Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°11 - Solutions

Les coniques

Série A

Le 26 février 2019 — Classe: 6B

On donne la conique d'équation $C \equiv y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$

.../4 1. Déterminer, en justifiant complètement les résultats, le type et les caractéristiques de cette conique.
Il s'agit d'une parabole (un seul terme au carré). Soit forme canonique, on a successivement :

$$y^2 - 4y + 4 = -3x - 1 + 4 \Leftrightarrow (y-2)^2 = -3(x-1)$$

Cette parabole a un axe focal parallèle à Ox, est dirigée vers les x négatifs, $p = -\frac{3}{2}$, le sommet est (1,2), le foyer a pour coordonnées $F : \left(\frac{1}{4}, 2\right)$ et la directrice a pour équation $x = \frac{7}{4}$

.../5 2. Ecrire l'équation de la tangente à cette conique en son point d'ordonnée -1. Soit A ce point.
Si l'ordonnée du point vaut -1, son abscisse est la solution de l'équation $(-1)^2+3x-4(-1)+1$ c'est-à-dire $x = -2$. Le point A a pour coordonnées $A(-2,-1)$.
La tangente a donc pour équation $t_1 \equiv y + 1 = y'_A(x+2)$.
y'_A est calculé en dérivant l'équation de la parabole. On a $2yy' + 3 - 4y' = 0$ ou $y' = \frac{3}{4-2y}$ et $y'_A = \frac{3}{4-2(-1)} = \frac{1}{2}$.
En simplifiant l'équation de la tangente, on obtient $t_1 \equiv 2y - x = 0$

.../3 3. On considère maintenant le point $B : \left(\frac{1}{4}, 2\right)$. Ecrire l'équation de la droite AB.
Cette droite est la corde reliant le point A au foyer. On a $AB \equiv 4x - 3y + 5 = 0$.

.../3 4. Montrer que les coordonnées du deuxième point d'intersection de la droite AB avec la conique sont $C : \left(\frac{13}{16}, \frac{11}{4}\right)$.
En remplaçant les coordonnées de C dans l'équation de la parabole et de la droite AB, on arrive à deux égalités.

.../3 5. Ecrire l'équation de la tangente à la conique en C.

De même que plus haut, on a $t_2 \equiv y - \dfrac{11}{4} = y'_C\left(x - \dfrac{13}{16}\right)$ où $y'_C = \dfrac{3}{4 - 2\left(\dfrac{11}{4}\right)} = -2$.

Dès lors $t_2 \equiv y - \dfrac{11}{4} = -2\left(x - \dfrac{13}{16}\right) \Leftrightarrow t_2 \equiv 8y + 16x - 35 = 0$

.../2 6. Montrer que les deux tangentes trouvées dans cet exercice sont perpendiculaires.

Puisque $y'_A.y'_C = -1$, les deux tangentes sont bien perpendiculaires.

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°11 - Solutions

Les coniques

Série B

Le 26 février 2019 Classe: 6B

On donne la conique d'équation $C \equiv y^2 + 3x + 4y + 1 = 0$

.../4 1. Déterminer, en justifiant complètement les résultats, le type et les caractéristiques de cette conique.
Il s'agit d'une parabole (un seul terme au carré). Soit forme canonique, on a successivement :

$$y^2 + 4y + 4 = -3x - 1 + 4 \Leftrightarrow (y+2)^2 = -3(x-1)$$

Cette parabole a un axe focal parallèle à Ox, est dirigée vers les x négatifs, $p = -\frac{3}{2}$, le sommet est (1,-2), le foyer a pour coordonnées $F : \left(\frac{1}{4}, -2\right)$ et la directrice a pour équation $x = \frac{7}{4}$

.../5 2. Ecrire l'équation de la tangente à cette conique en son point d'ordonnée 1. Soit A ce point.
Si l'ordonnée du point vaut 1, son abscisse est la solution de l'équation $(1)^2 + 3x + 4(1) + 1$ c'est-à-dire $x = -2$. Le point A a pour coordonnées $A(-2, 1)$.
La tangente a donc pour équation $t_1 \equiv y - 1 = y'_A(x+2)$.
y'_A est calculé en dérivant l'équation de la parabole. On a $2yy' + 3 + 4y' = 0$ ou $y' = \frac{-3}{4+2y}$ et $y'_A = \frac{-3}{4+2(1)} = -\frac{1}{2}$.
En simplifiant l'équation de la tangente, on obtient $t_1 \equiv 2y + x = 0$

.../3 3. On considère maintenant le point $B : \left(\frac{1}{4}, -2\right)$. Ecrire l'équation de la droite AB.
Cette droite est la corde reliant le point A au foyer. On a $AB \equiv 4x + 3y + 5 = 0$.

.../3 4. Montrer que les coordonnées du deuxième point d'intersection de la droite AB avec la conique sont $C : \left(\frac{13}{16}, -\frac{11}{4}\right)$.
En remplaçant les coordonnées de C dans l'équation de la parabole et de la droite AB, on arrive à deux égalités.

.../3 5. Ecrire l'équation de la tangente à la conique en C.

De même que plus haut, on a $t_2 \equiv y + \dfrac{11}{4} = y'_C \left(x - \dfrac{13}{16}\right)$ où $y'_C = \dfrac{3}{4 - 2\left(-\dfrac{11}{4}\right)} = 2$.

Dès lors $t_2 \equiv y + \dfrac{11}{4} = 2\left(x - \dfrac{13}{16}\right) \Leftrightarrow t_2 \equiv 8y - 16x + 35 = 0$

.../2 6. Montrer que les deux tangentes trouvées dans cet exercice sont perpendiculaires.

Puisque $y'_A . y'_C = -1$, les deux tangentes sont bien perpendiculaires.