = \frac{3}{8}$

$B = 0$

   (b) $f(t) = 2\sin(2t - 5)$

$A = 2$

$\omega = 2$

$t_d \left\{ 2t_d - 5 = 0 \right.$

$\Leftrightarrow t_d = \frac{5}{2}$

$\varphi = -5$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$

$f = \frac{1}{\pi}$

$B = 0$

(c) $f(t) = 1 + 3\sin\left[\frac{\pi}{8}(t-2)\right]$

$A = 3$

$\omega = \frac{\pi}{8}$

$t_d \left\{ \frac{\pi}{8}(t_d - 2) = 0 \right.$

$\Leftrightarrow t_d = 2$

$\varphi = -\frac{\pi}{4}$

$T = 16$

$f = \frac{1}{16}$

$B = 1$

(d) $f(t) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{3\pi}{2}\right)$

$A = -1$

$\omega = \frac{\pi}{5}$

$t_d \left\{ \frac{\pi}{5} t_d + \frac{3\pi}{2} = 0 \right.$

$\Leftrightarrow t_d = -\frac{15}{2}$

$\varphi = \frac{3\pi}{2}$

$T = 10$

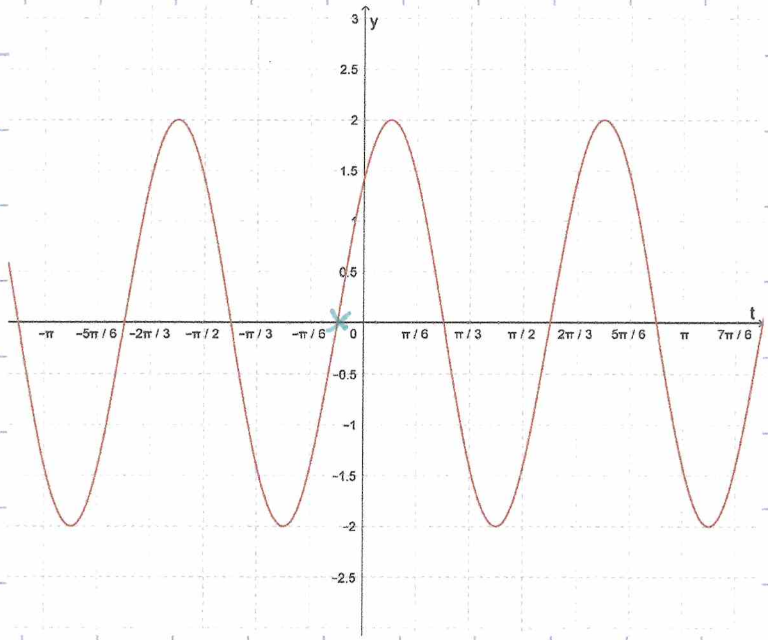
$f = \frac{1}{10}$

$B = 2$

$* \; t_d$

2. Associer à chaque graphe suivant son expression analytique et en préciser ses caractéristiques (l'amplitude, la vitesse angulaire, le décalage temporel, la phase, la période, la fréquence et le décalage vertical).

(a) $f(t) = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ - (b)



$A = 2$

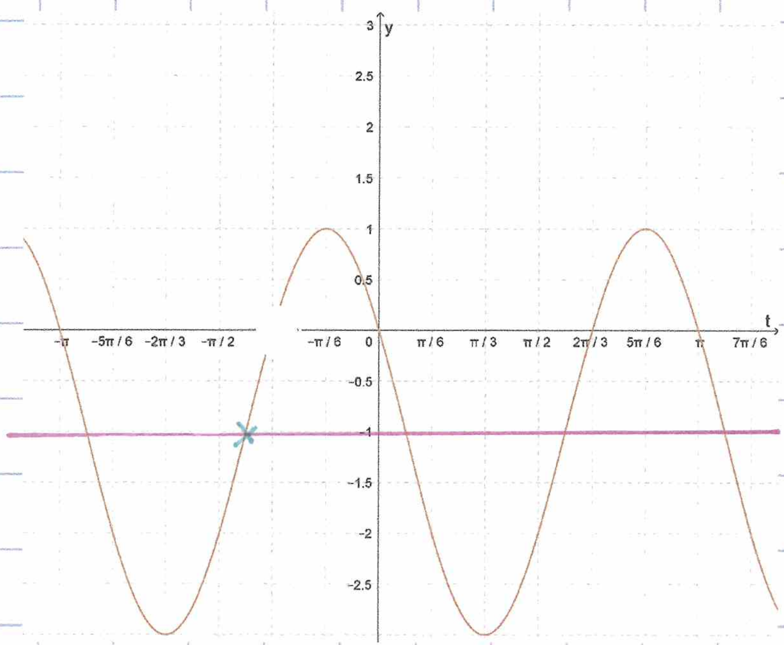
$T = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega = 3$

$B = 0$

$t_d = -\frac{\pi}{12} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

$T = \frac{2\pi}{3} \rightarrow f = \frac{3}{2\pi}$

(b) $f(t) = 2\sin\left(2t + \frac{5\pi}{6}\right) - 1$ - (d)



$A = 2$

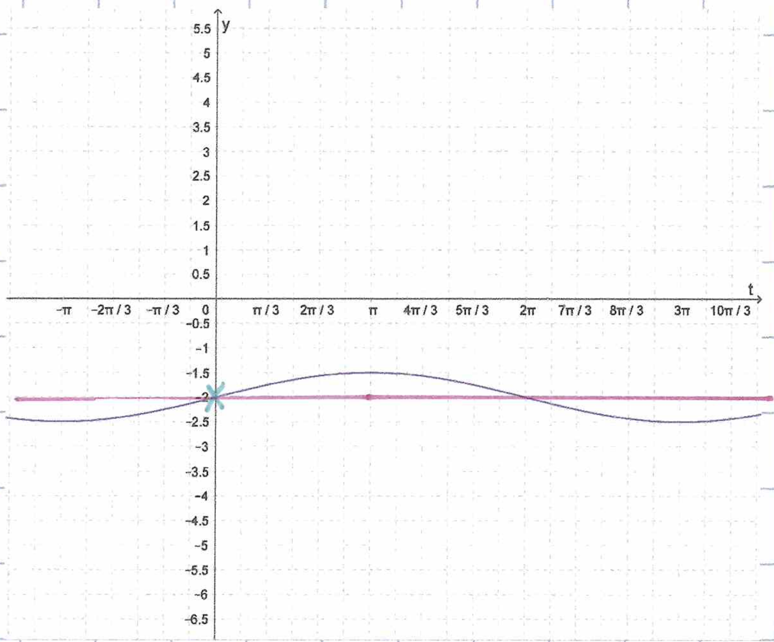
$B = -1$

$T = \pi \Rightarrow \omega = 2$

$t_d = -\frac{5\pi}{12} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}$

$T = \pi \Rightarrow f = \frac{1}{\pi}$

(c) $f(t) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right) - 2$ - (a)



