<u>*A travers l'œil d'Horus*</u>

Marylou Harcq, Margaux Longree,

Camille Schmidt, Maxime Martin

_6A_

1. Introduction

Les connaissances mathématiques des Egyptiens sont relativement peu connues principalement à cause du faible nombre de documents connus. Les plus anciens sont les inscriptions contenues sur les murs de quelques temples ou tombes, comme celles de la tombe de Metjen (vers –2500 AC) qui montrent que les Égyptiens savaient à cette époque calculer correctement la surface d'un rectangle.

Les sources les plus importantes sont les papyrus mais ceux-ci se sont très mal conservés et peu ont franchi~~s~~ les âges. Parmi les plus connus, on peut citer le papyrus de Berlin ou celui de Moscou. Mais le papyrus mathématique le mieux conservé, le plus complet et le plus prestigieux est le papyrus de Rhind, du nom de son premier propriétaire l'Écossais Alexander Henry Rhind, qui l'acheta peu après sa découverte à Thèbes en 1857. C'est une copie d'un document plus ancien. Il présente une suite de quatre-vingt-sept problèmes mathématiques, accompagnés de leurs solutions.

Nous allons présenter quelques aspects particuliers de ces mathématiques.

2. Système de numération

Le système de numération des Egyptiens est un système décimal additionnel sans zéro (comme les chiffres romains). Les valeurs sont représentées par des hiéroglyphes.

Valeur	Signe hiéroglyphique	Appellation	Valeur	Signe hiéroglyphique	Appellation
1		bâton	10 000		doigt
10		anse de panier	100 000		têtard
100		corde enroulée	1 000 000		Heh
1 000		fleur de lotus			

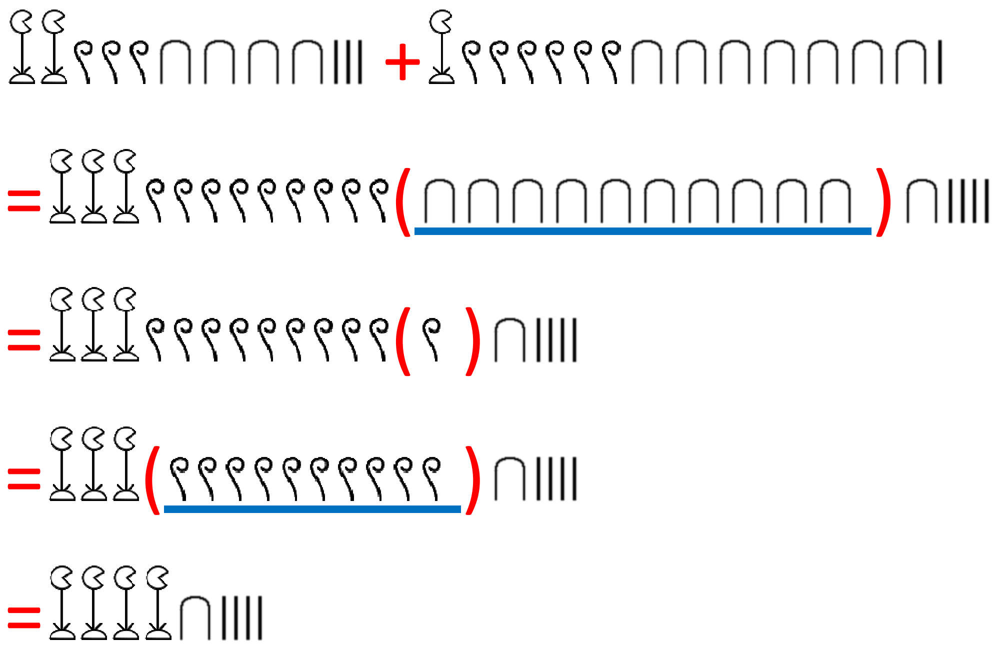
3. Opérations arithmétiques

Bien qu'aucune explication ne soit fournie par les papyrus mathématiques, beaucoup pensent que les Egyptiens n'étaient capables que d'effectuer l'opération d'addition de nombres. Toutes leurs techniques arithmétiques sont donc basées sur cette opération.

a. Somme et différence

L'addition de deux nombres consistait à compter le nombre total de symboles correspondant à une même grandeur. Si le nombre de cette grandeur dépassait dix, le scribe remplaçait ces dix symboles par le symbole de la grandeur supérieure. Chaque puissance de dix était représentée par un hiéroglyphe particulier. Le zéro était inconnu. Toutes les opérations étaient ramenées à des additions.

