Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°14 - Solutions

Etudes de fonctions exponentielles et logarithmiques

Série A

Le 9 mai 2019 Classe: 6B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1,+\infty$ par :

$$f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$$

On nomme $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y=\ln x$ dans un repère orthonormal$(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.
   On a
   $$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$
   ou
   $$f'(x)=\frac{1}{x}\frac{1+\ln^2 x}{\ln^2 x}$$
   En outre $\lim\limits_{x\to 1}\ln x-\dfrac{1}{\ln x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-\dfrac{1}{\ln x}=+\infty$
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$. Interpréter graphiquement cette limite.
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0.$
   La courbe $y=\ln x$ est donc asymptote de la fonction $f(x)$
3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ passant par O.
   (a) Soit a un réel de l'intervalle $]1,+\infty$. Démontrer que la tangente t_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a passe par l'origine si et seulement si $f(a)-af'(a)=0$.
   La tangente en $x=a$ a pour équation $t\equiv y-f(a)=f'(a)(x-a)$ ou, en développant :
   $$y=f'(a)x+f(a)-f'(a)a$$
   Elle passe par l'originie si le terme indépendant est nul, c'est à dire $f(a)-f'(a)a=0$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty$ par :

$$g(x) = f(x) - xf'(x)$$

(b) Monter que sur $]1, +\infty$, les équations $g(x) = 0$ et $\ln^3 x - \ln^2 x - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

En explicitant $g(x)$, on obtient $g(x) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x} - x\dfrac{1}{x}\dfrac{1 + \ln^2 x}{\ln^2 x}$ ou, en réduisant l'expression :

$$g(x) = \frac{\ln^3 x - \ln^2 x - \ln x - 1}{\ln^2 x}$$

Les équations $g(x) = 0$ et $\ln^3 x - \ln^2 x - \ln x - 1 = 0$ ont donc les mêmes solutions.

(c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.

On a $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1$. Cette dérivée s'annule en $t = -\dfrac{1}{3}$ et $t = 1$ et le tableau de variation de $u(t)$ est :

