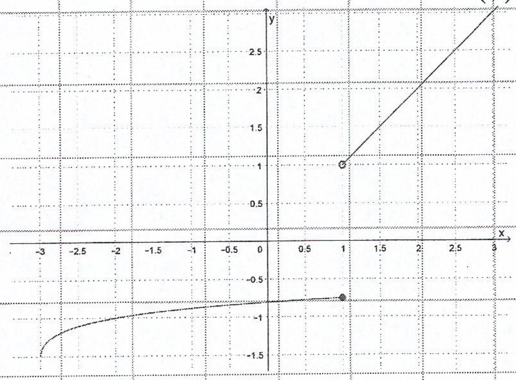
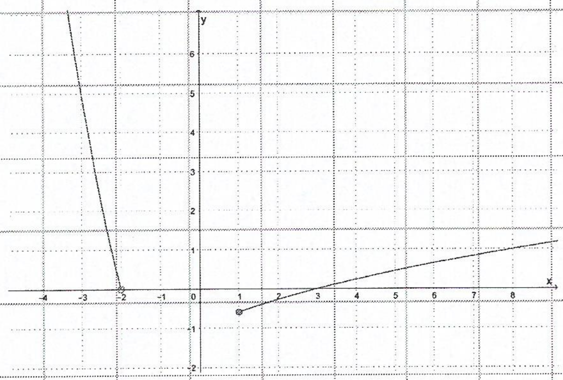
Continuité : Solutions

1. On donne le graphe des fonctions suivantes. Déterminer leur domaine de continuité.

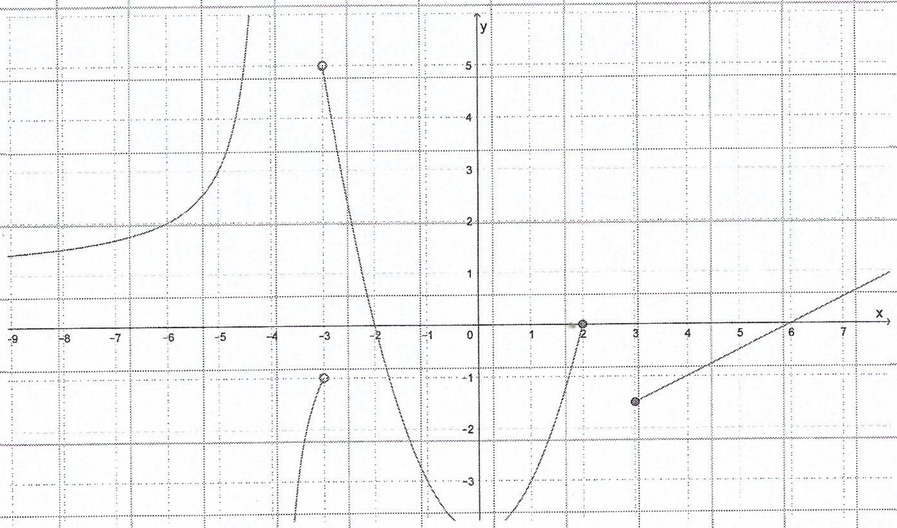
(a)



(b)



(c)



a) $\mathbb{R}$

b) $-\infty, -2[\cup [1, +\infty$

c) $-\infty, -4[\cup]-4, -3[\cup]-3, 2] \cup [3, +\infty$

2. En utilisant la définition, étudier la continuité de

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-3}$ en $x = 1$ et $x = 3$;

- $\lim\limits_{1^-} f(x) = \dfrac{3}{2}$ et $\lim\limits_{1^+} f(x) = \dfrac{3}{2}$

et $f(1) = \dfrac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ continue en 1

- $\lim\limits_{3^-} f(x) = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{3^+} f(x) = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$

et $f(3) \nexists$ $\Rightarrow$ $f(x)$ discontinue en 3 (AV)

(b) $f(x) = \sqrt{x-4}$ en $x = 4$;

dom f : $[4, +\infty$ $\rightarrow$ la seule limite calculable est en 4^+

$\lim\limits_{4^+} f(x) = 0$ et $f(4) = 0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ continue en 4

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} \text{ si } x < 1 \\ 1 - 3x \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ en x=1, à gauche de x=1, à droite de x=1

$\lim\limits_{1^-} f(x) = \lim\limits_{1^-} \dfrac{2}{x^2} = 2$

$\lim\limits_{1^+} f(x) = \lim\limits_{1^+} (1 - 3x) = -2$

(et $f(1) = -2$)

$\rightarrow f(x)$ discontinue en 1

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x < 0 \\ x - 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$f(x)$ est constituée de fcts polynomiales continues. Elle risque d'être discontinue en $x = 0$

$\lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{0^-} (x^2 - 1) = -1$

$\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} (x - 1) = -1$ et $f(0) = -1$

$\rightarrow f(x)$ continue sur $\mathbb{R}$

4. Même question que 3 avec la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x \leq -2 \\ -5 \text{ si } -2 < x < 1 \\ -x + 2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