Par exemple : 2343+1671



b. Multiplication

La technique de multiplication dans l'Égypte antique reposait sur la décomposition d'un des nombres (généralement le plus petit) en une somme et la création d'une table de puissance pour l'autre nombre. Très souvent, cette décomposition s'effectuait suivant les puissances de deux. Mais celle-ci pouvait varier en fonction de la complexité de l'opération. Le plus petit nombre pouvait ainsi être décomposé alternativement suivant les puissances de deux, les dizaines et les fractions fondamentales telles que 2/3, 1/3, 1/10 etc.

Par exemple, voici, en nombres actuels, comment ils multipliaient 238 par 13. Ils multipliaient par deux d'une ligne à l'autre et cochaient en regard.

√	1	238
	2	476
√	4	952
√	8	1904
	13	3094

13 = 8 + 4 + 1 donc 13 × 238 = (8 + 4 + 1) × 238 = 8 × 238 + 4 × 238 + 1 × 238 = 3094.

Ici aussi, l'opération de multiplication est remplacée par une opération d'addition.

c. Division

i. avec résultat entier :

Prenons comme exemple l'opération à effectuer 264÷3. Par quoi doit-on multiplier 3 pour trouver 264 ? Pour cela l'une des méthodes à employer est d'établir, comme pour la multiplication, la table des puissances de deux :

	1	3
	2	6
	4	12
✔	8	24
✔	16	48
	32	96
✔	64	192
	88	264

Le résultat est 88.

ii. avec résultat en nombre fractionnaire

L'exemple traité ci-dessus est simple et conduit à un résultat entier. Or, il se peut que le résultat de l'opération soit un nombre fractionnaire.

Par exemple, pour calculer 212÷6

✔ 1	6
✔ 2	12
4	24
8	48
16	96
✔ 32	192
✔ 1/3	2
35+1/3	212

La table des puissances de deux ne permet de recomposer comme valeur la plus proche du dividende que 210. Il reste donc 2, représentant 1/3 de 6. Par conséquent le résultat de la division est 35+1/3.

iii. avec un opérateur fractionnaire

Cette technique permettait également d'opérer avec des nombres fractionnaires.

Par exemple 121 ÷ 5 1/2 (soit 121÷5,5)

1	5 1/2
✔ 2	11
✔ 4	22
8	44
✔ 16	88
22	121

Soit 121 ÷ 5 1/2 = 22

d. Fractions

L'arithmétique égyptienne utilisait la décomposition de toute fraction en somme de fractions unitaires (dont chaque numérateur valait 1).

Le papyrus de Rhind contient différentes tables permettant au mathématicien égyptien de décomposer directement les fractions non unitaires en fractions unitaires. Une de ces tables, la table dite « des fractions doubles » ou « de 2/n », se trouve en première position sur le papyrus de Rhind. Elle répertorie les fractions dont le numérateur est deux et dont le dénominateur n varie de trois à cent-un, n impairs et donne leur équivalent en somme de fractions unitaires.

Quelques exemples de décomposition en fractions unitaires de la table de deux :

2/5	1/3 + 1/15
2/11	1/6 + 1/66
2/101	1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606.

La technique utilisée par les Egyptiens est simplement la technique de la division.

Par exemple, cherchons à exprimer 2/27 en fractions unitaires. Il s'agit donc d'une division avec 2 comme numérateur et 27 comme dénominateur.

