Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°... - Solutions

Rappels fonctions

Série A

Le Impair - Pair — Classe: 6....

1. On donne la fonction $f(x) = |x-1|\sqrt[3]{x^2}$. Etablir le tableau de variations complet de $f(x)$.

Pour dériver la fonction, il faut d'abord traduire la valeur absolue. On a

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\sqrt[3]{x^2} & \text{x } x \geq 1 \\ -(x-1)\sqrt[3]{x^2} & \text{x } x < 1 \end{cases}$$

Si l'on dérive la première forme de la fonction ($x \geq 1$), on a successivement :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(x-1)\sqrt[3]{x^2}\right]' \\ &= \sqrt[3]{x^2} + (x-1)\left[x^{\frac{2}{3}}\right]' \\ &= \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}(x-1)\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \frac{3x+2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} \\ &= \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

On a donc :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{x } x \geq 1 \\ -\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{x } x < 1 \end{cases}$$

Le tableau de variation est donc :

x		0		$\frac{2}{5}$		1	
$2x-5$							+
$3\sqrt[3]{x}$	-	0	+		+		+
$-2x+5$	+		+	0	-		
$f(x)$	-	$\nexists$	+	0	-	$_{-1}\vert^{1}$	+
	$\searrow$	P.R.	$\nearrow$	M	$\searrow$	P.A.	$\nearrow$
		(0,0)		$\left(\frac{2}{5}, \frac{3\sqrt[3]{20}}{25}\right)$		(1,0)	

2. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 10}{2x - 6}$.

   (a) Etablir l'équation des asymptotes de $f(x)$;
   Le domaine de définition de $f(x)$ est $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \pm\infty$. Il y a donc une asymptote verticale d'équation $AV \equiv x = 3$.
   Comme la fonction est rationnelle, la division euclidienne permet d'écrire la fonction sous la forme $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1 + \dfrac{2}{x-3}$.
   Le troisième terme de ce développement tendant vers 0 si x tend vers $\pm\infty$, on peut affirmer que la fonction tend vers $\dfrac{1}{2}x - 1$ si x tend vers $\pm\infty$ et que c'est l'équation d'une droite. On a donc une asymptote oblique d'équation $AO \equiv y = \dfrac{1}{2}x - 1$.

   (b) Etudier la position relative de la courbe représentative de $f(x)$ par rapport aux asymptotes ;
   Le tableau de signe de la fonction est :

x		3	
$x^2 - 5x + 10$	+		+
$2x - 6$	-	0	+
$f(x)$	-	$\nexists$	+

   et $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$.
   Pour l'asympote oblique, la distance est donnée par $d(x) = \dfrac{2}{x-3}$ (cf division euclidienne). En $-\infty$ cette distance est négative et la courbe est sous l'asymptote. La conclusion est inverse en $+\infty$.

   (c) Etablir le tableau récapitulatif complet du comportement de la fonction ;
   On a :

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{2(x-3)^2} \\ f''(x) = \dfrac{4}{(x-3)^3} \end{cases}$$

   Le tableau récapitulatif du comportement de la fonction est donc :

x		1		3		5	
$f'(x)$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
$f''(x)$	-		-	$\nexists$	+		+
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	AV	$\searrow$	m	$\nearrow$
	$\cap$	$\left(1, -\dfrac{3}{2}\right)$	$\cap$		$\cup$	$\left(5, \dfrac{5}{2}\right)$	$\cup$

   (d) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction en son point d'abscisse 2.
   On a $f(2) = -2$ et $f''(2) = -\dfrac{3}{2}$. Dès lors $t \equiv y + 2 = -\dfrac{3}{2}(x-2)$ ou, après simplification :

$$t \equiv y = -\frac{3}{2}x + 1$$

(e) On donne les points d'abscisse 2 et 4 de la courbe. Montrer que la droite passant par ces points passe également par le point d'intersection des asymptotes.
Le point d'intersection des asymptotes est la solution du système :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

dont la solution est $I\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$.
D'autres part, les points d'abscisse 2 et 4 ont respectivement pour coordonnées $A(2, -2)$ et $B(4, 3)$. Dès lors l'équation de la droite AB est $AB \equiv y + 2 = \dfrac{3+2}{4-2}(x - 2)$ ou, après simplification

$$AB \equiv y = \frac{5}{2}x - 7$$

Les coordonnées du point I vérifie l'équation de la droite puisque $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}.3 - 7$.

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°... - Solutions

Rappels fonctions

Série B

Le Impair - Pair | Classe: 6....

