Nom, Prénom:

Evaluation formative n°1 - Solutions

Inéquations trigonométriques

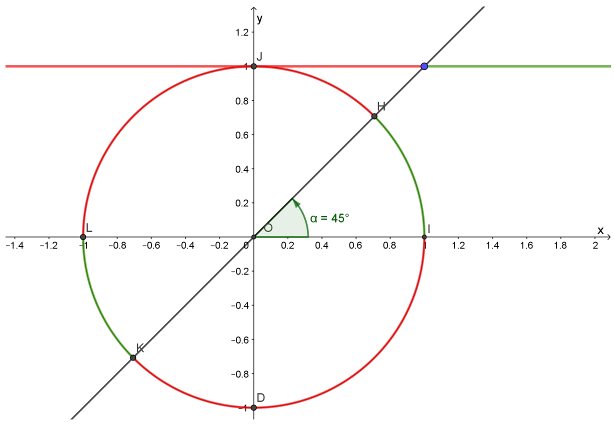
Série A

Le 28 septembre 2023 | Classe: 6A

1. Résoudre et donner toutes les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$:

$$\cot\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \geq 1$$

D'après le cercle trigonométrique, on trouve :



La solution, compte tenu des CE de $\cot x$ est donc : $\frac{\pi}{3} - 2x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right] + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.
Pour trouver la valeur de x, on a successivement :

$$0 < \frac{\pi}{3} - 2x \leq \frac{\pi}{4} \quad + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < -2x \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \quad + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < -2x \leq -\frac{\pi}{12} \quad + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} \leq 2x < \frac{\pi}{3} \quad + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{24} \leq x < \frac{\pi}{6} \quad + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Enfin, pour trouver les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, on donne quatre valeurs à k :
- $k = 0 : x \in \left[\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{6}\right[$
- $k = 1 : x \in \left[\frac{13\pi}{24}, \frac{2\pi}{3}\right[$
- $k = 2 : x \in \left[\frac{25\pi}{24}, \frac{7\pi}{6}\right[$
- $k = 3 : x \in \left[\frac{37\pi}{24}, \frac{5\pi}{3}\right[$

La solution est donc :

$$S_p : \left[\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{13\pi}{24}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left[\frac{25\pi}{24}, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{37\pi}{24}, \frac{5\pi}{3}\right[$$

2. Résoudre et donner toutes les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x - 2 < 0$$

En transformant l'inéquation pour avoir une homogénéité de fonctions trigonométriques, on a :

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) - \sqrt{3}\sin x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x < 0$$

Les zéros de cette inéquation [1] sont $\sin x = 0$ ou $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On peut dès lors dresser le TS :

$\sin x$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0	
In	-	0	$+$	0	-

Vu que $-1 \leq \sin x \leq 1$, on a donc :

$$\sin x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup\,]0, 1]$$

ou, à l'aide du cercle trigonométrique :

$$S_p :]0, \pi]\, [\cup \left]\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$$

3. Résoudre et donner toutes les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$

$$\frac{1 - 2\cos 2x}{\cos 2x + \cos x} \leq 0$$

C'est une inéquation générale, il faut donc faire un TS.
Cherchons les zéros du numérateur (dans l'intervalle $[0, 2\pi[$). On a :

$$1 - 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{11\pi}{6}$$

1. obtenu par factorisation ou Δ

De même pour le dénominateur :

$$\cos 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0 \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos x = -1$$

En terme d'angle on a

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ \\ x = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Dans l'intervalle $[0, 2\pi[$:

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \pi$$

Le tableau de signe est donc :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$1 - 2\cos 2x$		-	0	+		+	0	-		-	0	+		+	0	-	
$2\cos x - 1$		+		+	0	-		-		-		-	0	+		+	
$\cos x + 1$		+		+		+		+	0	+		+		+		+	
$In(x)$		-	0	+	$\nexists$	-	0	+	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	+	0	-	

La solution est donc :

$$S : \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right[\cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right[$$

