

FICHE SAVOIR FAIRE :

Factorisation par la méthode des diviseurs binômes

Méthode

La factorisation d'un polynôme par la méthode des diviseurs binômes (méthode du désespoir) est basée sur la loi du reste (le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par un binôme de la forme $(x - a)$ est la valeur numérique de ce polynôme pour $x = a$). Pour factoriser le polynôme :

- On ordonne le polynôme dans l'ordre des puissances décroissantes de x .
- On cherche une racine entière :
 - On cherche les diviseurs entiers (positifs et négatifs) du terme indépendant.
 - On calcule la valeur du polynôme pour ces différentes valeurs, en commençant par les plus proches de 0. Dès qu'on trouve une valeur du polynôme nulle pour une de ces valeurs (appelons-la a), on a trouvé une racine.
- On effectue la division du polynôme par $(x - a)$ en utilisant le schéma de Horner. Elle doit donner un reste nul. Le polynôme s'écrit alors $P(x) = (x - a).Q(x)$ où $Q(x)$ est le quotient donné par le schéma d'Horner.
- On factorise ensuite de la même manière le polynôme quotient ainsi obtenu, en utilisant les diviseurs précédents, en recommençant à partir de la valeur a incluse.
- On continue l'opération jusqu'à obtenir un polynôme de degré 1 ou jusqu'à avoir épuisé les diviseurs du terme indépendant.
- Le polynôme de départ se factorise en un produit de facteurs de type $(x - a)$ avec les différents diviseurs utilisés multipliés par le dernier quotient obtenu.

Exemple

- On cherche à factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
- On recherche alors les diviseurs du terme indépendant : $div6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.
 - On évalue ensuite la valeur du polynôme $P(x)$ pour ces différentes valeurs. On obtient $P(1) = 0$. Le polynôme est donc divisible par $(x - 1)$.
 - En effectuant la division d'Horner, on obtient :

1	1	-2	-5	6
1		+(1.1)	+(-1.1)	+(-6.1)
x	1	-1	-6	0

1
↓
a

Le schéma d'Horner est le suivant :

- on place les coefficients du polynôme à factoriser sur la première ligne ;
 - on place la valeur de a trouvée (ici 1) à l'extrême gauche sur la deuxième ligne ;
 - on descend le premier chiffre ;
 - on multiplie ce chiffre par a et on le place en dessous du deuxième coefficient du polynôme sur la deuxième ligne ;
 - on additionne les deux chiffres et on place le résultat sur la troisième ligne ;
 - on recommence jusqu'au bout (le dernier chiffre doit toujours être égal à zéro) ;
 - les chiffres sur la troisième ligne sont les coefficients du polynôme quotient.
- On peut donc écrire : $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$.
- En effectuant la même démarche pour le polynôme $Q(x) = x^2 - x - 6$, on obtient : $P(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$.