$A = \frac{1}{2}$

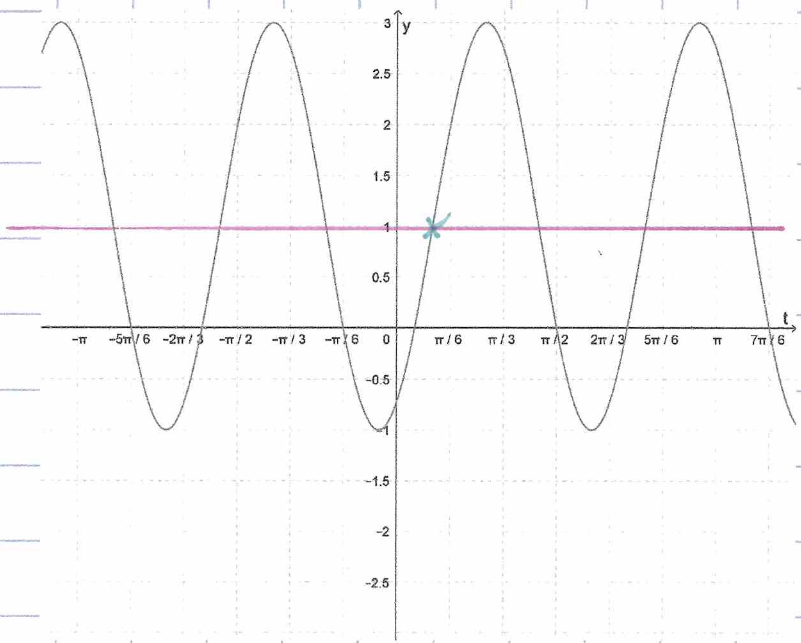
$B = -2$

$T = 4\pi \Rightarrow \omega = \frac{1}{2}$

$t_d = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$T = 4\pi \rightarrow f = \frac{1}{4\pi}$

(d) $f(t) = 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ - (c)



$A = 2$

$B = 1$

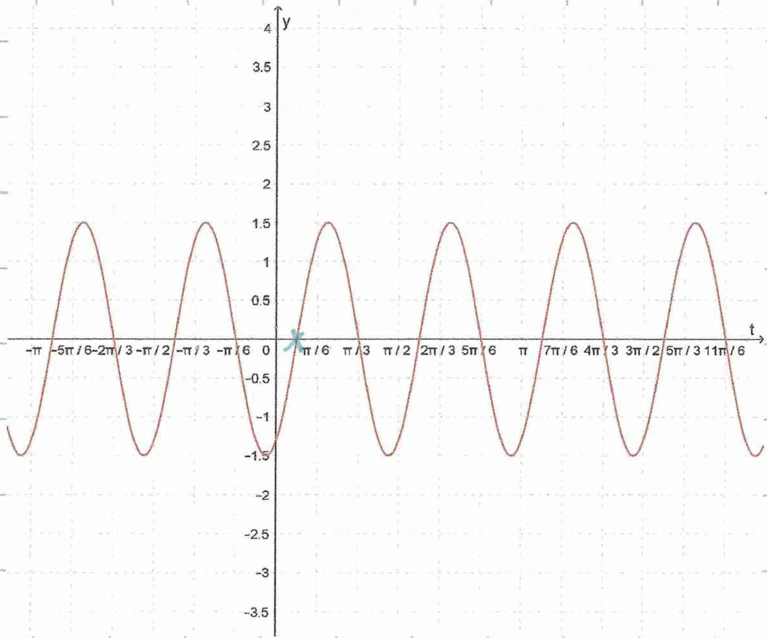
$T = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega = 3$

$t_d = \frac{\pi}{9} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$

$T = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow f = \frac{3}{2\pi}$

3. Trouver l'expression analytique des fonctions représentées ci-dessous :

(a)



$A = \dfrac{y_M - y_m}{2} = 1{,}5$

$B = \dfrac{y_M + y_m}{2} = 0$

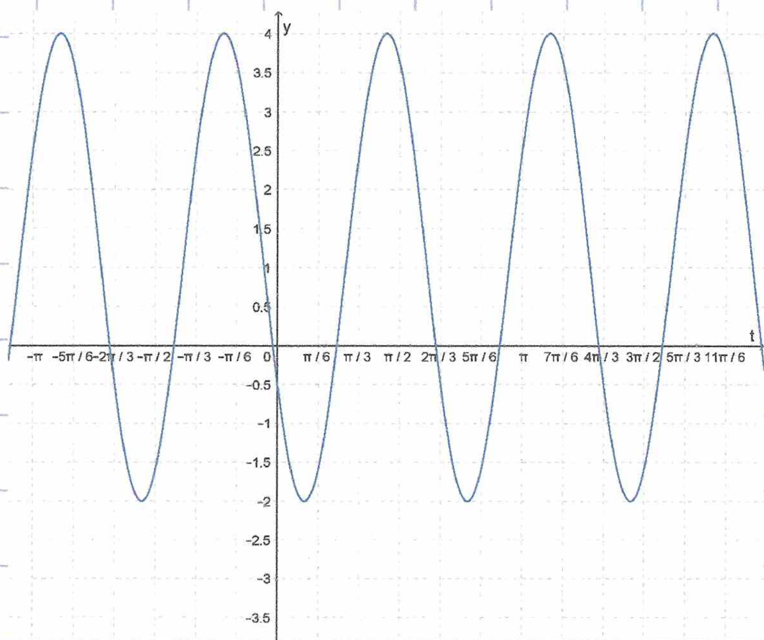
$t_d = \dfrac{\pi}{12}$, $T = \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \omega = 4$

$\varphi = -t_d \cdot \omega = -\dfrac{\pi}{3}$

$$f(t) = 1{,}5 \sin\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)$$

(b)



