Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°3 - Solutions

Fonctions trigonométriques

Série A

Le 27 octobre 2021 Classe: 6A

.../6 1. Calculer la période de la fonction $f(x) = \dfrac{\cos^2 2x}{\tan 3x}$

La période de $\tan 3x$ est $\dfrac{\pi}{3}$ puisque celle de $\tan x$ est π.
Pour celle de $\cos^2 2x$, il faut résoudre l'équation $\cos^2 2x = \cos^2 2(x+T)$ ou $\cos 2x = \pm\cos 2(x+T)$ soit le système

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos 2(x+T) \\ \cos 2x = -\cos 2(x+T) \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos 2(x+T) \\ \cos 2x = \cos\left[\pi + 2(x+T)\right] \end{cases}$$

La solution du premier système est $T = \pi$ (c'est la période de $\cos 2x$). Pour le second, les solutions sont

$$\begin{cases} 2x = \pi + 2x + 2T + 2k\pi \\ 2x = -(\pi + 2x + 2T) + 2k\pi \end{cases}$$

La seule solution acceptable est $T = \dfrac{\pi}{2}$ (la deuxième équation est impossible). La période de $\cos^2 2x$ est donc $T = \dfrac{\pi}{2}$.

La période de la fonction est donc le PPCM de $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{3}$ soit $T = \pi$.

2. Calculer, sans utiliser la règle de l'Hospital :

.../3 (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos 2x}$

On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos 2x} = \frac{0}{0}$ F.I.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos 2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-(1-2\sin^2 x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2\sin^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

.../3 (b) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{\cos x - 1}$

On a $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{\cos x - 1} = \frac{0}{0}$ F.I.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{\cos x - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(\cos x + 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(\cos x + 1)}{-\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} -2(\cos x + 1) \\
&= -4
\end{aligned}$$

.../8 3. On donne la fonction $f(x) = \sin x \sin 2x$ de période 2π et paire. Etudier les variations de $f(x)$ sur un intervalle que l'on justifiera. On ne demande pas les coordonnées des extrémums.

La période étant 2π et la fonction étant paire, on l'étudiera sur l'intervalle $[0, \pi]$.

On a $f'(x) = \cos x \sin 2x + 2 \sin x \cos 2x$.

Cherchons les zéros de la dérivée. On a successivement

$$\begin{aligned}
&\cos x \sin 2x + 2 \sin x \cos 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2 \sin x \cos^2 x + 2 \sin x (1 - 2\sin^2 x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x (1 - 2\sin^2 x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2 \sin x \left[1 - \sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2 \sin x (2 - 3\sin^2 x) = 0
\end{aligned}$$

dont les solutions sont (sur l'intervalle $[0, \pi]$)

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 0,955 \\ x = 2,186 \end{cases}$$

Le tableau de variation est :

x	0		0,955		2,186		π
$\sin x$	0	+		+		+	0
-3		-		-		-	
$\sin x - \sqrt{\frac{2}{3}}$		-	0	+	0	-	
$\sin x + \sqrt{\frac{2}{3}}$		+		+		+	
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0
	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	M

Nom, Prénom:

<u>Devoir surveillé n°3 - Solutions</u>

<u>Fonctions trigonométriques</u>

<u>Série B</u>

Le 27 octobre 2021   <u>Classe:</u> 6A

.../8   1. On donne la fonction $f(x) = \sin 2x \sin x$ de période 2π et paire. Etudier les variations de $f(x)$ sur un intervalle que l'on justifiera. On ne demande pas les coordonnées des extrémums.
La période étant 2π et la fonction étant paire, on l'étudiera sur l'intervalle $[0, \pi]$.
On a $f'(x) = \cos x \sin 2x + 2\sin x \cos 2x$.
Cherchons les zéros de la dérivée. On a successivement

$$\begin{aligned}
&\cos x \sin 2x + 2\sin x \cos 2x = 0\\
&\Leftrightarrow 2\sin x \cos^2 x + 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) = 0\\
&\Leftrightarrow 2\sin x(1 - \sin^2 x) + 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) = 0\\
&\Leftrightarrow 2\sin x\left[1 - \sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x\right] = 0\\
&\Leftrightarrow 2\sin x(2 - 3\sin^2 x) = 0
\end{aligned}$$

dont les solutions sont (sur l'intervalle $[0, \pi]$)

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0\\ x = \pi \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 0,955\\ x = 2,186 \end{array}\right.$$

Le tableau de variation est :

x	0		0,955		2,186		π
$\sin x$	0	+		+		+	0
-3		-		-		-	
$\sin x - \sqrt{\dfrac{2}{3}}$		-	0	+	0	-	
$\sin x + \sqrt{\dfrac{2}{3}}$		+		+		+	
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0
	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	M

2. Calculer, sans utiliser la règle de l'Hospital :

.../3 (a) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{\cos x - 1}$

On a $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{\cos x - 1} = \frac{0}{0}$ F.I.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{\cos x - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(\cos x + 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(\cos x + 1)}{-\sin^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0} -2(\cos x + 1) \\ &= -4\end{aligned}$$

.../3 (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x}$

On a $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x} = \frac{0}{0}$ F.I.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1 - (1 - 2\sin^2 x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{2\sin^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

.../6 3. Calculer la période de la fonction $f(x) = \frac{\tan 3x}{\cos^2 2x}$

La période de $\tan 3x$ est $\frac{\pi}{3}$ puisque celle de $\tan x$ est π.

Pour celle de $\cos^2 2x$, il faut résoudre l'équation $\cos^2 2x = \cos^2 2(x+T)$ ou $\cos 2x = \pm \cos 2(x+T)$ soit le système

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos 2(x+T) \\ \cos 2x = -\cos 2(x+T) \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos 2(x+T) \\ \cos 2x = \cos\left[\pi + 2(x+T)\right] \end{cases}$$

La solution du premier système est $T = \pi$ (c'est la période de $\cos 2x$). Pour le second, les solutions sont

$$\begin{cases} 2x = \pi + 2x + 2T + 2k\pi \\ 2x = -(\pi + 2x + 2T) + 2k\pi \end{cases}$$

La seule solution acceptable est $T = \frac{\pi}{2}$ (la deuxième équation est impossible). La période de $\cos^2 2x$ est donc $T = \frac{\pi}{2}$.

La période de la fonction est donc le PPCM de $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$ soit $T = \pi$.