Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°4 - Solutions

Géométrie analytique dans l'espace

Série A

Le 22 novembre 2021 — Classe: 6A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne :
- les points $A(0,0,1)$;
- la droite d'équations $d \equiv \dfrac{4-2x}{2} = \dfrac{y-3}{2} = 1-z$
- la sphère d'équation $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + z = -\dfrac{9}{4}$

.../3 1. Déterminer les coordonnées du centre de la sphère ainsi que son rayon ;

En effectuant la complétion du carré, on obtient :

$$\begin{gathered}(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + \left(z^2 + z + \frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{4} + 1 + 4 + \frac{1}{4} \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 3\end{gathered}$$

Les coordonnées du centre sont donc $(1,2,-2)$ et le rayon vaut $\sqrt{3}$

.../3 2. Déterminer les coordonnées d'un point et les composantes d'un vecteur directeur de d ;

Si l'on écrit les équations paramétriques de d, on obtient

$$d \equiv \frac{4-2x}{2} = \frac{y-3}{2} = 1 - z = k \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2x = 2k \\ y - 3 = 2k \\ z = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 3 + 2k \\ z = 1 - k \end{cases}$$

Un point P a pour coordonnées $(2,3,1)$ et un vecteur directeur a pour composante $\vec{v}$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

.../7 3. Ecrire l'équation du plan contenant A et d ;

On a vu à la question précédent qu'un vecteur directeur de d est $\vec{v}:\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et un point de d est $P:(2,3,1)$. On peut donc construire un deuxième vecteur directeur $\overrightarrow{AP}:\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$.

Le plan contenant A et d a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x-2y-7z+7=0$$

.../7 4. Déterminer la distance entre A et la droite d.

Le plan perpendiculaire à d passant par A a pour équation $\pi \equiv -x+2y-z+d=0$. Comme A appartient à π, on obtient $d=1$ et donc $\pi \equiv -x+2y-z+1=0$.

Pour chercher les coordonnées du point d'intersection de d dans π, on résout l'équation $-(2-k)+2(3+2k)-(1-k)+1=0$ soit $k=-\dfrac{2}{3}$.

En remplaçant cette valeur dans les équations paramétriques de d on trouve les coordonnées du point d'intersection soit $I\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3}\right)$.

Finalement $d(A,d)=d(A,I)=\dfrac{\sqrt{93}}{3}$.

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°4 - Solutions

Géométrie analytique dans l'espace

Série B

Le 22 novembre 2021 Classe: 6A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne :
- les points $A(1,0,0)$;
- la droite d'équations $d \equiv 1 - x = \dfrac{4-2y}{2} = \dfrac{z-3}{2}$
- la sphère d'équation $x^2 + x + y^2 - 2y + z^2 - 4z = -\dfrac{9}{4}$

.../3 1. Déterminer les coordonnées du centre de la sphère ainsi que son rayon ;
En effectuant la complétion du carré, on obtient :

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + (y^2 - 2x + 1) + (z^2 - 4z + 4) = -\frac{9}{4} + 1 + 4 + \frac{1}{4}$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3$$

Les coordonnées du centre sont donc $(-2,1,2)$ et le rayon vaut $\sqrt{3}$

.../3 2. Déterminer les coordonnées d'un point et les composantes d'un vecteur directeur de d ;
Si l'on écrit les équations paramétriques de d, on obtient

$$d \equiv 1 - x = \frac{4-2y}{2} = \frac{z-3}{2} = k \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k \\ 4 - 2y = 2k \\ z - 3 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 - k \\ z = 3 + 2k \end{cases}$$

Un point P a pour coordonnées $(1,2,3)$ et un vecteur directeur a pour composante $\vec{v}$: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

.../7 3. Ecrire l'équation du plan contenant A et d;

On a vu à la question précédent qu'un vecteur directeur de d est $\vec{v} : \vec{-1-12}$ et un point de d est $P : (1, 2, 3)$. On peut donc construire un deuxième vecteur directeur $\overrightarrow{AP} : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Le plan contenant A et d a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -7x + 3y - 2z + 7 = 0$$

.../7 4. Déterminer la distance entre A et la droite d.

Le plan perpendiculaire à d passant par A a pour équation $\pi \equiv -x - y + 2z + d = 0$. Comme A appartient à π, on obtient $d = 1$ et donc $\pi \equiv -x - y + 2z + 1 = 0$.

Pour chercher les coordonnées du point d'intersection de d dans π, on résout l'équation $-(1-k) - (2-k) + 2(3+2k) + 1 = 0$ soit $k = -\frac{2}{3}$.

En remplaçant cette valeur dans les équations paramétriques de d on trouve les coordonnées du point d'intersection soit $I\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Finalement $d(A, d) = d(A, I) = \frac{\sqrt{93}}{3}$.