$A = 3$

$B = 1$

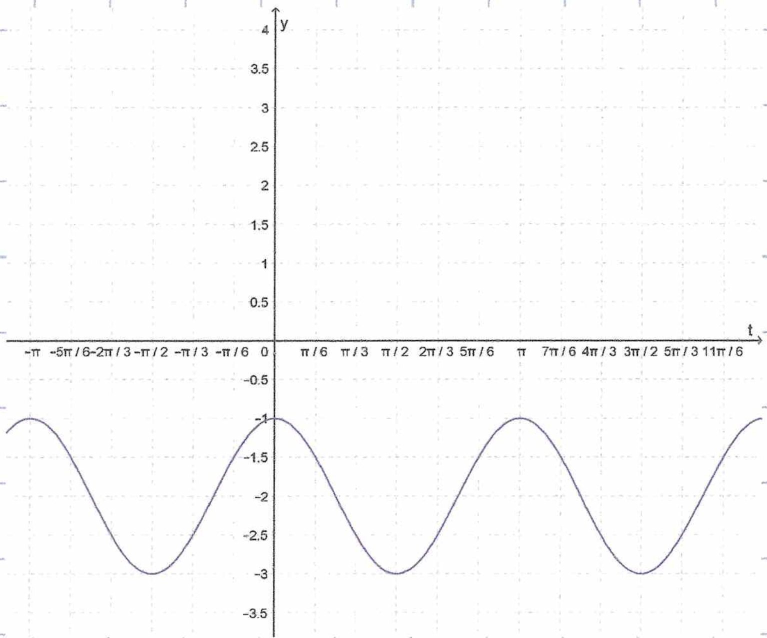
$t_d = \dfrac{7\pi}{18}$

$T = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega = 3$

$\varphi = -\dfrac{7\pi}{6}$

$$f(t) = 3 \sin\left(3t - \frac{7\pi}{6}\right) + 1$$

(c)



$A = 1$

$B = -2$

$t_d = -\frac{\pi}{4}$

$T = \pi \Rightarrow \omega = 2$

$\Rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{2}$

$$f(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) - 2$$

4. On considère les deux fonctions suivantes

$$f(x) = 2 + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad g(x) = \frac{3}{2}$$

(a) Résoudre algébriquement $f(x) = g(x)$.

$$2 + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2} \iff \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\iff \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$$

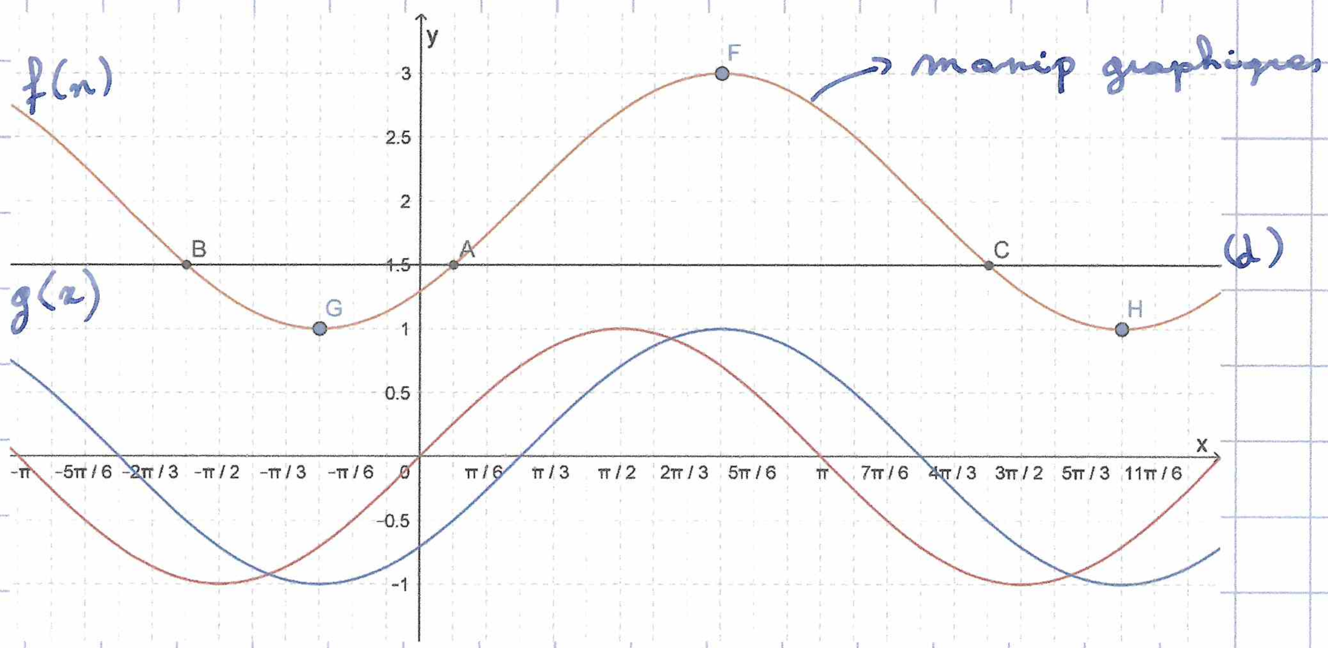
$$S : \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12} \right\} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(b) Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) < g(x)$?

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{1}{2} \overset{C.T.}{\Longleftrightarrow} -\frac{5\pi}{6} < x - \frac{\pi}{4} < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{7\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad (\text{entre A et B})$$

(c) A partir du graphe de $\sin x$, esquisser le graphe de $f(x)$ par manipulations graphiques de fonction.



(d) Dans le même repère, dessiner le graphe de $g(x)$.

(e) Vérifier sur le graphique les solutions de l'équations $f(x) = g(x)$. (A, B, C)

(f) Calculer les coordonnées des extrémas de la fonction $f(x)$ et les indiquer sur le graphique.

<u>Ext</u> $\Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1 \Longleftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Longleftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad (G, H, F, \ldots)$

5. Trouver dans chacun des cas suivants une fonction du type $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + B$ qui représente la variation de la température durant le jour, t étant le temps en heures, $f(t)$ la température en °C et t=0 correspondant à minuit :

(a) La température maximale est de 10°C, et la température minimale de -10°C est atteinte à 4 heures du matin.

$$A = \frac{10-(-10)}{2} = 10 \qquad B = \frac{10-10}{2} = 0$$

$$T = 24 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{12} \qquad t_d = 4+6 = 10$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\varphi}{\omega} = 10 \Leftrightarrow \varphi = -\frac{10\pi}{12}$$

$$f(t) = 10\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{10\pi}{12}\right)$$

(b) La température varie entre 10°C et 30°C, et la température moyenne de 20°C est observée la première fois à 9 heures du matin.

$$A = 10 \qquad B = 20 \qquad T = 24 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{12}$$

$$t_d = 9 \qquad \Leftrightarrow -\frac{\varphi}{\omega} = 9 \Leftrightarrow \varphi = -\frac{3\pi}{4}$$

$$f(t) = 10\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{3\pi}{4}\right) + 20$$

(c) La température maximale de 28°C est atteinte à 2 heures de l'après-midi, et la température moyenne de 20°C est notée 6 heures plus tard.

$$B = 20 \text{ et } T_{max} = 28 \Rightarrow A = 8$$

$$\omega = \frac{\pi}{12} \qquad t_d = 14-6 = 8 \Rightarrow \varphi = -\frac{2\pi}{3}$$

