Rappels et compléments sur le second degré : Solutions

Rappels sur le second degré

1. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $6x^2 - 13x - 28 = 0$

   $\Delta = 169 + 672 = 841$

   $x_{1,2} = \dfrac{13 \pm 29}{12} \quad \dfrac{7}{2} \quad -\dfrac{4}{3}$

   (b) $x^2 - x - 1 = 0$

   $\Delta = 1 + 4 = 5$

   $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(c) $5x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 20 = -11$ $S : \varnothing$

(d) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{5x}{3} + \dfrac{25}{9} = 0$

$\Delta = \dfrac{25}{9} - 4 \cdot \dfrac{25}{9} \cdot \dfrac{1}{4} = 0$

$a_1 = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{10}{3}$

(e) $(x+1)(2x^2-9x+7)=(2x-7)(x+1)$

$(x+1)(2x^2-9x+7-2x+7)=0$

$\hookrightarrow x=-1 \qquad \hookrightarrow 2x^2-11x+14$

$\Delta = 121-112=9$

$x_{1,2}=\dfrac{11\pm 3}{4} \Big\langle \begin{array}{l} \frac{7}{2} \\ 2 \end{array}$

2. Résoudre les inéquations suivantes [2] :

(a) $^*\dfrac{3-2x}{x^2+6x-7} < 0$

zéro : N : $x = \frac{3}{2}$

D : $\Delta = 36 + 28 = 64$ $x_{1,2} = \frac{-6 \pm 8}{2} \left< \begin{array}{l} 1 \\ -7 \end{array} \right.$

x		-7		1		$\frac{3}{2}$	
$3-2x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
x^2+6x-7	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
Im	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

S : $]-7, 1[\cup]\frac{3}{2}, +\infty$

2. Les exercices marqués * doivent être fait, les autres serviront d'exercices complémentaires

(b) $(4-9x^2)(-2x^2+3x+5) \geq 0$

zéros : $\cdot\ x = \pm \frac{2}{3}$

$\cdot\ \Delta = 9 + 40 = 49 \qquad x_{1,2} : \frac{-3 \pm 7}{-4} \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ \frac{5}{2} \end{array}\right.$

x		-1		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{2}$	
$4-9x^2$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$
$-2x^2+3x+5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
Im	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

S : $-\infty, -1] \cup [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty$

(c) * $-\frac{5x^2(x^2-5)}{1-4x} \le 0$

zéro : $x = 0$

$x = \pm\sqrt{5}$

$x = \frac{1}{4}$

x		$-\sqrt{5}$		0		$\frac{1}{4}$		$\sqrt{5}$	
$-5x^2$	−		−	0	−		−		−
(x^2-5)	+	0	−		−		−	0	+
$1-4x$	+		+		+	0	−		−
Im	−	0	+	0	+	$\cancel{\|}$	−	0	+

S : $-\infty, -\sqrt{5}] \cup \{0\} \cup]\frac{1}{4}, \sqrt{5}]$

(d) $\dfrac{-x^2+8x-16}{2-x} \geq 0$

zéro : $x = 4$

$x = 2$

x		2		4	
$-x^2+8x-16$	$-$		$-$	0	$-$
$2-x$	$+$	0	$-$		$-$
I_1	$-$	$\nexists$	$+$	0	$+$

$S :]2, +\infty$

(e) $\dfrac{3(x-5)x}{x^2-x-1} \geq 0$

Zéros : $x = 0$

$x = 5$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

x		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		5	
$3x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2-x-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
Im	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$S: -\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2} [\cup [0, \frac{1+\sqrt{5}}{2} [\cup [5, +\infty$

(f) $^{*}\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{4-2x}{x+3} \leq 2$

$$\frac{x(x+3) - (4-2x)(x-1) - 2(x^2+2x-3)}{(x-1)(x+3)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3x-4x+4+\cancel{2x^2}-2x-\cancel{2x^2}-4x+6}{D} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-7x+10}{(x-1)(x+3)} \leq 0$$

zéros : N : $\Delta = 49 - 40 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{7 \pm 3}{2} \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right.$

D : $x = 1$, $x = -3$

x		-3		1		2		5	
N	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
D	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
I_n	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$

S : $]-3, 1[\cup [2, 5]$

(g) $\dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{x+3}{x-1} > 1$

$$\frac{(x-1)^2 - (x+3)(x+2) - (x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)} > 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - 5x - 6 - x^2 - x + 2}{D} > 0$$

$$\frac{-x^2 - 8x - 3}{(x+2)(x-1)} > 0$$

zéro : N : $\Delta = 64 - 12 = 52$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{13}}{-2} = -4 \pm \sqrt{13}$$

D : $x = 1$, $x = -2$

x		$-4-\sqrt{13}$		-2		$-4+\sqrt{13}$		1	
N	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
D	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
Im	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

S : $]-4-\sqrt{13}, -2[\; \cup \;]-4+\sqrt{13}, 1[$

(h) $\frac{2}{2x+3} < x$

$\iff \frac{2-2x^2-3x}{2x+3} < 0$

zéros: N: $\Delta = 9+16 = 25$ $x_{1,2} = \frac{3\pm 5}{-4} \left\langle \begin{array}{l} -2 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$

x		-2		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$	
N	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
D	$-$		$-$	0	$+$		$+$
In	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

S: $\left]-2, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

(i) * $\dfrac{2x+4}{1-x} - \dfrac{x+4}{x+3} \geq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x+4)(x+3)-(x+4)(1-x)-(1-x)(x+3)}{D} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+10x+12+x^2+3x-4+x^2+2x-3}{D} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4x^2+15x+5}{D} \geq 0$

zéros : N : $\Delta = 225 - 80 = 145$

$x_{1,2} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{145}}{8}$

D : $x = 1$, $x = -3$

x		$\frac{-15-\sqrt{145}}{8}$		-3		$\frac{-15+\sqrt{145}}{8}$		1	
N	+	0	−		−	0	+		+
D	−		−	0	+		+	0	−
In	−	0	+	∄	−	0	+	∄	−

S: $\left[\dfrac{-15-\sqrt{145}}{8}, -3\right[\cup \left[\dfrac{-15+\sqrt{145}}{8}, 1\right[$

(j) $*\dfrac{2x^2+x+5}{x^2-3x+2} < 1$

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2-3x+2} < 0$$

zéro : $N: \Delta = 16 - 12 = 4 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 2}{2} < \begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix}$

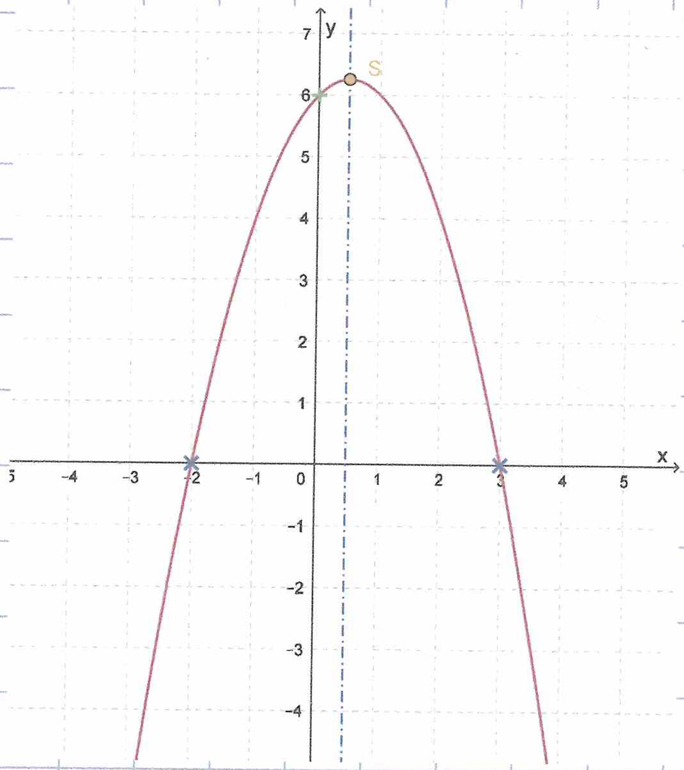
$D: \Delta = 9 - 8 = 1 \qquad x_{1,2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} < \begin{matrix} 2 \\ +1 \end{matrix}$

x		-3		-1		1		2	
N	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
D	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
I_n	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$

