Nom, Prénom:

Interrogation N°6 - Solutions

Fonctions circulaires

Série A

Le 27 novembre 2018 Classe: 6B

1. Déterminer la période de $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{3}\right).\sin\left(\frac{3x}{4}+\frac{2\pi}{5}\right)$. Justifier ***en détail*** les résultats.

   Les calculs sont similaires à ceux développés lors des séances d'exercices. La période de $\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)$ est 3π et celle de $\sin\left(\frac{3x}{4}+\frac{2\pi}{5}\right)$ est $\frac{8\pi}{3}$ (le terme $\frac{2\pi}{5}$ n'influence en rien la période). La période de $f(x)$ est donc 24π (pgcd des périodes des deux fonctions)

2. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\cos x}{2-x^3}$

   Par le théorème de l'étau, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$. Dès lors

   $$\frac{-x^2}{2-x^3} \leq \frac{x^2\cos x}{2-x^3} \leq \frac{x^2}{2-x^3}$$

   et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{2-x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2-x^3} = 0$. Dès lors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\cos x}{2-x^3} = 0$

   (b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2\cos x}{1-\cos 2x}$

   On a $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2\cos x}{1-\cos 2x} = \frac{0}{0}$ F.I.

   $= \lim\limits_{x\to0} \frac{x^2\cos x}{1-(1-2\sin^2 x)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x^2\cos x}{2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

3. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{1+\cos^2 x}$ définie sur $[-\pi, \pi]$.

   (a) Etudier la parité de la fonction. En déduire l'intervalle d'étude.
   Puisque $\cos(-x) = \cos x$, on voit que $f(-x) = f(x)$. La fonction est donc paire et peut être étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$.

   (b) Etudier les variations de $f(x)$.

   $f'(x) = \dfrac{\sin x(2\cos x - \sin^2 x)}{(1+\cos^2 x)^2}$.
   Sur $[0, \pi]$ (en raison du domaine de définition de la fonction et de son caractère pair),
   $$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = \cos^{-1}(\sqrt{2}-1) \end{cases}$$
   Le tableau de signe de $f'(x)$ est :

x	0		$\cos^{-1}(\sqrt{2}-1)$		π
$\sin x$	0	$+$		$+$	0
$2\cos x - \sin^2 x$		$+$	0	-	
	0	$+$	0	-	0
	m		M		m
	(0,1)	$\nearrow$	$(\cos^{-1}(\sqrt{2}-1), \dfrac{\sqrt{2}+1}{2})$	$\searrow$	$(\pi, 0)$

   (c) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse $\dfrac{3\pi}{4}$

   $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$ et $f'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{4+\sqrt{2}}{9}$.

$$t \equiv y - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4+\sqrt{2}}{9}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

Nom, Prénom:

Interrogation N°6 - Solutions

Fonctions circulaires

Série B

Le 27 novembre 2018 Classe: 6B

1. Déterminer la période de $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{4}\right).\cos\left(\frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{7}\right)$. Justifier ***en détail*** les résultats.

   Les calculs sont similaires à ceux développés lors des séances d'exercices. La période de $\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)$ est 4π et celle de $\cos\left(\frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{7}\right)$ est $\frac{10\pi}{3}$ (le terme $\frac{3\pi}{7}$ n'influence en rien la période). La période de $f(x)$ est donc 60π (pgcd des périodes des deux fonctions)

2. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{\cos^2 x + 1}$ définie sur $[-\pi, \pi]$.

   (a) Etudier la parité de la fonction. En déduire l'intervalle d'étude.
   Puisque $\cos(-x) = \cos x$, on voit que $f(-x) = f(x)$. La fonction est donc paire et peut être étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$.

   (b) Etudier les variations de $f(x)$.

   $$f'(x) = \frac{\sin x(2\cos x + \sin^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2}$$

   Sur $[0, \pi]$ (en raison du domaine de définition de la fonction et de son caractère pair),

   $$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = \cos^{-1}(1 - \sqrt{2}) \end{cases}$$

   Le tableau de signe de $f'(x)$ est :

x	0		$\cos^{-1}(1-\sqrt{2})$		π
$\sin x$	0	+		+	0
$2\cos x + \sin^2 x$		+	0	-	
	0	+	0	-	0
	m		M		m
	(0,0)	$\nearrow$	$(\cos^{-1}(1-\sqrt{2}), \frac{\sqrt{2}+1}{2})$	$\searrow$	$(\pi, 1)$

   (c) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{4}$

   $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$ et $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4 + \sqrt{2}}{9}$.

   $$t \equiv y - \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4 + \sqrt{2}}{9}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

3. (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 \sin x}{x^4 - 3}$

Par le théorème de l'étau, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$. Dès lors

$$-\frac{x^3}{x^4-3} \leq \frac{x^3 \sin x}{x^4-3} \leq \frac{x^3}{x^4-3}$$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x^3}{x^4-3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^4-3} = 0$. Dès lors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 \sin x}{x^4-3} = 0$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cos x}{\cos 2x - 1}$

On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cos x}{\cos 2x - 1} = \dfrac{0}{0}$ F.I.

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cos x}{(1 - 2\sin^2 x) - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cos x}{-2 \sin^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{-2} = -\dfrac{1}{2}$