Nom, Prénom:

Evaluation formative n°1 - Solutions

Inéquations trigonométriques

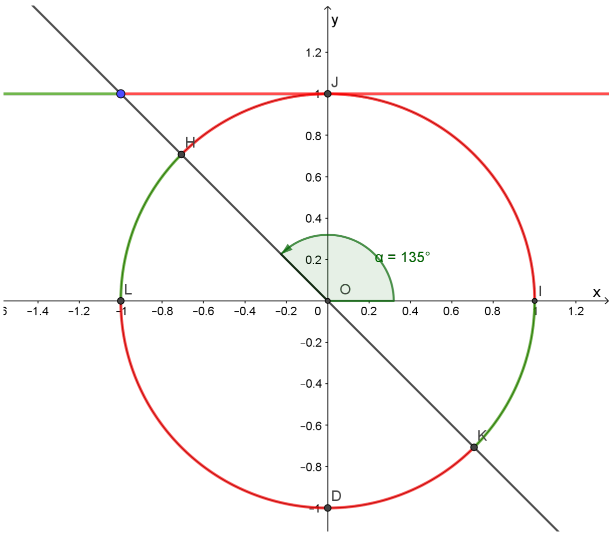
Série B

Le 28 septembre 2023 Classe: 6A

1. Résoudre et donner toutes les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$:

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \leq -1$$

D'après le cercle trigonométrique, on trouve :



La solution, compte tenu des CE de $\cot x$ est donc : $\frac{\pi}{4} - 3x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right[+ k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Pour trouver la valeur de x, on a successivement :

$$\frac{3\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - 3x < \pi \quad + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq -3x < \frac{3\pi}{4} \quad + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < 3x \leq -\frac{\pi}{2} \quad + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < x \leq -\frac{\pi}{6} \quad + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Enfin, pour trouver les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, on donne six valeurs à k.

- $k = 1 : x \in \left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$
- $k = 2 : x \in \left]\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $k = 3 : x \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$
- $k = 4 : x \in \left]\frac{13\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}\right]$
- $k = 5 : x \in \left]\frac{17\pi}{12}, \frac{3\pi}{2}\right]$
- $k = 6 : x \in \left]\frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}\right]$

La solution est donc :

$$S_p : \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{13\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{17\pi}{12}, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}\right]$$

2. Résoudre et donner toutes les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$

$$\frac{2\cos 2x - 1}{\cos 2x + \cos x} \geq 0$$

C'est une inéquation générale, il faut donc faire un TS.
Cherchons les zéros du numérateur (dans l'intervalle $[0, 2\pi[$). On a :

$$2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

De même pour le dénominateur :

$$\cos 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0 \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos x = -1$$

En terme d'angle on a

$$\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ \\ x = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Dans l'intervalle $[0, 2\pi[$:

$$x = -\frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \pi$$

Le tableau de signe est donc :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$		$2/pi$
$2\cos 2x - 1$		+	0	-		-	0	+		+	0	-		-	0	+	
$2\cos x - 1$		+		+	0	-		-		-		-	0	+		+	
$\cos x + 1$		+		+		+		+	0	+		+		+		+	
$In(x)$		+	0	-	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+	$\nexists$	-	0	+	

La solution est donc :

$$S : \left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right[\cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right[$$

3. Résoudre et donner toutes les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x - 2 < 0$$

En transformant l'inéquation pour avoir une homogénéité de fonctions trigonométriques, on a :

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) - \sqrt{3}\sin x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x < 0$$

Les zéros de cette inéquation [2] sont $\sin x = 0$ ou $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
On peut dès lors dresser le TS :

$\sin x$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0	
In	-	0	$+$	0	-

Vu que $-1 \leq \sin x \leq 1$, on a donc :

$$\sin x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup]0, 1]$$

ou, à l'aide du cercle trigonométrique :

$$S_p :]0, \pi] [\cup \left]\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$$

2. obtenu par factorisation ou Δ