$S: \,]-3, -1[\, \cup \,]1, 2[$

3. Etablir le graphe des paraboles suivantes

(a) $P \equiv y = -x^2 + x + 6$



$a = -1$

$b = 1$

$c = 6$

$\Delta = 1 - 4(-1)6$

$= 25$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{-2} \left\langle \begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix} \right.$

$S : \left(\dfrac{-1}{-2} ; -\dfrac{25}{-4} \right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{25}{4} \right)$

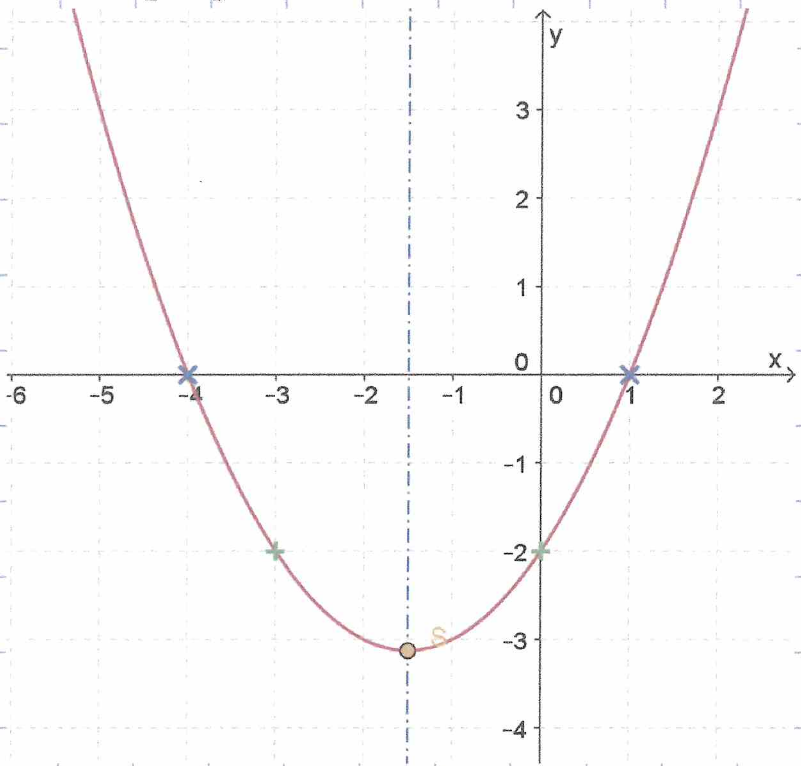
$AS \equiv x = \dfrac{1}{2}$

$\cap Ox : (-2, 0)$ et $(3, 0)$

$\cap Oy : (0, 6)$

$a < 0 \Rightarrow \cap^{S}$

(b) $P \equiv y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x - 2$



$a = \frac{1}{2}$

$b = \frac{3}{2}$

$c = -2$

$\Delta = \frac{1}{4} - 4(-2)\frac{3}{2}$

$= \frac{25}{4}$

$x_{1,2} = \frac{-\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{1} \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$

$S : \left(\frac{-\frac{3}{2}}{1} , -\frac{\frac{25}{4}}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2} , -\frac{25}{8} \right)$

$AS \equiv x = -\frac{3}{2}$

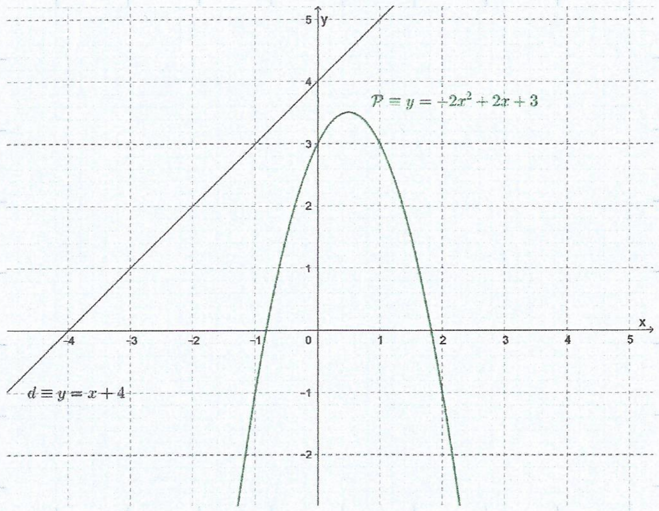
$\cap Ox : (1, 0)$ et $(-4, 0)$

$\cap Oy : (0, -2)$

$a > 0 \rightarrow \cup$

5. On donne les paraboles $\mathcal{P}$ et les droites d suivantes. Etudier la position relative de la parabole et de la droite (extérieure, tangente, sécante) dans les cas suivants. Déterminer éventuellement les coordonnées des points d'intersection. Vérifier graphiquement le résultat :

(a) $\mathcal{P} \equiv y = -2x^2 + 2x + 3$ et $d \equiv x - y = -4$



On résoud :

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 2x + 3 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = -2x^2 + 2x + 3 \quad (*) \\ y = x + 4 \end{cases}$$

$(*) \Leftrightarrow -2x^2 + x - 1 = 0$

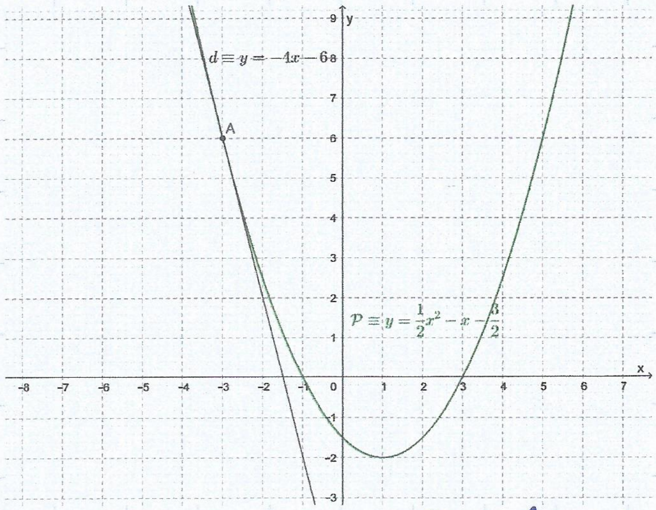
$\Delta = 1 - 4(-2)(-1) = -7 < 0$

$\Rightarrow$ pas de solution

$\Rightarrow$ pas de pts d'intersection

$\Rightarrow$ la droite est extérieure à la parabole

(b) $\mathcal{P} \equiv y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ et $d \equiv y = -4x - 6$



$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \\ y = -4x - 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 6 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} & (*) \\ y = -4x - 6 & (2) \end{cases}$$

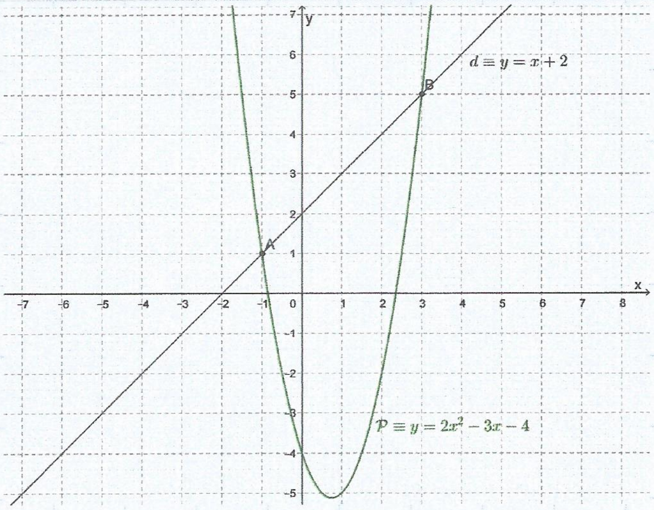
$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$