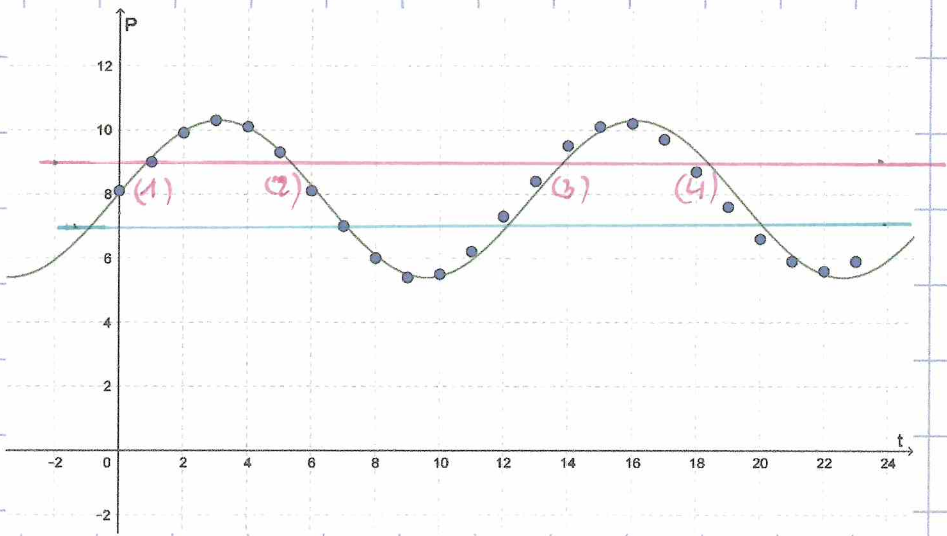
$$f(t) = 8\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{2\pi}{3}\right) + 20$$

$h(x) = 20 + 8\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\ x - 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right)$
$g(x) = 20 + 10\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\ x - \frac{\pi}{4}\right)$
$f(x) = 10\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\ x - 10 \cdot \frac{\pi}{12}\right)$
x
y

6. Lorsqu'un fleuve se jette dans l'océan, la profondeur de ce fleuve varie en fonction des marées. Le tableau suivant donne la profondeur (en m) de la Tamise, à Londres, sur une durée de 24 heures.

Heure	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Profondeur	8,1	9	9,9	10,3	10,1	9,3	8,1	7	6	5,4	5,5	6,2
Heure	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Profondeur	7,3	8,4	9,5	10,1	10,2	9,7	8,7	7,6	6,6	5,9	5,6	5,9

(a) Reporter les données sur un graphique avec le temps sur l'abscisse et la profondeur sur l'ordonnée.



(b) Déterminer, sur base du graphique, une fonction $P(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + B$ approchant au mieux les données du tableau.

$A = \dfrac{10,3 - 5,4}{2} = 2,45$ $\qquad$ $B = \dfrac{10,3 + 5,4}{2} = 7,85$

$T = 16 - 3 = 13 \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{13}$ $\qquad$ $\varphi \simeq 0$

$P(t) = 2,45 \sin \dfrac{2\pi t}{13} + 7,85$

(c) A quelles heures de la journée, le niveau de l'eau vaut-il 9 m ? Vérifier graphiquement les calculs réalisés.

$P(t) = 9 \Leftrightarrow 7,85 + 2,45 \sin \dfrac{2\pi}{13} t = 9 \Rightarrow \sin \dfrac{2\pi}{13} t = 0,47$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\pi}{13} t = 0,488 + 13k \\ \dfrac{2\pi}{13} t = 2,653 + 13k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 13k \\ t = 5,5 + 13k \end{cases}$

$k = 0 \Rightarrow (1) \,\&\, (2)$ $\qquad$ $k = 1 \Rightarrow (3) \,\&\, (4)$

(d) Si un bateau a besoin d'au moins 7 m d'eau pour naviguer en toute sécurité sur la Tamise, déterminez graphiquement les intervalles de temps pendant lesquels la navigation n'est pas sûre. Vérifier les résultats par calcul.

$P(t) > 7 \iff t \in \left]-1, 7\right[\cup \left]12, 20\right[$

$P(t) > 7 \iff 2{,}45 \sin \frac{2\pi}{13} t + 7{,}85 \geq 7$

$\iff \sin \frac{2\pi}{13} t > -0{,}35$

$CT \rightarrow -0{,}35 < \frac{2\pi t}{13} < 3{,}51 \quad + k.13$

$\iff -0{,}72 < t < 7{,}26 \quad + 13k$

$\rightarrow \left]-0{,}72 ; 7{,}26\right[\cup \left]12{,}28 ; 20{,}26\right[$

7. Tension artérielle

A tout moment notre cœur bat : la pression sanguine augmente pour décroître ensuite entre deux battements. Les maximum et minimum de pression sanguine portent respectivement les noms de pression systolique et diastolique. La lecture de notre pression sanguine, à l'aide d'un tensiomètre, donne deux nombres correspondant aux pressions systolique/diastolique. Une lecture 12/8 est considérée comme normale.

La pression sanguine d'une personne est modélisée par la fonction $p(t) = 11,5 + 2,5 \sin 160\pi t$ dans laquelle $p(t)$ est la pression en cm Hg et t est le temps exprimé en minutes.

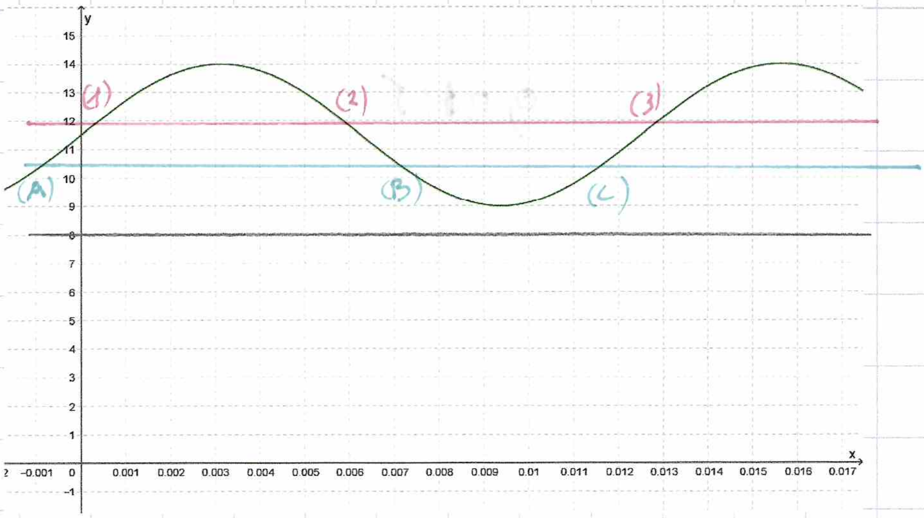
(a) Quelle est la période de $p(t)$?

