Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°7 - Solutions

Analyse combinatoire

Série A

Le 20 mars 2025 Classe: 6BCD

Remarque préliminaire : On développera complètement les calculs et on indiquera la réponse finale chiffrée. Tout résultat "lancé" sur le papier sera considéré comme faux.

.../4 1. Combien peut-on former de plaques de voitures contenant :

(a) 6 caractères qui doivent être des lettres ou des chiffres ;
$36^6 = 2176782336$

(b) 6 caractères qui doivent être 3 lettres suivies de 3 chiffres ;
$26^3.10^3 = 17576000$

(c) 6 caractères qui doivent être 3 lettres, la première étant différente de Z(garage), M(moto), U(remorque) et O(ancêtre), suivies de 3 chiffres ;
$22.26^2.10^3 = 14872000$

(d) 7 caractères, et les mêmes contraintes que dans la question précédente, comme les nouvelles plaques belges.
$9.22.26^2.10^3 = 133848000$

.../3 2. Sans développer explicitement tout le binôme, déterminer le terme en t du développement de $(2t^2 - \frac{4}{t})^5$.

Le terme général est $C_5^k(2t^2)^{5-k}\left(-\frac{4}{t}\right)^k$. Dès lors la puissance de t dans ce terme est $10-3k$.

On demande le terme en t donc $10 - 3k = 1$ ou $k = 3$.

Le terme en t est donc $C_5^3(2t^2)^2\left(-\frac{4}{t}\right)^3 = -2560t$.

.../5 3. De combien de manières différentes peut-on former de groupes de 3 élèves dans une classe de 10 élèves :

(a) sans autre précision ;
$\frac{10.9.8}{3!} = 120$

(b) si Sabine et Claire ne veulent pas travailler ensemble ;
Il s'agit du nombre total de groupes diminué du nombre de groupes où Sabine et Claire sont présentes, soit $120 - 1.1.8 = 112$

(c) si Olivier et Sébastien ne veulent travailler que s'ils sont ensemble.
C'est le nombre de groupes où ils sont tous les deux présents ou tous les deux absents, soit $1.1.8 + \frac{8.7.6}{3!} = 64$

.../6 4. Avec neuf chiffres (différents de 0), combien peut-on faire de nombres de cinq chiffres distincts :

(a) sans autre condition ;
$9.8.7.6.5 = 15120$

(b) qui se terminent par 79 ;
$7.6.5.1.1 = 210$

(c) qui comprennent 4 ;
$(8.7.6.5.1).5 = 8400$

(d) qui comprennent 4 et 5 ;
$(1.1.7.6.5).5.4 = 4200$

(e) qui comprennent 4 et 5 groupés dans un ordre quelconque ;
$(\boxed{2}.7.6.5).4 = 1680$

(f) qui comprennent 4 et 5 groupés dans l'ordre décroissant ;
$(\boxed{1}.7.6.5).4 = 840$

(g) dont deux chiffres sont pairs et trois impairs.
$\frac{5.4.3}{3!}.\frac{4.3}{2!}.5! = 7200$

.../3 5. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot RESSASSER :

(a) sans autre précision ;
$\frac{9!}{2!2!4!} = 3780$

(b) commençant par R et se terminant par S ;
$\frac{2.7!4}{2!2!4!} = 420$

(c) contenant les consonnes groupées et les voyelles groupées.
$\frac{\boxed{3\,!}\boxed{6\,!}.2!}{2!2!4!} = 90$

.../4 6. Développer complètement $(x\sqrt{2} - \frac{1}{2x})^5$.

$$\begin{aligned}(x\sqrt{2} - \frac{1}{2x})^5 &= C_5^0\left(x\sqrt{2}\right)^5 + C_5^1\left(x\sqrt{2}\right)^4\left(-\frac{1}{2x}\right) + C_5^2\left(x\sqrt{2}\right)^3\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 ... + C_5^5\left(-\frac{1}{2x}\right)^5 \\ &= 4\sqrt{2}x^5 - 10x^3 + 5\sqrt{2}x - \frac{5}{2x} + \frac{5\sqrt{2}}{16x^3} - \frac{1}{32x^5}\end{aligned}$$

Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°7 - Solutions

Analyse combinatoire

Série B

Le 20 mars 2025 Classe: 6BCD

Remarque préliminaire : On développera complètement les calculs et on indiquera la réponse finale chiffrée. Tout résultat "lancé" sur le papier sera considéré comme faux.