$\Delta = 36 - 36 = 0 \Rightarrow 1$ sol
$\Rightarrow d$ tgte à P

$x = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$

dans (2) $\rightarrow y = 6 \rightarrow A(-3, 6)$

(c) $\mathcal{P} \equiv y = 2x^2 - 3x - 4$ et $d \equiv x - y + 2 = 0$



$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3x - 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 2x^2 - 3x - 4 & (*) \\ y = x + 2 & (2) \end{cases}$$

$(*) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16 > 0 \Rightarrow 2$ sol

$\Rightarrow d$ sécante à P

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} < \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$$

dans (2) $\Rightarrow y_1 = 5$ et $y_2 = 1$

$\Rightarrow A(-1,1)$ et $B(3,5)$

6. On donne la parabole d'équation $P \equiv y = 2x^2 + bx + 3$ et la droite d'équation $d \equiv x - y + 1 = 0$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de b, P et d sont-elles tangentes ?

$$\begin{cases} y = 2x^2 + bx + 3 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + bx + 3 = x + 1 \quad (*) \\ (2) \end{cases}$$

$(*)$ $2x^2 + (b-1)x + 2 = 0$

$\Delta = (b-1)^2 - 16 = 0$ (tgce)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - 1 = 4 \\ b - 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ b = -3 \end{cases}$$

(b) Pour cette (ces) valeur(s) de b, tracer la parabole après en avoir déterminé les caractéristiques.

$b = -3$

$y = 2x^2 - 3x + 3$

$a = 2$, $b = -3$, $c = 3$ $\Delta = -15$

$S : \left(\frac{3}{4}, \frac{15}{8}\right)$

$AS \equiv x = \frac{3}{4}$

$\cap ox :$ —

$\cap oy : (0, 3)$

$a > 0 \rightarrow$ $\cup$ S

$b = 5$

$y = 2x^2 + 5x + 3$

$a = 2$, $b = 5$, $c = 3$, $\Delta = 1$

$S : \left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

$AS \equiv x = -\frac{5}{4}$

$\cap ox : \frac{-5 \pm 1}{4} < \begin{matrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{matrix}$

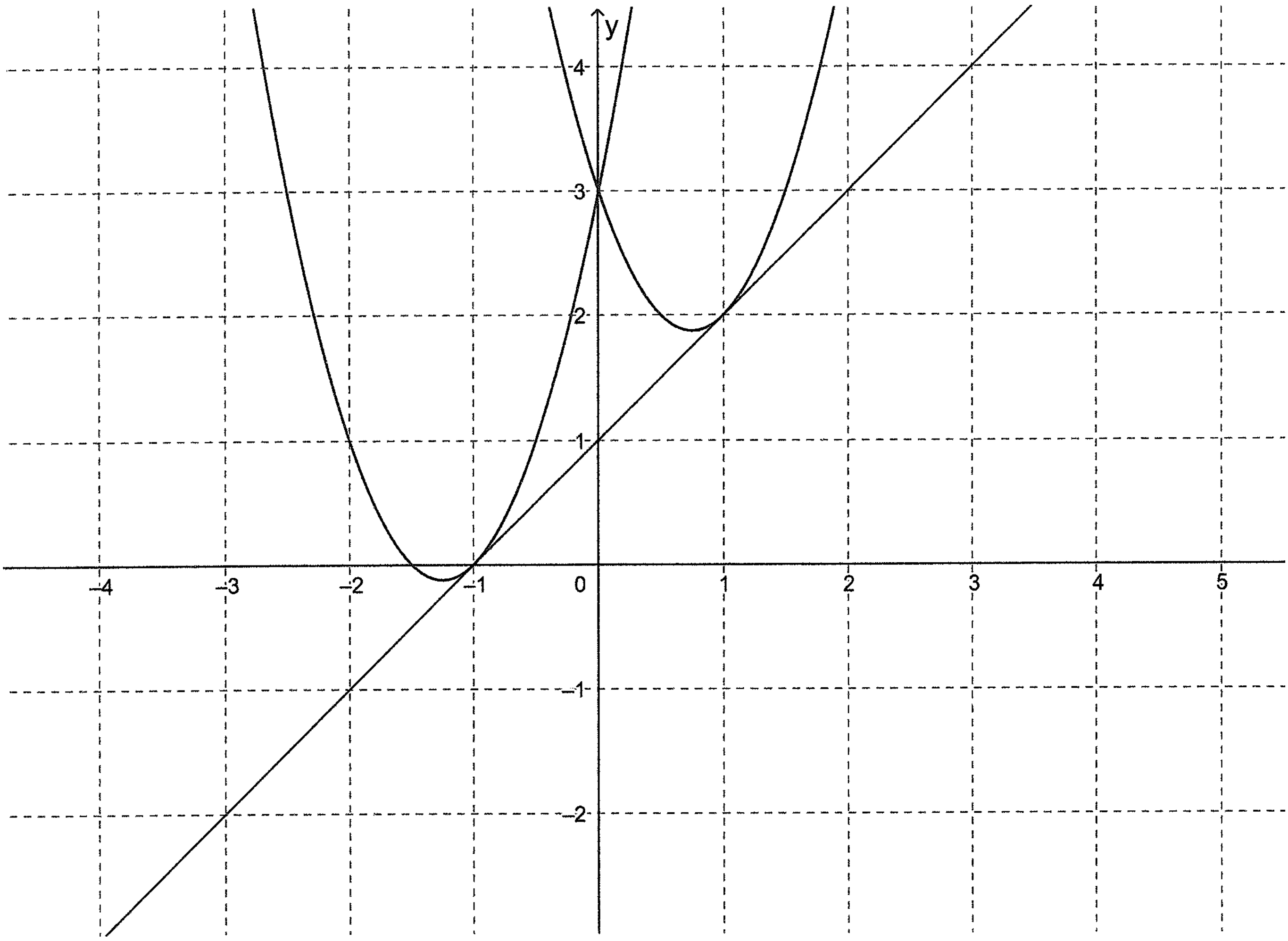
$\cap oy : (0, 3)$

$a > 0$: $\cup$ S

~~Dessin~~ voir page suivante

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de b, P et d n'ont-elles aucun point en communs ?

$b \in \left]-3, 5\right[$



y
4
3
2
1
0
–1
–2
–4
–3
–2
–1
1
2
3
4
5

7. Déterminer l'équation de la tangente à la parabole $P \equiv y = 2x^2 - 3x + 5$ en son point d'abscisse -1.

Pt de tangence : $A(-1, 10) \Rightarrow t \equiv y - 10 = m(x+1)$

$t \cap P : \begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 5 & (1) \\ y = m(x+1) + 10 & (2) \end{cases}$

$(1) = (2) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 5 = mx + m + 10$

$\Leftrightarrow 2x^2 - (3+m)x - 5 - m = 0$

Tgce $\rightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (3+m)^2 + 8(5+m) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 + 8m + 40 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 14m + 49 = 0$

$\Leftrightarrow (m+7)^2 = 0$

$\Leftrightarrow m = -7$

$t \equiv y = -7x + 3$.