En suivant la technique de division on peut créer un tableau qui ressemble à ceci

	1	27
	1/3	9
	1/4	?*
	…	
√	1/18	1+1/2
√	1/54	1/2
	1/18+1/54	2

Pour trouver la case *, on pourra utiliser la technique de la multiplication :

	1	4
√	2	8
√	4	16
	…	
√	1/2	2
√	1/4	1
	6+1/2+1/4	27

D'après le premier tableau, on trouve donc que 2/27 = 1/18 + 1/54

4. Résolution d'équations : méthode de la fausse position

Eu égard à l'époque considérée, cette méthode de résolution procède d'une géniale pensée. Voici par exemple le problème 24 du papyrus de Rhind :

Un nombre ajouté à son septième donne 19

En notation algébrique moderne :

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

De nos jours, l'équation se ramène à $\frac{8x}{7} = 19$ (forme du type ax=b). L'idée première est de se débarrasser du dénominateur gênant en choisissant 7 comme solution "approchée" (fausse position) : le scribe obtient 8 dans le calcul du nombre augmenté de son septième. Il utilise ensuite implicitement l'algorithme suivant (x' = 7, c = 8) :

Si $ax = b$ et $ax' = c$ alors $\frac{ax}{ax'} = \frac{b}{c}$

Le problème revient donc à la recherche d'une quatrième proportionnelle :

$$\frac{?}{x'} = \frac{b}{c}$$

que l'on résout facilement, de nos jours !

Le scribe Ahmès expose exactement cela: il *divise* 19 par 8, ce qui lui fournit $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ et *multiplie* le tout par 7 (= 1 + 2 + 4), ce qui fournit

$$1.\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + 2.\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + 4.\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$$
$$= 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 8 + \frac{4}{4} + \frac{4}{8}$$
$$= 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

La solution de cette équation est $x = \frac{133}{8} = 16{,}625.$

5. Suites géométriques

Le problème 79 du papyrus de Rhind présente un problème concernant les suites géométriques :

Il y a sept maisons
Dans chaque maison il y a sept chats
Chaque chat mange sept souris
Chaque souris mange sept épis de blé
Chaque épi contient sept héqats de grain.
Combien de choses en tout

En outre, une des méthodes utilisées par Ahmès pour trouver la somme suggère une compréhension des séries géométriques. Ahmès effectue une somme directe :

maison	7
chats	49
souris	343
épis	2401
graines	16807
total	19607

Mais il présente aussi une simple multiplication pour obtenir la même réponse:

$$2801 \times 7 = 19607$$

Le nombre de maisons (7) est égal à la raison de la suite (7), et il utilise (de manière intuitive) la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} 7^k = 7\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} 7^k\right)$$

Autrement dit, lorsque le premier terme d'une suite géométrique est égal à la raison, des sommes partielles des séries géométriques peuvent être réduites à des multiplications impliquant la série finie ayant un terme de moins. Dans ce cas là, Ahmès ajoute simplement les quatre premiers termes de la séquence (7 + 49 + 343 + 2401 = 2800) pour produire une somme partielle, ajoute un (2801), puis multiplie simplement de 7 pour produire la bonne réponse.

6. Suites arithmétiques

Le problème 64 du papyrus de Rhind est le suivant :

Exemple de répartition de parts. Si on te dit : (on a)
10 <u>heqat</u> de blé pour 10 hommes. Et la différence entre un
homme et son voisin se monte à 1/8 de heqat de blé.

Leur solution est la suivante:

La répartition moyenne est de 1 heqat. Soustrais 1 de 10, il
reste 9. Prendre la moitié de la différence qui est 1/16. Les
9 fois qui valent 1/2 1/16 de heqat sont à additionner à la
répartition moyenne et tu dois soustraire 1/8 de heqat par
homme, chacun pris jusqu'au dernier. À faire selon ce qui
doit se produire.

Si l'on traduit cette solution en langage moderne, il considère les quantités (heqat) suivants : u_1, u_2, u_3, …, u_{10}. Le scribe calcule la valeur moyenne à distribuer (soit 1 heqat puisqu'il y a 10 hommes et 10 heqat).

La répartition moyenne est de 1 heqat

Ensuite, il se rend compte qu'entre chaque quantité à distribuer, il y a 9 intervalles.

Soustrais 1 de 10, il reste 9

La répartition moyenne se trouve entre le 5ème et le 6ème homme. Et la différence entre ces deux ci est de$\frac{1}{8}$. Le 5ème aura donc la moyenne moins la moitié de $\frac{1}{8}$ et le 6ème la moyenne plus $\frac{1}{8}$. Il cherche donc la moitié de la différence: $\frac{1}{2}.\frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

Prendre la moitié de la différence qui est 1/16

Pour connaitre la plus grande part, il multiplie cette demi-différence par 9 (nombre de demi-différence jusqu'à u_1). Et il ajoute à cela la valeur moyenne pour obtenir la plus grande part $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$.