De même qu'à l'exercice 3, $f(x)$ risque d'être discontinue en $x = -2$ et $x = 1$

$$\lim_{-2^-} f(x) = \lim_{-2^-} (2x - 1) = -5$$

$$\lim_{-2^+} f(x) = \lim_{-2^+} -5 = -5$$

$$f(-2) = 2.(-2) + 1 = -5$$

$\rightarrow f(x)$ continue en $x = -2$

$$\lim_{1^-} f(x) = \lim_{1^-} -5 = -5$$

$$\lim_{1^+} f(x) = \lim_{1^+} (-x + 2) = 1$$

$\Rightarrow f(x)$ discontinue en $x = 1$

5. Même question que 3 avec la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} |x^2-4|-5 \text{ si } x^2 < 9 & \Leftrightarrow -3 < x < 3 \\ 1 \text{ si } x = -3 \\ |x+5| \text{ si } x < -3 \\ x-3 \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$

Les points où $f(x)$ risque d'être discontinue sont $x = -3$ et $x = 3$

$$\lim_{-3^-} f(x) = \lim_{-3^-} |x+5| = 2$$

$$\lim_{-3^+} f(x) = \lim_{-3^+} (|x^2-4|-5) = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ discontinue en $x = -3$

$$\lim_{3^-} f(x) = \lim_{3^-} (|x^2-4|-5) = 0$$

$$\lim_{3^+} f(x) = \lim_{3^+} (x-3) = 0$$

$f(3) = 3-3 = 0$

$\Rightarrow f(x)$ continue en $x = 3$

6. Pour quelle(s) valeur(s) de a, la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \text{ si } x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty \\ a \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

est-elle continue en x=0 ?

Pour que $f(x)$ soit continue en $x=0$ il faut que $\lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{0^+} f(x) = f(0)$

$\lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

puisque la déf de $f(x)$ est la m̂ en 0^+ et en 0^-

$\lim\limits_{0} f(x) = \dfrac{0}{0}$ FI

$= \lim\limits_{0} f(x) \quad \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$

$= \lim\limits_{0} f(x) \quad \dfrac{\cancel{1}+\cancel{x}-\cancel{1}}{\cancel{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

$= \dfrac{1}{2}$

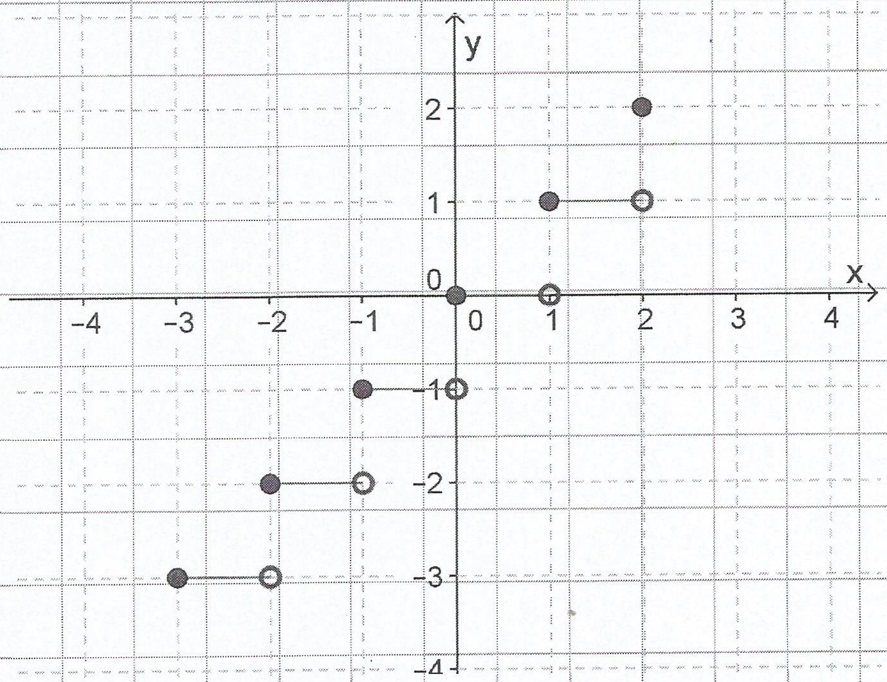
Pour que $f(x)$ soit continue en $x=0$, il faut imposer $f(0) = \dfrac{1}{2} \iff a = \dfrac{1}{2}$

7. Soit la fonction E qui, à chaque nombre réel, fait correspondre sa partie entière. E est nommée "*fonction partie entière*"

$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to E(x)$ telle que $E(x)$ soit le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x

Exemples :$E(2) = 2$, $E(-3) = -3$, $E(4,712) = 4$, $E(-3,729) = -4$

(a) Dessiner le graphe de $E(x)$ sur [-3,2] ;



(b) Déterminer :

i. le domaine de définition de $E(x)$;

ii. le domaine de continuité de $E(x)$

i) $\text{dom}\, E(x) = \mathbb{R}$

ii) $\text{dom}_c\, E(x) = \mathbb{R} \setminus \{k \mid k \in \mathbb{Z}\}$