8. Déterminer l'équation des tangentes à la parabole $P \equiv y = x^2 - 3x + 1$ passant par le point $A(-1, 2)$

$$t \equiv y - 2 = m(x+1)$$

$$t \cap P : \begin{cases} y = x^2 - 3x + 1 & (1) \\ y = m(x+1) + 2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) = (2) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = mx + m + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (3+m)x - m - 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (3+m)^2 + 4(m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 + 4m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 10m + 13 = 0$$

$$\Delta = 100 - 52 = 48$$

$$m_{1,2} = \frac{-10 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

$$= -5 \pm 2\sqrt{3}$$

Rappels et compléments sur le second degré : Solutions

Rappels sur les valeurs absolues

1. Ecrire les expressions suivantes sans valeurs absolues à l'aide d'un tableau de traduction.

   (a) $|3x+1|+|2-x|$

$$|3x+1| = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } 3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3} \\ -(3x+1) & \text{si } x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 2 \\ -(2-x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

x		$-\frac{1}{3}$		2	
$\lvert 3x+1 \rvert$	$-3x-1$		$3x+1$		$3x+1$
+	+		+		+
$\lvert 2-x \rvert$	$2-x$		$2-x$		$x-2$
	$-4x+1$		$2x+3$		$4x-1$

(b) $|2x+3| - |2-5x| + 3x$

x		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{5}$	
$\lvert 2x+3 \rvert$	$-2x-3$		$2x+3$		$2x+3$
$-$ $\lvert 2-5x \rvert$	$-(2-5x)$		$-(2-5x)$		$-(5x-2)$
$+$ $3x$	$+3x$		$+3x$		$+3x$
$E(x)$	$6x-5$		$10x+1$		5

(c) $|5x+3| + |2x+4| - |3-2x|$

x		-2		$-\frac{3}{5}$		$\frac{3}{2}$	
$\lvert 5x+3\rvert$	$-5x-3$		$-5x-3$		$5x+3$		$5x+3$
$+\lvert 2x+4\rvert$	$+(-2x-4)$		$+(2x+4)$		$+(2x+4)$		$+(2x+4)$
$-\lvert 3-2x\rvert$	$-(3-2x)$		$-(3-2x)$		$-(3-2x)$		$-(2x-3)$
$E(x)$	$-5x-10$		$-x-2$		$9x+4$		$5x+10$

(d) $2|2x-3|-|x+4|+|5-2x|$

x		-4		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$	
$2\|2x-3\|$	$-4x+6$		$-4x+6$		$4x-6$		$4x-6$
$-$ $\|x+4\|$	$-$ $(-x-4)$		$-$ $(x+4)$		$-$ $(x+4)$		$-$ $(x+4)$
$+$ $\|5-2x\|$	$+$ $5-2x$		$+$ $5-2x$		$+$ $5-2x$		$+$ $-5+2x$
	$-5x+15$		$-7x+7$		$x-5$		$5x-15$

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes[1] dans $\mathbb{R}$

(a) *$|2x+1| - |2x-1| = x - 3$

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$\lvert 2x+1 \rvert$	$-2x-1$		$2x+1$		$2x+1$
$-\lvert 2x-1 \rvert$	$-(-2x+1)$		$-(-2x+1)$		$-(2x-1)$
	-2		$4x$		2
	①		②		③

① $-2 = x - 3 \iff x = 1$ AR

② $4x = x - 3 \iff x = -1$ AR

③ $2 = x - 3 \iff x = 5$ ✓

$S : \{5\}$

1. Les exercices marqués * doivent être fait, les autres serviront d'exercices complémentaires

(b) $|2x+3| - |3-4x| = |2-x|$

x	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	2	
$\lvert 2x+3 \rvert$	$-2x-3$	$2x+3$	$2x+3$	$2x+3$
$-\lvert 3-4x \rvert$	$-(3-4x)$	$-(3-4x)$	$-(4x-3)$	$-(4x-3)$
$=\lvert 2-x \rvert$	$2-x$	$2-x$	$2-x$	$x-2$
	1	2	3	4

1 $\quad 2x-6 = 2-x \iff x = \frac{8}{3}$ $\quad$ AR

2 $\quad 6x = 2-x \iff x = \frac{2}{7}$ $\quad$ ✓

3 $\quad -2x+6 = 2-x \iff x = 4$ $\quad$ AR

4 $\quad -2x+6 = x-2 \iff x = \frac{8}{3}$ $\quad$ ✓

$$S : \left\{ \frac{2}{7}, \frac{8}{3} \right\}$$

(c) $^*|x^2-3x-4|-|5x-2|=|2-x|$

x	$-\infty$ to -1	-1 to $2/5$	$2/5$ to 2	2 to 4	4 to $+\infty$
$\lvert x^2-3x-4\rvert$	x^2-3x-4	$-(x^2-3x-4)$	$-(x^2-3x-4)$	$-(x^2-3x-4)$	x^2-3x-4
$-\lvert 5x-2\rvert$	$-(2-5x)$	$-(2-5x)$	$-(5x-2)$	$-(5x-2)$	$-(5x-2)$
$=\lvert 2-x\rvert$	$=2-x$	$=2-x$	$=2-x$	$=x-2$	$=x-2$
	①	②	③	④	⑤

① $x^2+3x-8=0$ $\quad \Delta=41$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{2}$$

② $-x^2+9x=0 \rightarrow x_1=0$

$x_2=9$

③ $-x^2-x+4=0$ $\quad \Delta=17$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

④ $-x^2-3x+8=0$ $\quad \Delta=41$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{2}$$

⑤ $x^2-9x=0 \rightarrow x_1=0$

$x_2=9$

$$S:\left\{\frac{-3-\sqrt{41}}{2},\ 0,\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2},\ 9\right\}$$

(d) *$|3x+1| > 5$

		$-\frac{1}{3}$	
$\lvert 3x+1 \rvert$	$-3x-1$		$3x+1$
	①		②

① $-3x-1 > 5 \iff x < -2$

② $3x+1 > 5 \iff x > \frac{4}{3}$

$S: -\infty, -2 [\cup] \frac{4}{3}, +\infty$

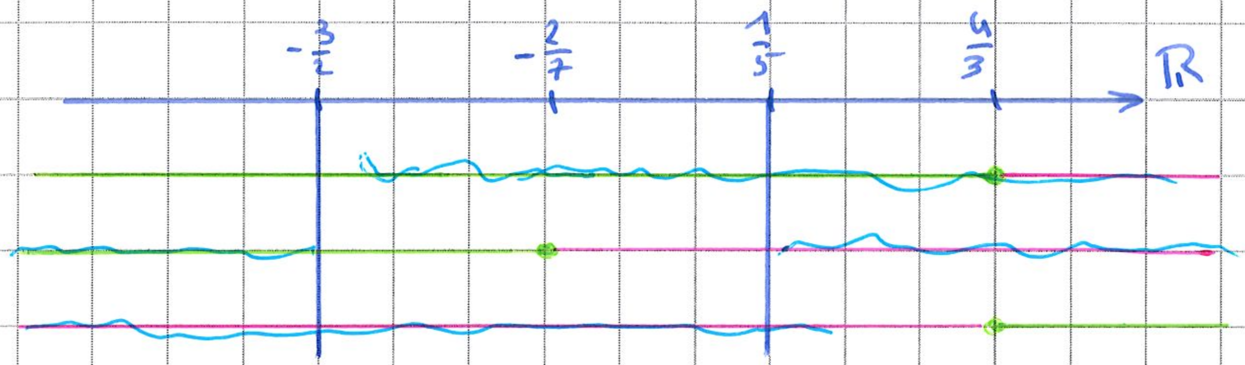
(e) $|2x+3| \le |1-5x|$

	$x \le -\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2} \le x \le \frac{1}{5}$	$x \ge \frac{1}{5}$
$\lvert 2x+3\rvert \le \lvert 1-5x\rvert$	$-2x-3 \le 1-5x$	$2x+3 \le 1-5x$	$2x+3 \le -1+5x$
	①	②	③