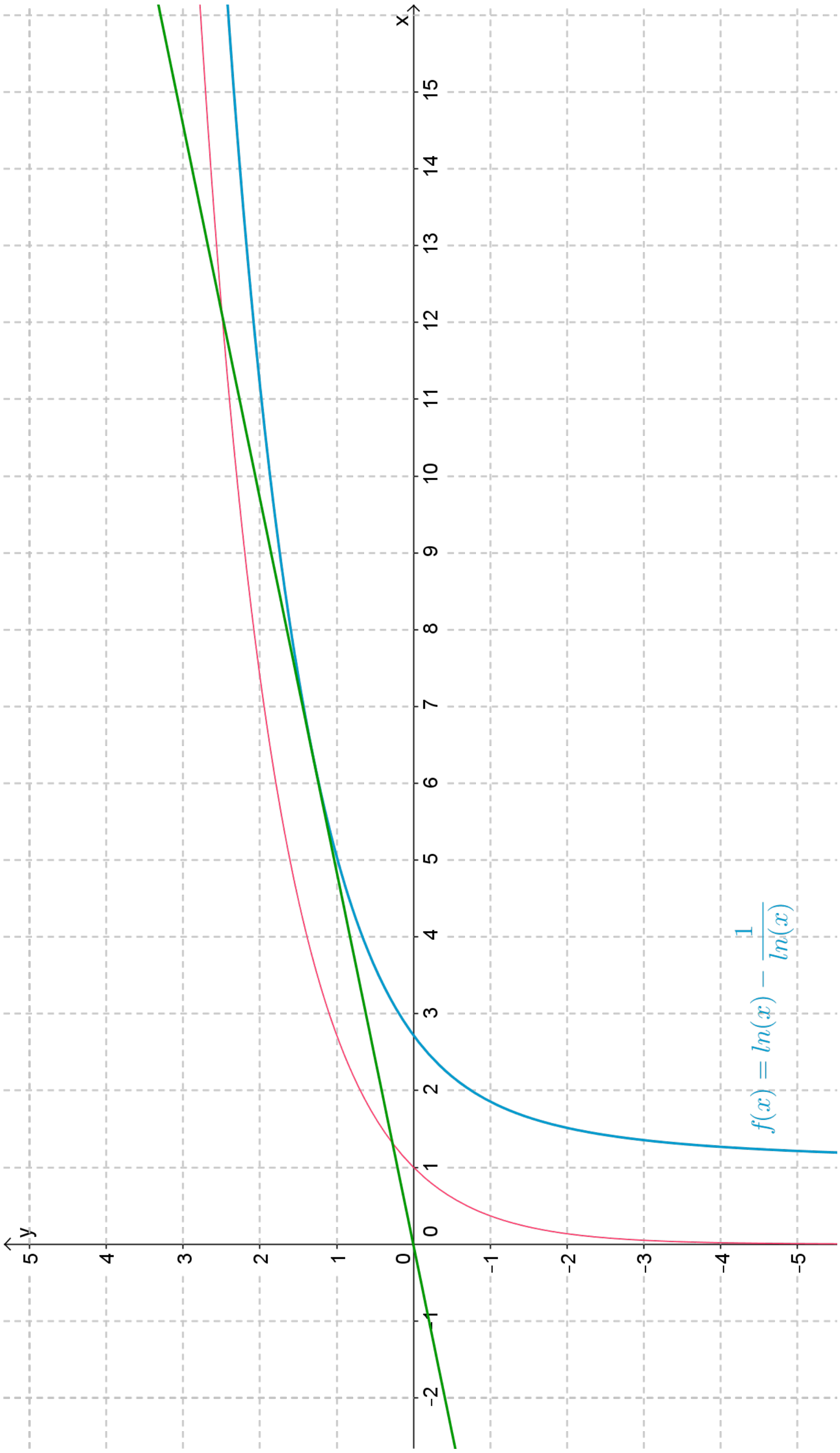
t		$-\frac{1}{3}$		1	
$u'(t)$	+	0	-	0	+
	$\nearrow$	M $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{22}{27}\right)$	$\searrow$	m $(1, -2)$	$\nearrow$

Le maximum et le minimun étant négatif, u(t) ne peut s'annuler qu'une seule fois après $t = 1$ (conséquence du théorème des valeurs intermédiaires).

(d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $\mathcal{C}$ passant par O. Tracer sur la figure en annexe cette tangente le plus précisément possible.
Montrer que $6.29 < a < 6.30$

$u(t)$ s'annule une fois et donc $g(x)$ s'annule également une fois. Soit a la valeur de x telle que $g(a) = 0$.
On a $g(6.29) \approx -0.0018$ et $g(6.30) \approx 0.0069$.
La tangente a pour équation $t \equiv y = f'(a)x$ ou, en remplaçant a par 6.295 :

$$t \equiv y = 0.2058x$$



Graphe des courbes $y = \ln x$ *(en pointillés) et* $f(x)$ *(en trait plein)*

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°14 - Solutions

Etudes de fonctions exponentielles et logarithmiques

Série B

Le 9 mai 2019 — Classe: 6B

LES SOLUTIONS SONT IDENTIQUES À CELLES DE LA SÉRIE A.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1,+\infty$ par :

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$$

On nomme $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthonormal$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x]$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ passant par O.
   (a) Soit a un réel de l'intervalle $]1,+\infty$. Démontrer que la tangente t_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a passe par l'origine si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.
   Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1,+\infty$ par :
   $$g(x) = f(x) - xf'(x)$$
   (b) Monter que sur $]1,+\infty$, les équations $g(x) = 0$ et $\ln^3 x - \ln^2 x - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.
   (c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.
   (d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $\mathcal{C}$ passant par O. Tracer sur la figure en annexe cette tangente le plus précisément possible.
   Montrer que $6.29 < a < 6.30$