FICHE SAVOIR FAIRE :

Division euclidienne de polynômes

Méthode

La division d'un polynôme P(x) (dividende) par un polynôme D(x) (diviseur) donne un polynôme Q(x) (quotient) et un polynôme R(x) (reste) liés par les relations :

$$P(x) = D(x).Q(x) + R(x)$$

où le degré de $R(x)$est inférieur au degré de $D(x)$ Pour faire une division euclidienne, on réalise un tableau comme pour une division de nombres réels :

$$\begin{array}{c|c} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} \vdots & Q(x) \\ \vdots & \\ \hline R(x) & \end{array}$$

Cette division s'arrête lorsque le degré de $R(x)$ est strictement inférieur au degré de $D(x)$.

Exemple

Divisons le polynôme $6x^4 - 2x^3 - 2x - 2$ par le polynôme $x^2 + 2$.

- La première étape consiste (comme pour la division de nombres) à voir par quoi multiplier x^2 (terme de plus haut degré du diviseur) pour obtenir $6x^4$ (premier terme du dividende).

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6x^4 & -2x^3 & & -2x & -2 & x^2+2 \\ \cline{6-6} & & & & & 6x^2 \end{array}$$

- On effectue la multiplication de ce facteur par le diviseur et on sosutrait les deux premières lignes.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6x^4 & -2x^3 & & -2x & -2 & x^2+2 \\ \cline{6-6} 6x^4 & & +12x^2 & & & 6x^2 \\ \cline{1-3} & -2x^3 & -12x^2 & & & \end{array}$$

- On recommence le processus avec la nouvelle ligne obtenue (voir par quoi multiplier x^2 (terme de plus haut degré du diviseur) pour obtenir $-2x^3$ (nouveau "premier" terme du dividende).

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6x^4 & -2x^3 & & -2x & -2 & x^2+2 \\ \cline{6-6} 6x^4 & & +12x^2 & & & 6x^2-2x \\ \cline{1-3} & -2x^3 & -12x^2 & & & \\ & -2x^3 & & -4x & & \\ \cline{2-4} & & -12x^2 & +4x & & \end{array}$$

- On continue jusque quand le degré du reste est inférieur au degré du diviseur (degré 2)

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6x^4 & -2x^3 & & -2x & -2 & x^2+2 \\ \cline{6-6} 6x^4 & & +12x^2 & & & 6x^2-2x-12 \\ \cline{1-3} & -2x^3 & -12x^2 & & & \\ & -2x^3 & & -4x & & \\ \cline{2-4} & & -12x^2 & +2x & & \\ & & -12x^2 & & -24 & \\ \cline{3-5} & & & 2x & +22 & \end{array}$$

On peut écrire

$$\frac{6x^4 - 2x^3 - 2x - 2}{x^2 + 2} = 6x^2 - 2x + 12 + \frac{2x + 22}{x^2 + 2}$$