① $3x \le 4 \iff x \le \frac{4}{3}$

② $7x \le -2 \iff x \le -\frac{2}{7}$

③ $-3x \le -4 \iff x \ge \frac{4}{3}$



$S : -\infty, -\frac{2}{7}\ ] \cup [\ \frac{4}{3}, +\infty$

(f) $^{*}|2x+3|+|1-3x| \geq |5-x|$

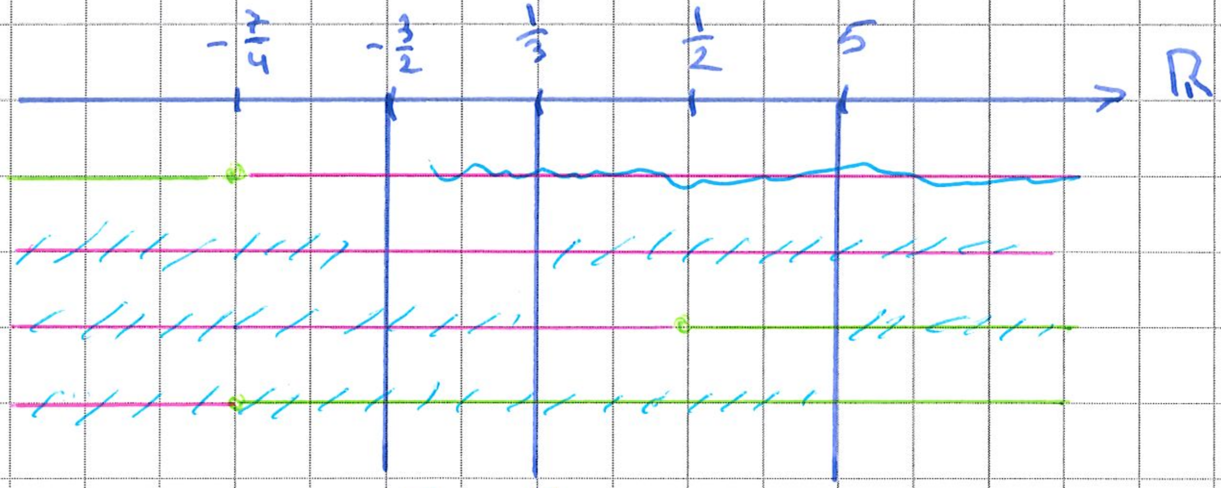
		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		5	
$\|2x+3\|$	$-2x-3$		$2x+3$		$2x+3$		$2x+3$
$+$	$+$		$+$		$+$		$+$
$\|1-3x\|$	$1-3x$		$1-3x$		$3x-1$		$3x-1$
$\geq$	$\geq$		$\geq$		$\geq$		$\geq$
$\|5-x\|$	$5-x$		$5-x$		$5-x$		$-5+x$
	1		2		3		4

1 $\quad -5x-2 \geq 5-x \iff x \leq -\frac{7}{4}$

2 $\quad -x+4 \geq 5-x \iff 4 \geq 5$ imp

3 $\quad 5x+2 \geq 5-x \iff x \geq \frac{1}{2}$

4 $\quad 5x+2 \geq x-5 \iff x \geq -\frac{7}{4}$



$S: -\infty, -\frac{7}{4}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty$

3 ~~9~~. Déterminer le domaine de définition de

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2-5x|-2}}{\sqrt{3x-|5x-2|-2x}}$$

CE : (1) $|x^2-5x|-2 \geq 0$

(2) $3x-|5x-2| \geq 0$

(3) $\sqrt{\quad\quad} - 2x \neq 0$

(1)

x		0		5	
$\lvert x^2-5x\rvert$	x^2-5x		$-x^2+5x$		x^2-5x
-2	-2		-2		-2
	$x^2-5x-2\geq 0$ (a)		$-x^2+5x-2\geq 0$ (b)		$x^2-5x-2\geq 0$ (a)

(a) $x^2-5x-2 \geq 0$ $\quad \Delta = 25+8 = 33 \quad x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$

T.S.

x		x_1	0		5	x_2	
(a)	+	0		−		0	+

ok $\quad$ ok

(b) $-x^2+5x-2 \geq 0$ $\quad \Delta = 25-8 = 17 \quad x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{17}}{-2}$

TS

x		0	x_1		x_2	5	
(b)	−		0	+	0		−

ok

(2) $\begin{cases} 3x-5x+2 \geq 0 & \text{si } x \geq \frac{2}{5} \\ 3x+5x-2 \geq 0 & \text{si } x < \frac{2}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2 \geq 0 \\ 8x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x \leq 1 & \text{si } x \geq \frac{2}{5} \\ x \geq \frac{1}{4} & \text{si } x < \frac{2}{5} \end{matrix}$

$\Rightarrow x \in [\frac{1}{4}, 1]$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(3) $\sqrt{} - 2x \neq 0$

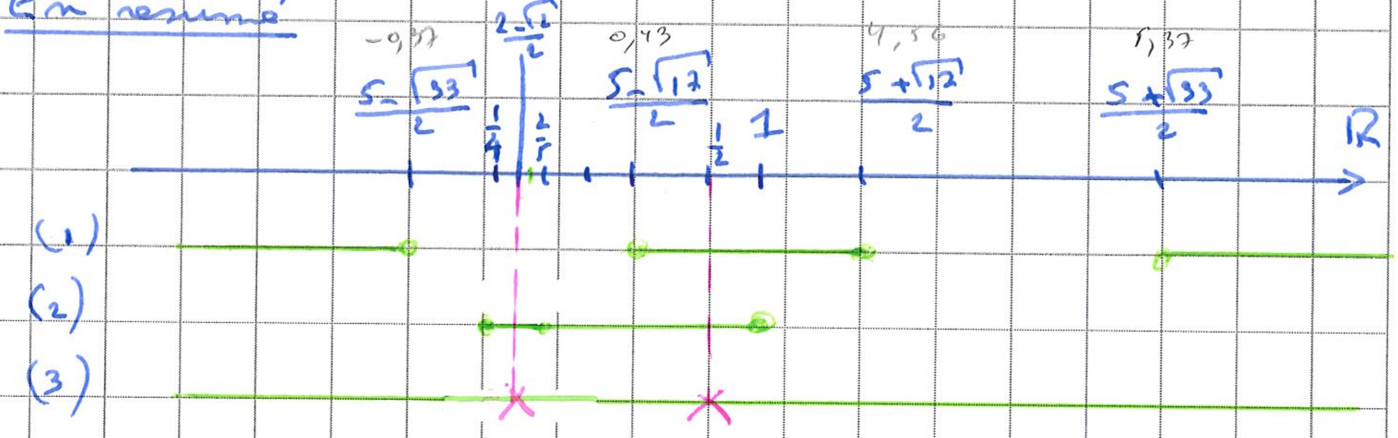
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2 \neq 4x^2 & \text{si } x \geq \frac{2}{5} \\ 8x-2 \neq 4x^2 & \text{si } x < \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+2x-2 \neq 0 \\ 4x^2-8x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-1 \neq 0 & (*) \\ 2x^2-4x+1 \neq 0 & (**) \end{cases}$$

(*) $\Delta = 1+8 = 9 \quad x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} \left< \begin{array}{ll} \frac{1}{2} & \checkmark \\ -1 & \text{AR} \end{array} \right.$

(**) $\Delta = 16-8 = 8 \quad x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} \left< \begin{array}{ll} \frac{2+\sqrt{2}}{2} & \text{AR} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} & \checkmark \end{array} \right.$

En résumé



dom f : $\left[\dfrac{5-\sqrt{12}}{2}, \dfrac{1}{2} \right[\cup \left] \dfrac{1}{2}, 1 \right]$

Compléments sur le second degré

1. Résoudre les équations suivantes

   (a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$\Delta = 169 - 144 = 25$

$x^2_{1,2} = \dfrac{13 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$

   (b) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x^2_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ -2 \quad AR \end{cases}$