$\omega = 160\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{80}$ min

(b) Quel est le nombre de battements par minute ?

$f = \frac{1}{T} = 80 \text{ min}^{-1}$

(c) Représenter graphiquement la fonction « pression sanguine ».



(d) A quels moments la pression sanguine vaut-elle 12 ? 8 ? 10 ;25 ?. Justifier les résultats par calcul.

graph : 12 : $t = 0,0005$; $0,006$; $0,0113$

8 : —

10,25 : $t = 0,0075$; $0,0115$; $0,0195$

calc : voir page suivante.

$p(t) = 12 \iff 11{,}5 + 2{,}5 \sin 160\pi t = 12$

$\iff \sin 160\pi t = 0{,}2$

$\iff 160\pi t = \begin{cases} 0{,}2 + \frac{1}{80} k \\ 2{,}94 + \frac{1}{80} k \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t = 0{,}0004 + \frac{k}{80} \ (1) & (k=1 \to t = 0{,}0129)\ (3) \\ t = 0{,}006 + \frac{k}{80} \ (2) & (k=1 \to t = 0{,}0185) \end{cases}$

$p(t) = 8 \iff 11{,}5 + 2{,}5 \sin 160\pi t = 8$

$\iff \sin 160\pi t = -1{,}4 \implies \text{imp}$

$p(t) = 10{,}25 \iff \sin 160\pi t = -0{,}5$

$\iff \begin{cases} 160\pi t = 3{,}66 + \frac{k}{80} \\ 160\pi t = 5{,}76 + \frac{k}{80} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t = 0{,}0073 + \frac{k}{80} & (B) \\ t = 0{,}0115 + \frac{k}{80} & (C) \end{cases}$

8. Rythme circadien

La variation de température du corps humain est un exemple de rythme circadien, processus biologique qui se répète approximativement toutes les 24 heures. La température est maximale vers 17h et minimale vers 5 h. On mesure le temps (t) en heures, $t = 0$ correspondant à minuit. On note $T(t)$ la température du corps (en °C) à l'instant t.

On suppose que la température minimale d'un individu donné est de 36,83°C et que sa température maximale est de 37,17°C.

(a) Déterminer la fonction $T(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + B$ qui modélise la situation.

Entre min et max $\rightarrow \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2(17-5) = 24$

$\Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{12}$

$A = \frac{37{,}17 - 36{,}83}{2} = 0{,}17$ et $B = 37$

$t_d = 5+6 = 11 \Rightarrow \varphi = -t_d\,\omega = -\frac{11\pi}{12}$

$T = 0{,}17\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{11\pi}{12}\right) + 37$

(b) A quels moments de la journée la température de cet individu est-elle de 37°C ?

$T = 37 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{11\pi}{12}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 11 \\ t = 23 \end{cases}$

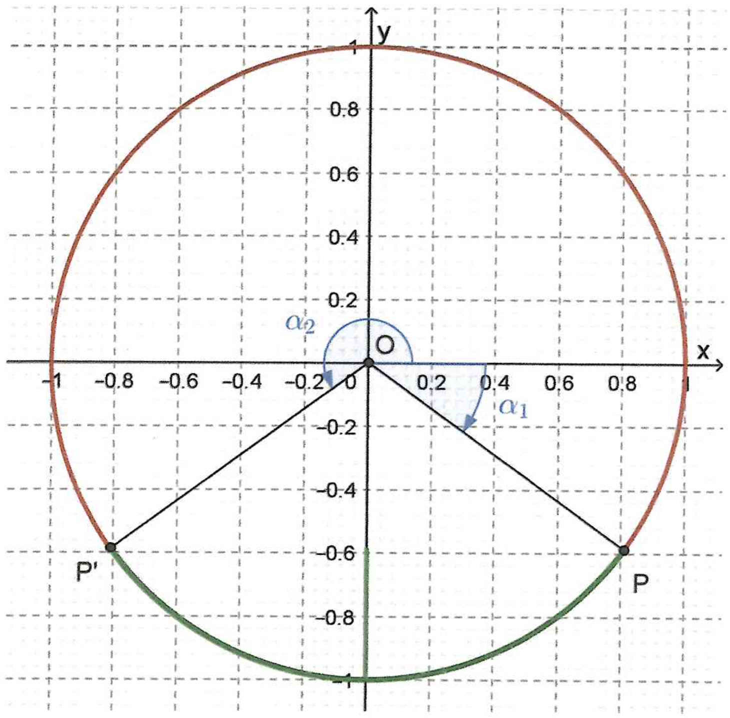
(c) Quand sa température est-elle inférieure ou égale à 36,9°C ?

$T < 36{,}9\,°C \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{11\pi}{12}\right) \leq -0{,}588$

$\Leftrightarrow 3{,}77 \leq \frac{\pi}{12}t - \frac{11\pi}{12} \leq 5{,}65$ (*)

$\Leftrightarrow 1{,}4 \leq t \leq 8{,}6\ [24]$

voir page suivante



La solution est représentée en vert sur la figure ci-contre.

La machine donne $\alpha_1 = \sin^{-1}(-0,588)$
$\simeq -0,629$

La deuxième solution est $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$
$= \pi - (-0,629)$
$\simeq 3,77$

Si l'on écrit la solution, elle est donc

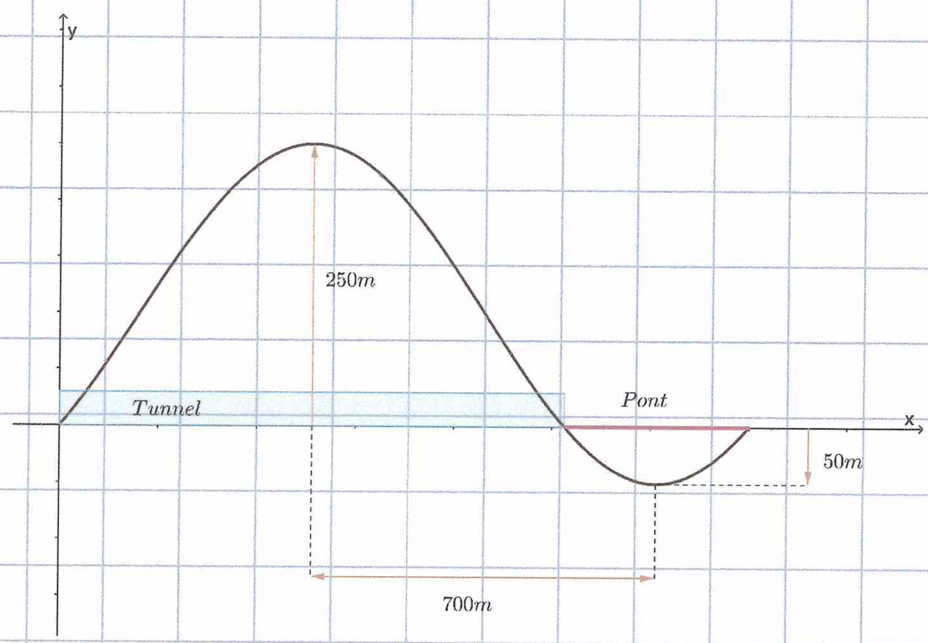
$[\,3,77\ ;\ -0,629\,]$ ce qui n'a pas de sens