1. On donne la fonction $f(x) = |x+1|\sqrt[3]{x^2}$. Etablir le tableau de variations complet de $f(x)$.

   Pour dériver la fonction, il faut d'abord traduire la valeur absolue. On a

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\sqrt[3]{x^2} & \text{x } x \geq -1 \\ -(x+1)\sqrt[3]{x^2} & \text{x } x < -1 \end{cases}$$

   Si l'on dérive la première forme de la fonction ($x \geq 1$), on a successivement :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(x+1)\sqrt[3]{x^2}\right]' \\ &= \sqrt[3]{x^2} + (x+1)\left[x^{\frac{2}{3}}\right]' \\ &= \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}(x+1)x^{-\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}(x+1)\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \frac{3x+2(x+1)}{3\sqrt[3]{x}} \\ &= \frac{5x+2}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

   On a donc :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{5x+2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{x } x \geq -1 \\ -\dfrac{5x+2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{x } x < -1 \end{cases}$$

   Le tableau de variation est donc :

x		-1		$-\frac{2}{5}$		0	
$2x+5$			-	0	+		+
$3\sqrt[3]{x}$	-		-		-	0	+
$-2x-5$	+						
$f(x)$	- ↘	P.A. (-1,0)	+ ↗	0 M $\left(-\frac{2}{5}, \frac{3\sqrt[3]{20}}{25}\right)$	- ↘	P.R. (0,0)	+ ↗

2. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2-5x-10}{6+2x}$.

(a) Etablir l'équation des asymptotes de $f(x)$;

Le domaine de définition de $f(x)$ est $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ et $\lim_{x\to -3} f(x) = \pm\infty$. Il y a donc une asymptote verticale d'équation $AV \equiv x = -3$.

Comme la fonction est rationnelle, la division euclidienne permet d'écrire la fonction sous la forme $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - 1 - \dfrac{2}{x-3}$.

Le troisième terme de ce développement tendant vers 0 si x tend vers $\pm\infty$, on peut affirmer que la fonction tend vers $-\dfrac{1}{2}x - 1$ si x tend vers $\pm\infty$ et que c'est l'équation d'une droite. On a donc une asymptote oblique d'équation $AO \equiv y = -\dfrac{1}{2}x - 1$.

(b) Etudier la position relative de la courbe représentative de $f(x)$ par rapport aux asymptotes ;

Le tableau de signe de la fonction est :

x		-3	
$-x^2-5x-10$	-		-
$2x+6$	-	0	+
$f(x)$	+	$\nexists$	-

et $\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$.

Pour l'asymptote oblique, la distance est donnée par $d(x) = -\dfrac{2}{x-3}$ (cf division euclidienne). En $-\infty$ cette distance est positive et la courbe est au-dessus l'asymptote. La conclusion est inverse en $+\infty$.

(c) Etablir le tableau récapitulatif complet du comportement de la fonction ;

On a :

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{-x^2-6x-5}{2(x+3)^2} \\ f''(x) = \dfrac{-4}{(x-3)^3} \end{cases}$$

Le tableau récapitulatif du comportement de la fonction est donc :

x		-5		-3		-1	
$f'(x)$	-	0	+	$\nexists$	+	0	-
$f''(x)$	+		+	$\nexists$	-		-
$f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	AV	$\nearrow$	M	$\searrow$
	$\cup$	$\left(-5, \dfrac{5}{2}\right)$	$\cup$		$\cap$	$\left(-1, -\dfrac{3}{2}\right)$	$\cap$

(d) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction en son point d'abscisse -2 ;

On a $f(-2) = -2$ et $f''(-2) = -\dfrac{3}{2}$. Dès lors $t \equiv y + 2 = -\dfrac{3}{2}(x-2)$ ou, après simplification :

$$t \equiv y = -\frac{3}{2}x + 1$$

(e) On donne les points d'abscisse -2 et -4 de la courbe. Montrer que la droite passant par ces points passe également par le point d'intersection des asymptotes.
Le point d'intersection des asymptotes est la solution du système :

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{-}{1}2x - 1 \end{cases}$$

dont la solution est $I\left(-3, \frac{1}{2}\right)$.
D'autres part, les points d'abscisse -2 et -4 ont respectivement pour coordonnées $A(-2,-2)$ et $B(-4,3)$. Dès lors l'équation de la droite AB est $AB \equiv y+2 = \frac{3+2}{-4+2}(x+2)$ ou, après simplification

$$AB \equiv y = -\frac{5}{2}x - 7$$

Les coordonnées du point I vérifie l'équation de la droite puisque $\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.(-3) - 7$.