(c) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$

$\Delta = 4 + 32 = 36$

$x_{1,2}^2 = \frac{-2 \pm 6}{2} \begin{cases} 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ -4 \quad AR \end{cases}$

(d) $2x^6 + 7x^3 = -3$

$\Delta = 49 - 24 = 25$

$x_{1,2}^3 = \frac{-7 \pm 5}{4} \begin{cases} -\frac{1}{2} \rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{4}{2}} \\ -3 \rightarrow x = \sqrt[3]{-3} \end{cases}$

(e) $\sqrt{x+3} = 2$

CE : $x \geq -3$

$x + 3 = 4$

$\Leftrightarrow x = 1$ ✓

(f) $\sqrt{3x+1} = 1 - x$

CE : $x \geq -\frac{1}{3}$ $x \leq 1$

$\Rightarrow x \in [-\frac{1}{3}, 1]$

$3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & ✓ \\ x = 5 & \longrightarrow \text{A.R.} \end{cases}$

(g) $\sqrt{36+x} = 2+\sqrt{x}$

CE $\left.\begin{array}{l} x \geq -36 \\ x \geq 0 \end{array}\right\} x \geq 0$

$36+\cancel{x} = 4+\cancel{x}+4\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \quad 8 = \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \quad x = 64$ ✓

(h) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-1} = \sqrt{3x+4}$

CE : $\left.\begin{array}{l} x \geq -6 \\ x \geq 1 \\ x \geq -\frac{4}{3} \end{array}\right\} x \geq 1$

$x+6+x-1+2\sqrt{\quad} = 3x+4$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{\quad} = x-1$ CE $x \geq 1$

$\Leftrightarrow 4(x+6)(x-1) = x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow 4(x^2+5x-6) = x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow 3x^2+22x-25 = 0$

$\Delta = 484+300 = 784$

$x_{1,2} = \dfrac{-22 \pm 28}{6} \begin{array}{l} \nearrow 1 ✓ \\ \searrow -\frac{25}{3} \end{array}$ A.R.

(i) $\sqrt{x+3} = \sqrt{3x+21} - \sqrt{x+8}$

$\Rightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = \sqrt{3x+21}$

CE : $x \geq -3$, $x \geq -8$, $x \geq -7$ $\Big\}$ $x \geq -3$

$\Leftrightarrow x+3 + x+8 + 2\sqrt{\quad} = 3x+21$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{\quad} = x+10$ CE : $x \geq -10 \Rightarrow x \geq -3$

$\Leftrightarrow 4(x^2+11x+24) = x^2+20x+100$

$\Leftrightarrow 3x^2+24x-4=0$

$\Delta = 576+48 = 624$

$$x_{1,2} = \frac{-24 \pm 4\sqrt{39}}{6} = \frac{-12 \pm 2\sqrt{39}}{3}$$

$\frac{-12+2\sqrt{39}}{3}$ ✓

$\frac{-12-2\sqrt{39}}{3}$ A.R.

$$S : \left\{ \frac{-12+2\sqrt{39}}{3} \right\}$$

2. Déterminer m dans l'équation $x^2 - 2x + m = 0$ pour que celle-ci admette

(a) Deux racines distinctes

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

(b) Deux racines égales

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$

(c) Pas de racines

$\Delta < 0 \Leftrightarrow m > 1$

(d) Deux racines de signes contraires

$\Delta > 0$ et $P < 0$ $\quad P = m$

$\left.\begin{array}{l} P < 0 \Leftrightarrow m < 0 \\ \Delta > 0 \Leftrightarrow m < 1 \end{array}\right\} m \in \mathbb{R}^-_0$

(e) Deux racines négatives

$\Delta > 0$, $P > 0$ et $S < 0$ $\quad S = 2 \Rightarrow$ impossible

(f) Deux racines positives

$\Delta > 0$, $P > 0$ et $S > 0$

$\hookrightarrow m < 1$ $\quad \hookrightarrow m > 0$ $\quad \Rightarrow m \in [0, 1]$

3. Déterminer m pour que les inéquations suivantes soient vérifiées quel que soit x

(a) $x^2 + mx + 4 \geq 0$

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-4, 4]$

$a > 0$ OK

(b) $(4 - m)x^2 - 3x + 4 + m > 0$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 9 - 4(4+m)(4-m) < 0$ (*)

$4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$ (1)

(*) $9 - 4(16 - m^2) < 0$

$\Leftrightarrow -55 + 4m^2 < 0 \Leftrightarrow m \in \left]-\frac{\sqrt{55}}{2}, \frac{\sqrt{55}}{2}\right[$ (2)

(1) et (2) $m \in \left]-\frac{\sqrt{55}}{2}, \frac{\sqrt{55}}{2}\right[$

(c) $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x > 6 - 5m$

. $\Delta < 0 \iff 4(2m-3)^2 - 4(m-2)(5m-6) < 0$

$\iff 4(4m^2 - 12m + 9) - 4(5m^2 - 16m + 12) < 0$

$\iff -4m^2 + 16m - 12 < 0$

$\iff m^2 - 4m + 3 > 0$

$\Delta = 16 - 12 = 4 \quad m_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right.$

$\Rightarrow m \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

. $m - 2 > 0 \iff m > 2$

$\Rightarrow m \in \left]3, +\infty\right[$

4. Discuter en fonction du paramètre m le nombre, le signe et la position relative des racines des équations suivantes :

(a) $x^2 + mx - 5m = 0$

Discussion d'équations du second degré

Equation : $x^2 + mx - 5m = 0$

Delta : $\Delta_x = m^2 + 20m = (m+20)m$

Somme : $S = -m$

Produit : $P = -5m$

Discussion : $|x_1| > |x_2|$

m	Δ_x	P	S	Conclusions
	+	+	+	2 racines positives
-20	0	+	+	1 racine positive
	−	+	+	pas de racine
0	0	0	0	1 racine $= 0$
	+	−	−	2 racines $x_1 < 0 < x_2$

(b) $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$

Discussion d'équations du second degré

Equation : $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$

Delta : $\Delta_x = 4m^2 - 4(3m - 2)$

$= 4m^2 - 12m + 8$

$= 4(m^2 - 3m + 2)$

$= 4(m-1)(m-2)$

Somme : $S = 2m$

Produit : $P = 3m - 2$

Discussion : $|x_1| > |x_2|$

m	Δ_x	P	S	Conclusions
	+	−	−	2 racines $x_1 < 0 < x_2$
0	+	−	0	2 racines opposées
	+	−	+	2 racines $x_2 < 0 < x_1$
$\frac{2}{3}$	+	0	+	2 racines $x_1 > 0$ et $x_2 = 0$
	+	+	+	2 racines > 0
1	0	+	+	1 racine > 0
	−	+	+	pas de racine
2	0	+	+	1 racine > 0
	+	+	+	2 racines > 0

(c) $x^2 + 2mx + 2m^2 = 8m - 7$

Discussion d'équations du second degré

Equation : $x^2 + 2mx + 2m^2 - 8m + 7 = 0$

Delta : $\Delta_x = 4m^2 - 8m^2 + 32m - 28$

$= -4m^2 + 32m - 28$

$= 4(-m^2 + 8m - 7)$

$= -4(m-1)(m-7)$

Somme : $S = -2m$

Produit : $P = 2m^2 - 8m + 7$

$m_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}$

Discussion : $|x_1| > |x_2|$

m	Δ_x	P	S	Conclusions
	−	+	+	
0	−	+	0	0 racine
	−	+	−	
1	0	+	−	1 racine < 0
	+	+	−	2 racines négatives
$\frac{4-\sqrt{2}}{2}$	+	0	−	2 racines $x_1 < 0$ et $x_2 = 0$
	+	−	−	2 racines $x_1 < 0 < x_2$
$\frac{4+\sqrt{2}}{2}$	+	0	−	2 racines $x_1 < 0$ et $x_2 = 0$
	+	+	−	2 racines négatives
7	0	+	−	1 racine < 0
	−	+	−	0 racine