Il faut l'écrire :

$[\,3,77\ ;\ 2\pi - 0,629\,]$

$= [\,3,77\ ;\ 5,65\,]$ qui a du sens

9. La coupe d'une montagne a un profil sinusoïdal et on décide d'y construire une voie ferrée comme indiqué dans le croquis ci-dessous :



(a) Trouvez des expressions pour les paramètres A, ω, φ et B qui correspondent avec le profil $y = f(x)$ du type :

$$f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B$$

et avec les mesures indiquées sur le croquis. Expliquer le raisonnement.

$y_{min} = -50$ et $y_{max} = 250 \Rightarrow \begin{cases} A = 150 \\ B = 100 \end{cases}$

$\frac{T}{2} = 700 \Leftrightarrow T = 1400 \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{700}$

$\varphi = ?$ on $x = 0$, $y = 0 \Rightarrow 0 = 150\sin(0 + \varphi) + 100$

$\Leftrightarrow \sin\varphi = -\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \varphi \simeq -0,73$

$\Rightarrow f(x) = 150\sin\left(\frac{\pi}{700}x - 0,73\right) + 100$

(b) Donnez une expression pour la longueur t_1 du tunnel et p_1 du pont (sur l'axe y = 0), en fonction des paramètres A, ω, φ et B. Calculez ensuite la valeur de t_1 et de p_1 à 1 mètre près.

$$f(x) = 0 \iff 150 \sin\left(\frac{\pi x}{700} - 0,73\right) + 100 = 0$$

$$\iff \sin\left(\frac{\pi x}{700} - 0,73\right) = -\frac{2}{3}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\pi x}{700} - 0,73 = -0,73 & \iff x = 0 + kT \\ \frac{\pi x}{700} - 0,73 = 3,87 & \iff x = 1025 + kT \end{cases}$$

$t_1 = 1025$ m et $p_1 = 1400 - 1025 = 375$ m

(c) On décide alors de rehausser la trajectoire de la voie ferrée de 50 mètres. Calculez la nouvelle valeur de t_2 du tunnel et p_2 du pont à 1 mètre près.

$$f(x) = 50 \iff 150 \sin\left(\frac{\pi x}{700} - 0,73\right) + 100 = 50$$

$$\iff \sin\left(\frac{\pi x}{700} - 0,73\right) = -\frac{1}{3}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\pi x}{700} - 0,73 = -0,34 & \iff x = 87 \\ \frac{\pi x}{700} - 0,73 = 3,48 & \iff x = 938 \end{cases}$$

$t_2 = 851$ m $p_2 = 1400 - 938 = 462$ m

3. Exercices récapitulatifs

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$ et $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

   (a) i. Montrer que f est périodique de période 2π ;

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos 2(x+2\pi) - \cos(x+2\pi)$$
$$= \frac{1}{2}\cos(2x+4\pi) - \cos x$$
$$= \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$$

   ii. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

$$f(-x) \stackrel{?}{=} f(x)$$
$$\frac{1}{2}\cos(-2x) - \cos(-x) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$$
$$\frac{1}{2}\cos 2x - \cos x = \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$$

   (b) i. Déterminer la fonction dérivée de f ;

   ii. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \sin x(-2\cos x + 1)$

   iii. Dresser le tableau de variation de f sur $[O, \pi]$

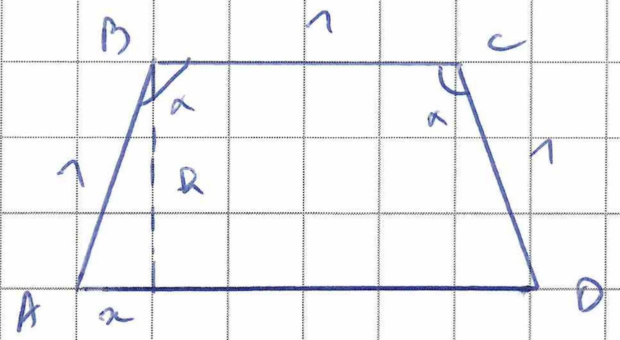
i) $f'(x) = -\sin 2x + \sin x$

ii) $= -2\sin x\cos + \sin x$

$= \sin x(-2\cos x + 1)$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

2. On considère un trapèze $ABCD$ tel que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DCB}$ aient la même mesure α.
Déterminer les valeurs de α pour que le trapèze $ABCD$ ait une aire maximale sachant que les cotes AB, BC et CD mesurent un mètre.



$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

$$= \frac{1 + (1+2x)}{2}\, h$$

$$= (1+x)\, h$$

$$h = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$$

$$x = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$$

$$A = (1 - \cos\alpha)\sin\alpha$$

$$A' = \sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)\cos\alpha$$

$$= \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos\alpha$$

$$= -\cos 2\alpha + \cos\alpha$$

$$= -2\cos^2\alpha + 1 + \cos\alpha$$

$$A' = 0 \iff \Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\cos\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{-4} < \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \to \alpha = \frac{2\pi}{3} \end{matrix}$$

3. Soit f la fonction définie sur par $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x + 1$

(a) Etudier la parité de f ;

$f(-x) = \sin^2(-x) - \sqrt{3}\sin(-x) + 1$

$= [-\sin x]^2 + \sqrt{3}\sin x + 1$

$= \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + 1 \rightarrow$ qcq

(b) i. Montrer que f est 2π périodique

$f(x+2\pi) = \sin^2(x+2\pi) - \sqrt{3}\sin(x+2\pi) + 1$

$= \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x + 1$

$= f(x) \rightarrow T = 2\pi$

ii. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

C'est un intervalle de longueur 2π

(c) i. Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$

On a $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

Dès lors $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos^2 x - \sqrt{3}\cos x + 1$