Les 9 fois qui valent 1/2 1/16 de heqat sont à additionner à la répartition moyenne…

Il soustrait de cette plus grande valeur la différence commune $\frac{1}{8}$:

…et tu dois soustraire 1/8 de heqat par homme, chacun pris jusqu'au dernier. À faire selon ce qui doit se produire

Les parts sont donc :

$$u_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

$$u_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$$

$$u_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

$$u_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

$$u_5=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

$$u_6=1+\frac{1}{16}$$

$$u_7=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

$$u_8=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

$$u_9=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

$$u_{10}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$$

C'est pratiquement la même démarche que nous aurions fait en utilisant les formules des suites arithmétiques :

$$S_{10}=10, r=\frac{1}{8}$$

$$S_{10}=10\frac{a_1+a_{10}}{2}=10\frac{a_1+a_1+9.\frac{1}{8}}{2}$$

$$S_{10}=10\left(a_1+9.\frac{1}{16}\right)$$

$$a_1=\frac{S_{10}}{10}-\frac{9}{16}$$

$$a_1=1-\frac{9}{16}$$

Si l'on compare aux résultats obtenus plus haut, ils sont identiques. La seule différence est que nos formules permettent de calculer le 1^er^ terme et que les Egyptiens calculaient le dernier terme.

7. Conclusion

Grâce à nos recherches, nous avons pu découvrir que les Egyptiens étaient en réalité très avancés dans une multitude de domaines mathématiques. Ce fut assez difficile pour nous de comprendre. Le plus gros challenge fut de réfléchir comme eux car leur logique était bien différente de la nôtre.

8. Sources

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Mathématiques_dans_l'Egypte_antique
- http://monet-ezy-col.spip.ac-rouen.fr/IMG/pdf/Les_mathematiques_egyptiennes-4.pdf?fbclid=IwAR1Y0RuBs-INjlBjrdcRIzlNdE4-MgFrhjgysymq4jqhLJaSi8UcdNC2gBw
- http://serge.mehl.free.fr/anx/fauss_pos.html
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Numération_égyptienne
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Technique_de_la_multiplication_dans_l'Egypte_antique
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind
- https://scientificsentence.net/Equations/Maths2/egypte/index.php?key=yes&Integer=papyrus_rhind
- http://monod-math.etab.ac-lille.fr/files/2017/10/D16-LE-PAPYRUS-DE-RHIND.pdf?fbclid=IwAR0ELRbuLP5mcha4k5zSfpE7SNmY3GqDF3PdedK6WEZccI-NAXM60TY8aMA
- https://www.mom.fr/image_carto/ServiceImage/loret/loret_0990-5952_1990_bul_4/PDF/loret_0990-5952_1990_bul_4_p53-57.pdf
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Berlin_6619
- https://fr.qwe.wiki/wiki/Berlin_Papyrus_6619
- http://maarif28.e-monsite.com/pages/pages-cachees/les-mathematiques.html
- http://www.shenoc.com/science_Egyptienne.htm
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Héron
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Fraction_égyptienne#Les_fractions_dans_l'Egypte_antique
- http://numerisation.univ-irem.fr/WR/IWR17003/IWR17003.pdf?fbclid=IwAR2nSCzrWjvh5repJh2X4iPKM86zgUmcOajeK3yGbdKiHFny0tT8yNl6AGo
- http://maths.langella.free.fr/premiere_S/01_cours/CH11%20Suites_arithmetiques_et_geometriques.pdf
- http://serge.mehl.free.fr/chrono/Ahmes.html
- http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/viemaths/hist/dossier/resolcal/resolcal.htm
- https://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/les-developpements/409-les-fractions-egyptiennes
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Technique_de_la_division_dans_l'Egypte_antique
- http://www.univ-irem.fr/spip.php?article1305

Remarque : ce beau projet aurait dû être défendu lors de la 11ème édition du congrès Dédra-math-isons à Louvain-la-Neuve le 21 avril 2020.