(d) $mx^2 + (m-1)x + m - 2 = 0$

Discussion d'équations du second degré

Equation : $mx^2 + (m-1)x + m - 2 = 0$

Delta : $\Delta_x = m^2 - 2m + 1 - 4m(m-2)$

$= -3m^2 + 6m + 1$

$m_{1,2} = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$

Somme : $-\dfrac{m-1}{m}$

Produit : $\dfrac{m-2}{m}$

Discussion : $|x_1| > |x_2|$

m	Δ_x	P	S	Conclusions
	$-$	$+$	$-$	0 racine
$\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$	0	$+$	$-$	1 racine <0
	$+$	$+$	$-$	2 racines <0
0	$+$	$\nexists$	$\nexists$	1er degré
	$+$	$-$	$+$	2 racines $x_2 < 0 < x_1$
1	$+$	$-$	0	2 racines opposées
	$+$	$-$	$-$	2 racines $x_1 < 0 < x_2$
2	$+$	0	$-$	2 racines $x_1 < 0$, $x_2 = 0$
	$+$	$+$	$-$	2 racines <0
$\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$	0	$+$	$-$	1 racine <0
	$-$	$+$	$-$	0 racine

(e) $(m-4)x^2 - 4x(m+1) + m = 1$

Discussion d'équations du second degré

Equation : $(m-4)x^2 - 4x(m+1) + m - 1 = 0$

Delta :

$$\Delta = 16(m^2 + 2m + 1) - 4(m-1)(m-4)$$
$$= 16m^2 + 32m + \cancel{16} - 4m^2 + 20m \cancel{-16}$$
$$= 12m^2 + 52m$$
$$= 4m(3m+13)$$

Somme : $S = 4\,\dfrac{m+1}{m-4}$

Produit : $P = \dfrac{m-1}{m-4}$

$0, -\frac{13}{3}, -1, 1, 4$

Discussion : $|x_1| > |x_2|$

m	Δ_x	P	S	Conclusions
	+	+	+	2 racines > 0
$-\frac{13}{3}$	0	+	+	1 racine > 0
	−	+	+	pas de racine
−1	−	+	0	pas de racine
	−	+	−	pas de racine
0	0	+	−	1 racine < 0
	+	+	−	2 racines < 0
1	+	0	−	2 racines $x_1 < 0$, $x_2 = 0$
	+	−	−	2 racines $x_1 < 0 < x_2$
4	+	∄	∄	1^er^ degré
	+	+	+	2 racines > 0

5. Résoudre les systèmes suivants

(a) $\begin{cases} xy = 48 & (1) \\ 3x + 4y = 50 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow y = \frac{48}{x}$ $\underline{CE}$: $x \neq 0,\ y \neq 0$

Dans $(2) \Rightarrow 3x + \frac{4 \cdot 48}{x} = 50$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 50x + 192 = 0$

$\Delta = 2500 - 2304 = 196$

$x_{1,2} = \frac{50 \pm 14}{6}$ $\begin{cases} \frac{32}{3} \Leftrightarrow y = \frac{9}{2} \\ 6 \Leftrightarrow y = 8 \end{cases}$

$S : \left\{ (6, 8) ; \left(\frac{32}{3}, \frac{9}{2} \right) \right\}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = 5 \end{cases}$

$\underline{CE}$: $x \neq 0$, $y \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \\ \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 & (1) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 & (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)+(2) : \dfrac{2}{x} = 6 \\ (1)-(2) : -\dfrac{2}{y} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$S: \left\{ \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2} \right) \right\}$

(c) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \\ x=41-y \end{cases}$

$\underline{CE}$: $x, y \geq 0$

$\begin{cases} (x+y)+2\sqrt{xy}=81 \\ (x+y)=41 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{xy}=40 \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy}=20 \\ (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=400 \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{400}{x} \\ x+\frac{400}{x}=41 \end{cases}$ (*)

(*) $x^2-41x+400=0$

$\Delta = 1681-1600=81$

$x_{1,2}=\frac{41\pm 9}{2}$ — $25 \Leftrightarrow y=16$; $16 \Leftrightarrow x=25$

$S: \{(16,25);(25,16)\}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{17}{4} \ (1) \\ x^2 - y^2 = 25 \ (2) \end{cases}$ CE : $x, y \neq 0$

On pose $t = \dfrac{x}{y}$

$(1) \to t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{17}{4} \Leftrightarrow 4t^2 - 17t + 4 = 0$

$\Delta = 289 - 64 = 225$

$t_{1,2} = \dfrac{17 \pm 15}{8} \left\langle \begin{array}{l} 4 \\ \frac{1}{4} \end{array} \right.$

. $t = 4 \Leftrightarrow x = 4y$. Dans (2).

$16y^2 - y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow y = \pm \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

$\Leftrightarrow x = \pm \dfrac{4\sqrt{15}}{3}$

$S: \left\{ \left(\dfrac{4\sqrt{15}}{3}, \dfrac{\sqrt{15}}{3} \right) ; \left(-\dfrac{4\sqrt{15}}{3}, -\dfrac{\sqrt{15}}{3} \right) \right\}$

. $t = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow y = 4x$. Dans (2) :

$x^2 - 16x^2 = 25$ imp.

6. Exercices récapitulatifs

(a) Soit le système suivant :

$$\begin{cases} (x-y+4)(2x+y-1)=0 \\ y=-x^2-\dfrac{x}{2}+3 \end{cases}$$

i. Résoudre ce système algébriquement

ii. Vérifier graphiquement le résultat

i) $S_1 : \begin{cases} y = 4+x \\ y = -x^2 - \frac{x}{2} + 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ -x^2 - \frac{3x}{2} - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$

$(*)$ $\Delta = \frac{9}{4} - 4 < 0 \to$ pas de solution

$S_2 : \begin{cases} y = 1-2x \\ y = -x^2 - \frac{x}{2} + 3 \quad (**) \end{cases}$