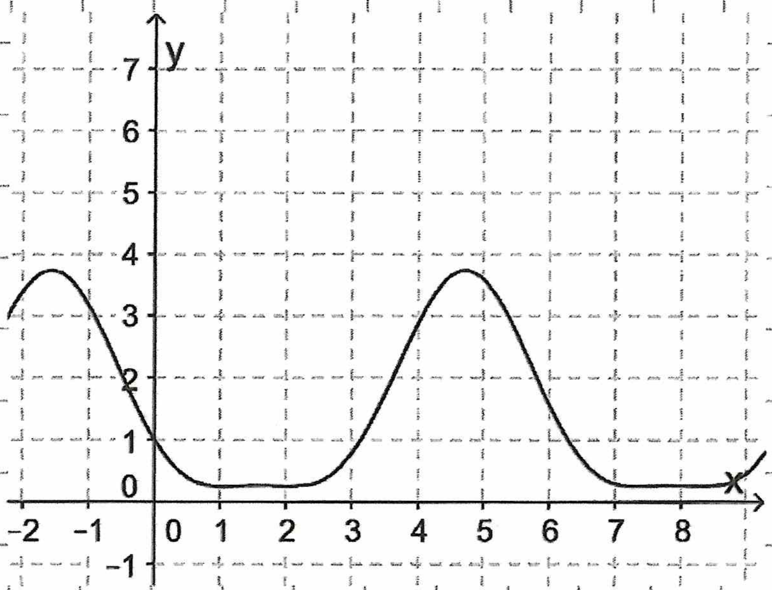
C'est la définition d'un axe de symétrie

ii. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Comme la fct est symétrique /. à $x = \frac{\pi}{2}$, on peut reduire l'intervalle à un intervalle de longueur π.

(d) i. Montrer que pour tout x, la dérivée de f peut s'écrire $f'(x) = 2\cos x\left(\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ii. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
La courbe suivante semble-t-elle correcte ? Pourquoi ?



i) $f'(x) = 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos x$
$= 2\cos x\left(\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ii) zéros : $\cos x = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$\to$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	0	+		+	0
$\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$		−	0	+	
$f'(x)$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$	0
$f(x)$	M		m		M
	$\left(-\frac{\pi}{2}, 2+\sqrt{3}\right)$		$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$		$\left(\frac{\pi}{2}, 2-\sqrt{3}\right)$

invisible sur le graphe
$\to$ zoom à faire !!

(e) Résoudre dans l'équation $f(x) = 2 + \sqrt{3}$.

$\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x + 1 = 2 + \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x - 1 - \sqrt{3} = 0$

$\Delta = 3 + 4(1 + \sqrt{3})$

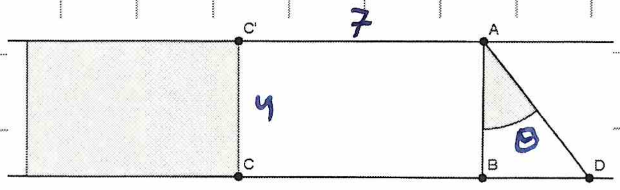
$= (\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} + 4 = (\sqrt{3} + 2)^2$

$\sin x_{1,2} = \dfrac{\sqrt{3} \pm (\sqrt{3} + 2)}{2}$: $\sqrt{3} + 1 > 1$; -1

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

OU (plus simple) directement dans le tableau de variation ($2 + \sqrt{3}$ est l'ordonnée du maximum !)

4. Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h.
Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à 30 km/h !
Les mouvements sont supposés uniformes.
L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous.



Le lapin part du point A en direction de D. Cette direction est repérée par l'angle $\theta = B\hat{A}D$ avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

(a) Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

(b) On pose $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta}$.
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

(c) Sur base de la variation de la fonction $f(\theta)$, déterminer une valeur approchée[1] de l'angle selon lequel le lapin doit aborder sa course.

a) $\cos\theta = \dfrac{4}{AD} \Rightarrow AD = \dfrac{4}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \dfrac{BD}{4} \Rightarrow BD = 4\tan\theta \Rightarrow CD = 7 + 4\tan\theta$

$t_1 = \dfrac{AD}{30} = \dfrac{4}{30\cos\theta}$ et $t_2 = \dfrac{7+4\tan\theta}{60}$

b) Le lapin a traversé si $t_2 > t_1$
càd $t_2 - t_1 > 0$
Or $f(\theta) = 30(t_2 - t_1) \Rightarrow f(\theta) > 0$

1. L'utilisation de la calculatrice est vivement recommandé

c) $f'(\theta) = \dfrac{2}{\cos^2\theta} + \dfrac{4(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$

$= 2\,\dfrac{1-2\sin\theta}{\cos^2\theta}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	
			$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{7}{2} - 2\sqrt{3}\right)$		

L'angle est tel que $f(\theta) = 0$.

On a : $f(0) = -\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} f(\theta) = \lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} 2\,\dfrac{\sin\theta - 2}{\cos\theta}$

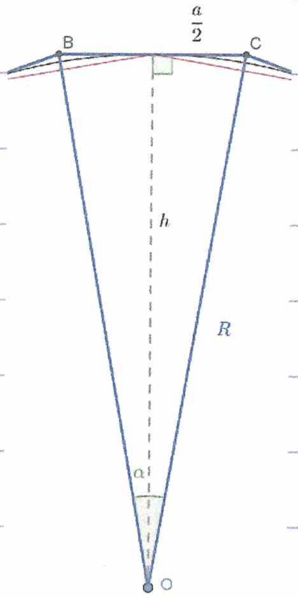
$= -\infty$

$\rightarrow$ TVI : $f(\theta)$ s'annule deux fois entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. La machine donne $\theta \simeq 0{,}394$ et $\theta \simeq 0{,}644$ $\Rightarrow$ $\theta \in [0{,}394 ; 0{,}644]$ où $f(\theta) > 0$

5. Archimède utilisa vers 250 avant JC une méthode particulière pour déterminer les ... deux premières décimales du nombre π. Son idée consistait à encadrer un cercle par des polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle. Il obtint ainsi une approximation de *pi* à l'aide de polygones à 96 côtés :

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Considérons un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon R. Si le nombre de côtés du polygone tend vers l'infini, celui-ci tendra vers le cercle. Démontrer sur base de ce principe que le périmètre et l'aire du cercle valent $2\pi R$ et πR^2.



