Fiche savoir faire :
Les asymptotes

Asymptotes verticales

Méthode

La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de $f(x)$ si et seulement si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

Le signe de l'infini est déterminé par une étude de signe de $f(x)$ aux alentours de $x = a$. Les points de $f(x)$ susceptibles de présenter une asymptote verticale sont les points adhérents aux domaine (les valeurs ponctuelles rejetées du domaine).

Exemple

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$$

Le domaine de $f(x)$ est :

$$dom_f : \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

et

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$$

Il y a donc une asymptote verticale d'équation

$$AV \equiv x = 2$$

Le tableau de signe de la fonction est :

x		2	
$x^2 + 1$	+		+
$x - 2$	-	0	+
$f(x)$	-	$\pm\infty$	+

On a donc

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

et

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

Asymptotes horizontales

Méthode	La droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale de $f(x)$ si et seulement si $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$$ La position de la courbe par rapport à l'asymptote est déterminée par le signe à l'infini (tableau de signe) de la distance entre la fonction et l'asymptote : $$d(x) = f(x) - y_{AH}$$ Si cette distance est positive la courbe est située au-dessus de l'asymptote, sinon elle est située sous l'asymptote.
Exemple	Soit la fonction $$f(x) = \frac{3x^2+7x-4}{x^2+1}$$ et $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.}$$ $$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$ Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $$AH \equiv y = 3$$ La position de la courbe par rapport à l'asymptote est déterminée par le signe de la distance entre la fonction et l'asymptote : $$d(x) = f(x) - y_{AH}$$ Dans notre cas $$d(x) = \frac{3x^2+7x-4}{x^2+1} - 3$$ $$\Leftrightarrow d(x) = \frac{7x-7}{x^2+1}$$ L'étude de signe donne :

x		1	
$7x-7$	-	0	$+$
x^2+1	$+$		$+$
$d(x)$	-	0	$+$

La courbe est sous l'asymptote en $-\infty$ et au-dessus en $+\infty$

Asymptotes obliques

Méthode

$f(x)$ admet une asymptote oblique si et seulement si

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

L'équation de l'asymptote est

$$AO \equiv y = mx + p$$

où

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ \\ p = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] \end{cases}$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est déterminée par le signe à l'infini (tableau de signe) de la distance entre la fonction et l'asymptote :

$$d(x) = f(x) - y_{AO}$$

Si cette distance est positive la courbe est située au-dessus de l'asymptote, sinon elle est située sous l'asymptote.

Exemple

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{3x^3 + 7x - 4}{x^2 + 1}$$

et

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3}{x^2} = \pm\infty$$

On a :

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 + 7x - 4}{x^2 + 1} . \frac{1}{x}$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 + 7x - 4}{x^3 + x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3}{x^3} = 3$$

De plus

$$p = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{3x^3 + 7x - 4}{x^2 + 1} - 3x\right]$$

$$p = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x - 4}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$p = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2} = 0$$

Exemple (suite)

Il y a donc une asymptote oblique d'équation

$$AO \equiv y = 3x$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est déterminée par le signe de la distance entre la fonction et l'asymptote :

$$d(x) = f(x) - y_{A0}$$

Dans notre cas

$$d(x) = \frac{3x^3 + 7x - 4}{x^2 + 1} - 3x$$

$$\Leftrightarrow d(x) = \frac{4x - 4}{x^2 + 1}$$

L'étude de signe donne :

x		1	
$4x - 4$	-	0	+
$x^2 + 1$	+		+
$d(x)$	-	0	+

La courbe est sous l'asymptote en $-\infty$ et au-dessus en $+\infty$