.../6 1. Avec neuf chiffres (différents de 0), combien peut-on faire de nombres de cinq chiffres distincts :

(a) sans autre condition ;
$9.8.7.6.5 = 15120$

(b) qui se terminent par 79 ;
$7.6.5.1.1 = 210$

(c) qui comprennent 4 ;
$(8.7.6.5.1).5 = 8400$

(d) qui comprennent 4 et 5 ;
$(1.1.7.6.5).5.4 = 4200$

(e) qui comprennent 4 et 5 groupés dans un ordre quelconque ;
$(\boxed{2}.7.6.5).4 = 1680$

(f) qui comprennent 4 et 5 groupés dans l'ordre décroissant ;
$(\boxed{1}.7.6.5).4 = 840$

(g) dont deux chiffres sont pairs et trois impairs.
$\frac{5.4.3}{3!}.\frac{4.3}{2!}.5! = 7200$

.../4 2. Développer complètement $(u\sqrt{2} - \frac{1}{2u})^5$.

$$\begin{aligned}(u\sqrt{2} - \frac{1}{2u})^5 &= C_5^0\left(u\sqrt{2}\right)^5 + C_5^1\left(u\sqrt{2}\right)^4\left(-\frac{1}{2u}\right) + C_5^2\left(u\sqrt{2}\right)^3\left(-\frac{1}{2u}\right)^2 ... + C_5^5\left(-\frac{1}{2u}\right)^5 \\ &= 4\sqrt{2}u^5 - 10u^3 + 5\sqrt{2}u - \frac{5}{2u} + \frac{5\sqrt{2}}{16u^3} - \frac{1}{32u^5}\end{aligned}$$

.../4 3. Combien peut-on former de plaques de voitures contenant :

(a) 6 caractères qui doivent être des lettres ou des chiffres ;
$36^6 = 2176782336$

(b) 6 caractères qui doivent être 3 lettres suivies de 3 chiffres ;
$26^3.10^3 = 17576000$

(c) 6 caractères qui doivent être 3 lettres, la première étant différente de Z(garage), M(moto), U(remorque) et O(ancêtre), suivies de 3 chiffres ;
$22.26^2.10^3 = 14872000$

(d) 7 caractères, et les mêmes contraintes que dans la question précédente, comme les nouvelles plaques belges.
$9.22.26^2.10^3 = 133848000$

.../3 4. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot VENENEUSES :

(a) sans autre précision ;
$\frac{10!}{2!2!4!} = 37800$

(b) commençant par N et se terminant par E ;
$\frac{2.8!4}{2!2!4!} = 3360$

(c) contenant les consonnes groupées et les voyelles groupées.
$\frac{\boxed{5\,!}\boxed{5\,!}.2!}{2!2!4!} = 300$

.../5 5. De combien de manières différentes peut-on former de groupes de 3 élèves dans une classe de 10 élèves :

(a) sans autre précision ;
$\frac{10.9.8}{3!} = 120$

(b) si Sabine et Claire ne veulent pas travailler ensemble ;
Il s'agit du nombre total de groupes diminué du nombre de groupes où Sabine et Claire sont présentes, soit $120 - 1.1.8 = 112$

(c) si Olivier et Sébastien ne veulent travailler que s'ils sont ensemble.
C'est le nombre de groupes où ils sont tous les deux présents ou tous les deux absents, soit $1.1.8 + \frac{8.7.6}{3!} = 64$

.../3 6. Sans développer explicitement tout le binôme, déterminer le terme en x du développement de $(2x^2 - \frac{4}{x})^5$.

Le terme général est $C_5^k(2x^2)^{5-k}\left(-\frac{4}{x}\right)^k$. Dès lors la puissance de x dans ce terme est $10-3k$. On demande le terme en x donc $10-3k=1$ ou $k=3$.

Le terme en x est donc $C_5^3(2x^2)^2\left(-\frac{4}{x}\right)^3 = -2560x$.