Le polygone inscrit est le polygone rouge (voir figure ci-dessous)

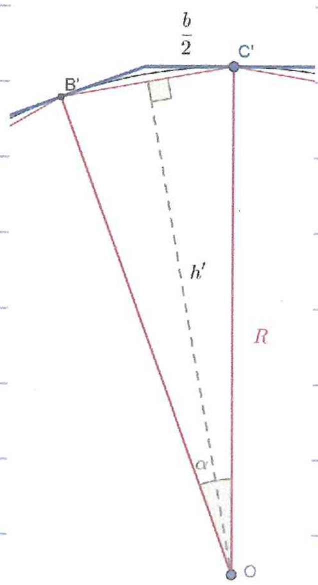
- On a $\alpha = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{n}$

Calculons b et h'

$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{R} \Leftrightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2R}$

$\Leftrightarrow b = 2R \sin \frac{\pi}{n}$

De m̂ $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{h'}{R} \Leftrightarrow h' = R \cos \frac{\pi}{n}$



- $P_n = n\,b = 2nR \sin \frac{\pi}{n}$

$P = \lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2nR \sin \frac{\pi}{n}$

$= 2R\pi \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}$

$= 2\pi R \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$

si $n \to \infty$, $\frac{\pi}{n} \to 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$

$\Rightarrow P = 2\pi R$

- $A_n = n\,\dfrac{b \cdot h'}{2} = n\,\dfrac{2R\sin\frac{\pi}{n} \cdot R\cos\frac{\pi}{n}}{2}$

$$= n R^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} n R^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

$$= R^2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\pi}\,n}{\pi} \sin\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{\pi}{n}$$

$$= \pi R^2 \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}}_{\to 1\ (\text{f P})} \cos\frac{\pi}{n}$$

$$= \pi R^2$$

7. Tension artérielle

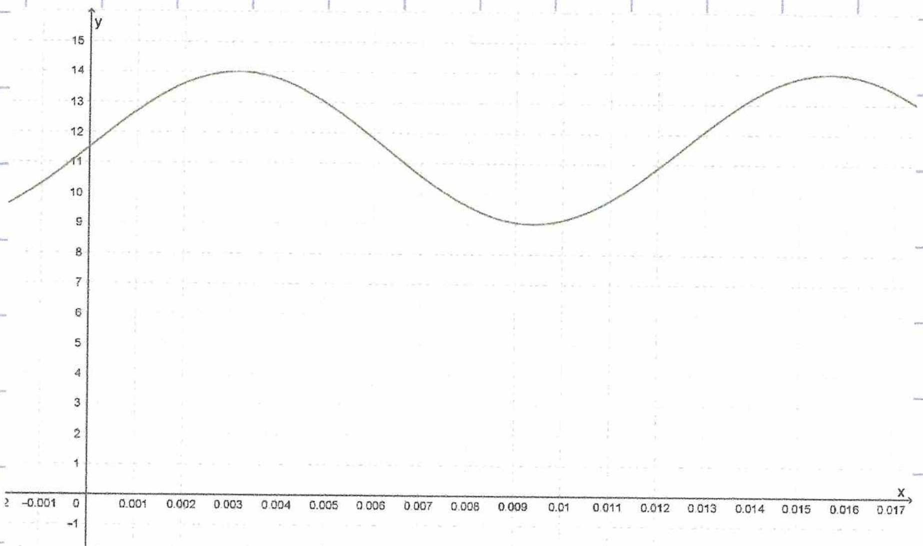
A tout moment notre cœur bat : la pression sanguine augmente pour décroître ensuite entre deux battements. Les maximum et minimum de pression sanguine portent respectivement les noms de pression systolique et diastolique. La lecture de notre pression sanguine, à l'aide d'un tensiomètre, donne deux nombres correspondant aux pressions systolique/diastolique. Une lecture 12/8 est considérée comme normale.

La pression sanguine d'une personne est modélisée par la fonction $p(t) = 11,5 + 2,5 \sin 160\pi t$ dans laquelle $p(t)$ est la pression en cm Hg et t est le temps exprimé en minutes.

(a) Quelle est la période de $p(t)$?

(b) Quel est le nombre de battements par minute ?

(c) Représenter graphiquement la fonction « pression sanguine ».



(d) A quels moments la pression sanguine vaut-elle 12 ? 8 ? 10 ;25 ?. Justifier les résultats par calcul.

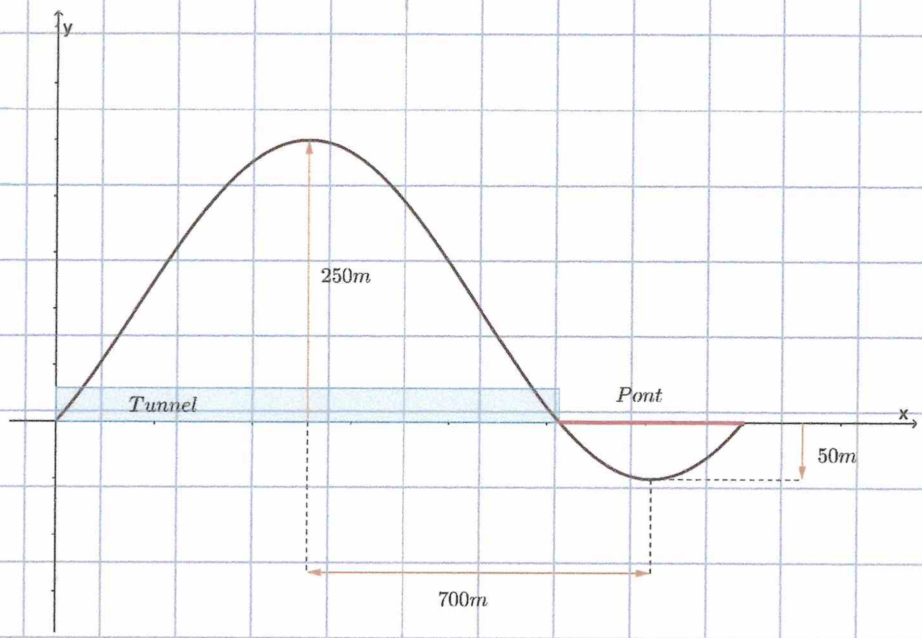
8. Rythme circadien
La variation de température du corps humain est un exemple de rythme circadien, processus biologique qui se répète approximativement toutes les 24 heures. La température est maximale vers 17h et minimale vers 5 h. On mesure le temps (t) en heures, $t = 0$ correspondant à minuit. On note $T(t)$ la température du corps (en °C) à l'instant t.
On suppose que la température minimale d'un individu donné est de 36,83°C et que sa température maximale est de 37,17°C.

(a) Déterminer la fonction $T(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + B$ qui modélise la situation.

(b) A quels moments de la journée la température de cet individu est-elle de 37°C ?

(c) Quand sa température est-elle inférieure ou égale à 36,9°C ?

9. La coupe d'une montagne a un profil sinusoïdal et on décide d'y construire une voie ferrée comme indiqué dans le croquis ci-dessous :



(a) Trouvez des expressions pour les paramètres A, ω, φ et B qui correspondent avec le profil $y = f(x)$ du type :

$$f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B$$

et avec les mesures indiquées sur le croquis. Expliquer le raisonnement.

(b) Donnez une expression pour la longueur t_1 du tunnel et p_1 du pont (sur l'axe y = 0), en fonction des paramètres A, ω, φ et B. Calculez ensuite la valeur de t_1 et de p_1 à 1 mètre près.

(c) On décide alors de rehausser la trajectoire de la voie ferrée de 50 mètres. Calculez la nouvelle valeur de t_2 du tunnel et p_2 du pont à 1 mètre près.