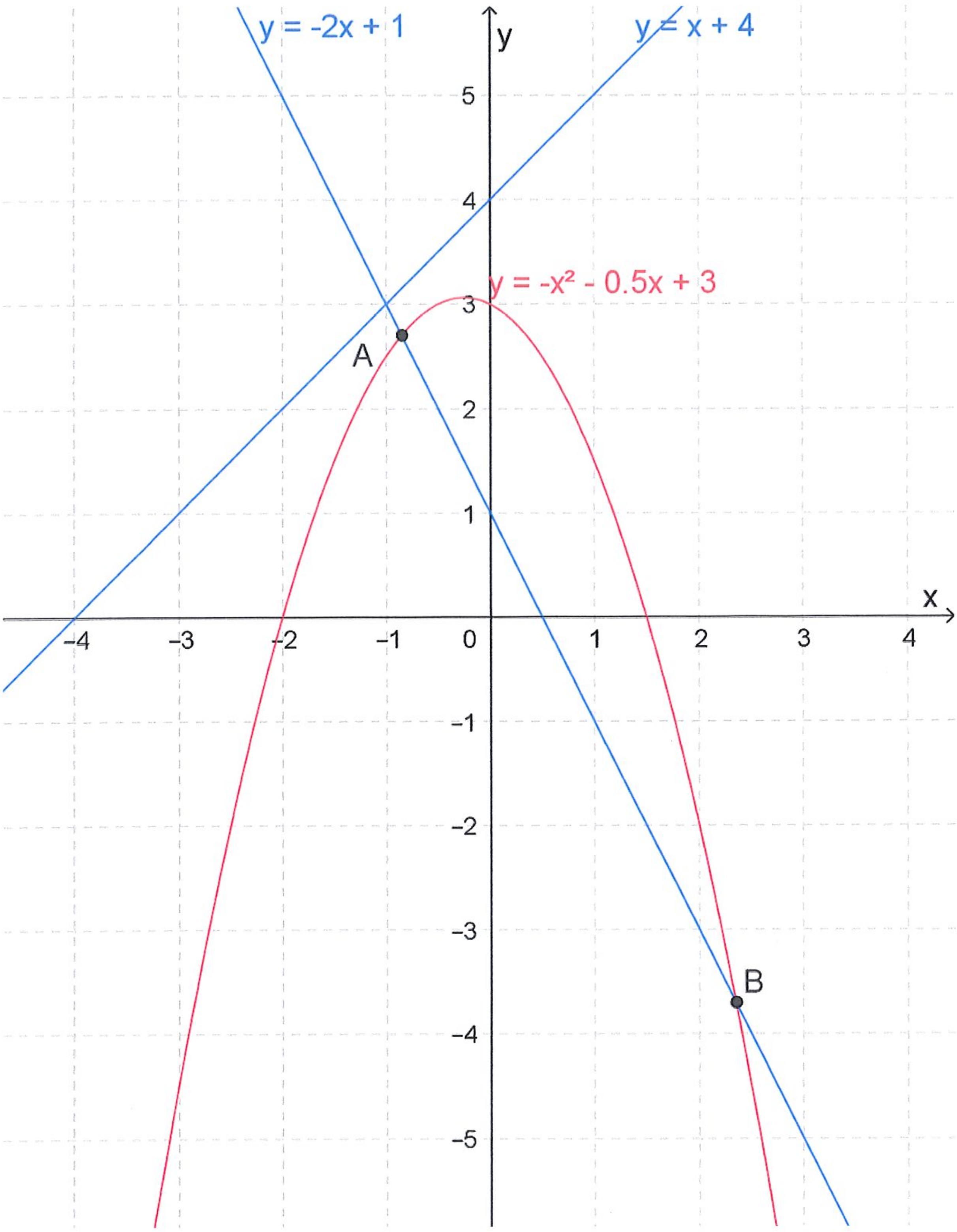
$(**)$ $-x^2 + \frac{3x}{2} + 2 = 0$

$\Delta = \frac{9}{4} + 8 = \frac{41}{4}$

$x_{1,2} = \dfrac{-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{41}}{2}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$ $+ \to B$, $- \to A$

$\Leftrightarrow y_{1,2} = \dfrac{2-3 \pm \sqrt{41}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{41}}{2}$ $+ \to A$, $- \to B$

ii) Voir annexe



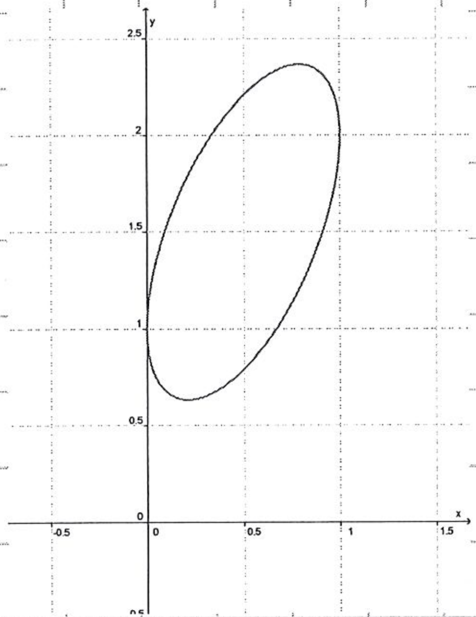
y = -2x + 1
y = x + 4
y = -x² - 0.5x + 3
y
x
A
B
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

(b) Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

i. Résoudre algébriquement ce système

ii. Sachant que le graphique ci-dessous représente l'ensemble des solutions de la première équation, retrouver graphiquement les résultats précédents.



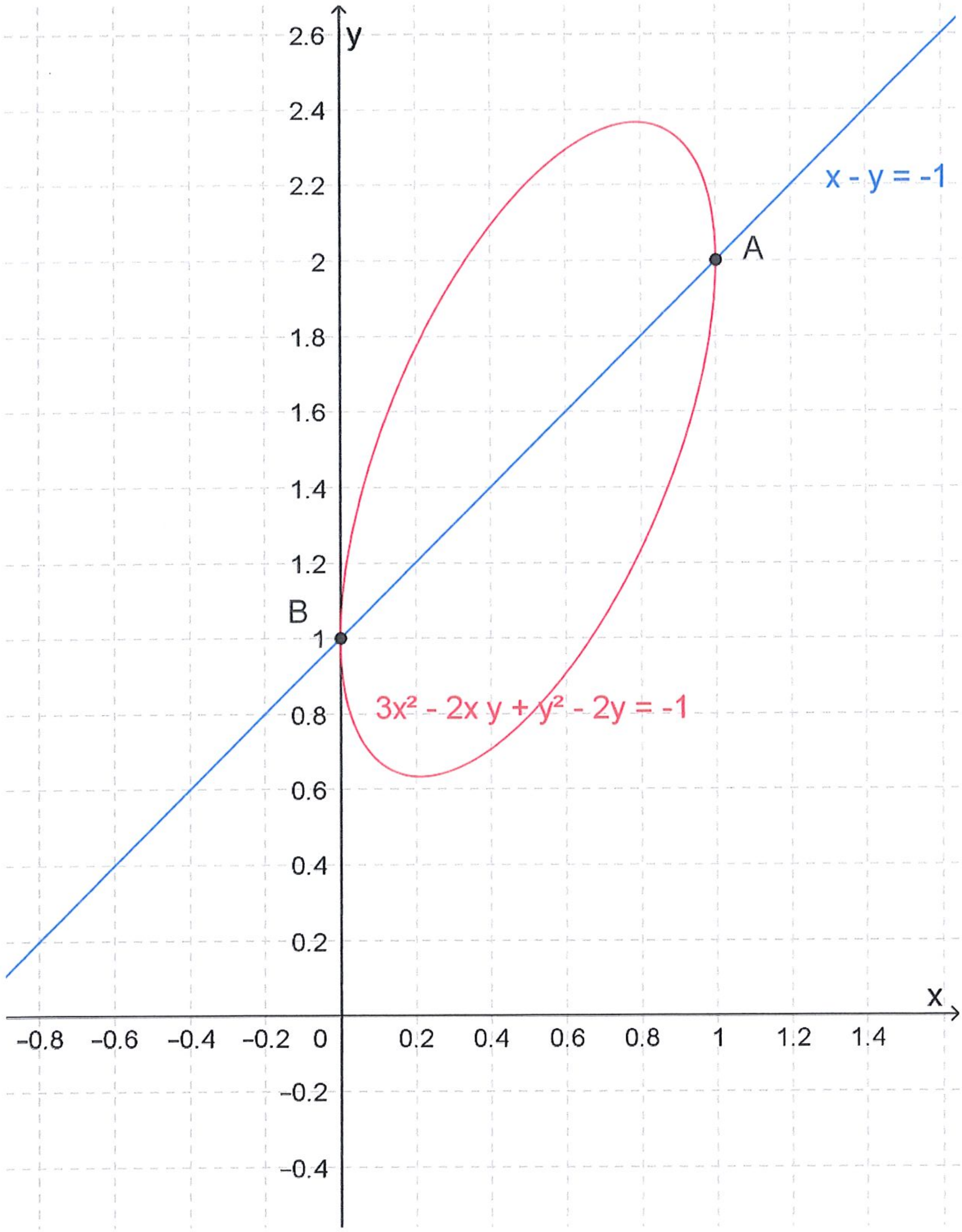
i) $\begin{cases} (1) \\ y = x + 1 \quad (2) \end{cases}$

(2) dans (1) $\Leftrightarrow 3x^2 + (x^2 + 2x + 1) - 2x(x+1) - 2(x+1) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \quad (B) \\ y = 2 \quad (A) \end{cases}$

ii) Voir annexe



y
x
x - y = -1
A
B
3x² - 2x y + y² - 2y = -1
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4