

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°... - Solutions

Rappels sur les fonctions

Série A

Le Pair - Impair

Classe: 6....

- .../5 1. Déterminer l'équation de toutes les asymptotes de $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.
 Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. De plus $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$. Il y a donc une AV $\equiv x = 2$.
 La division euclidienne donne

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 & -3x & +1 & x-2 \\ \hline 2x^2 & -4x & & 2x+1 \\ \hline & x & +1 & \\ & x & -2 & \\ \hline & & 3 & \end{array}$$

Il y a donc une AO $\equiv y = 2x + 1$.

- .../3 2. Dériver la fonction suivante. Reduire au maximum le résultat final.

$$\left[(3x - 1)(5 - 2x)^3 \right]' =$$

On a successivement :

$$\begin{aligned} \left[(3x - 1)(5 - 2x)^3 \right]' &= (3x - 1)'(5 - 2x)^3 + (3x - 1) \left[(5 - 2x)^3 \right]' \\ &= 3(5 - 2x)^3 + (3x - 1) \left[3(5 - 2x)^2(5 - 2x)' \right] \\ &= 3(5 - 2x)^3 + (3x - 1)3(5 - 2x)^2(-2) \\ &= 3(5 - 2x)^3 - 6(3x - 1)(5 - 2x)^2 \\ &= (5 - 2x)^2 [3(5 - 2x) - 6(3x - 1)] \\ &= (5 - 2x)^2 (15 - 6x - 18x + 6) \\ &= (5 - 2x)^2 (21 - 24x) \\ &= [3(5 - 2x)^2 (7 - 8x)] \end{aligned}$$

.../4

3. Etablir le tableau de variation complet de
- $f(x) = x^3 + 3x^2$

On a $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$. Les zéros de $f'(x)$ sont donc $x = 0$ et $x = -2$. Le tableau de variation est donc :

x	-2		0		
$3x^2 + 6x$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	M (-2,4)	$\searrow$	m (0,0)	$\nearrow$

.../4

4. Ecrire l'équation de la tangente au graphique de la fonction
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$
- au point d'abscisse 2.

On a $f(2) = 3$. De plus $f'(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}}$ et donc $f'(2) = \frac{7}{6}$.

L'équation de la tangente est donc $t \equiv y - 3 = \frac{7}{6}(x - 2)$ ou, après simplification

$$t \equiv y = \frac{7}{6}x + \frac{2}{3}$$

.../4

5. Déterminer les coordonnées des points où la tangente au graphique la fonction
- $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$
- est horizontale.

La tangente est horizontale si $f'(x) = 0$. On a successivement :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x'(x^2 + 4) - x(x^2 + 4)'}{(x^2 + 4)^2} \\ &= \frac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} \\ &= \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Les points on donc pour coordonnées : $\left(-2, -\frac{1}{4}\right)$ et $\left(2, \frac{1}{4}\right)$.

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°... - Solutions

Rappels sur les fonctions

Série B

Le Pair - Impair

Classe: 6....

- .../5 1. Déterminer l'équation de toutes les asymptotes de $f(x) = \frac{3x^2 + 8x - 1}{x + 3}$.
 Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. De plus $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \pm\infty$. Il y a donc une AV $\equiv x = -3$.
 La division euclidienne donne

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 8x - 1 & x + 3 \\ \underline{3x^2 + 9x} & 3x - 1 \\ -x - 1 & \\ \underline{-x - 3} & \\ 2 & \end{array}$$

Il y a donc une AO $\equiv y = 3x - 1$.

- .../3 2. Dériver la fonction suivante. Reduire au maximum le résultat final.

$$\left[(2 - 4x)(2x + 1)^3 \right]' =$$

On a successivement :

$$\begin{aligned} \left[(2 - 4x)(2x + 1)^3 \right]' &= (2 - 4x)'(2x + 1)^3 + (2 - 4x) \left[(2x + 1)^3 \right]' \\ &= -4(2x + 1)^3 + (2 - 4x) \left[3(2x + 1)^2(2x + 1)' \right] \\ &= -4(2x + 1)^3 + (2 - 4x)3(2x + 1)^2(2) \\ &= -4(2x + 1)^3 + 6(2 - 4x)(2x + 1)^2 \\ &= (2x + 1)^2 [-4(2x + 1) + 6(2 - 4x)] \\ &= (2x + 1)^2 (-8x - 4 + 12 - 24x) \\ &= (2x + 1)^2 (8 - 32x) \\ &= [8(2x + 1)^2 (1 - 4x)] \end{aligned}$$

- .../4 3. Etablir le tableau de variation complet de $f(x) = x^3 - 6x - 3x^2$
 On a $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Les zéros de $f'(x)$ sont donc $x = 0$ et $x = 2$. Le tableau de variation est donc :

x		0		2	
$3x^2 + 2x$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$
		(0, -6)		(2, -10)	

- .../4 4. Ecrire l'équation de la tangente au graphique de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 1}$ au point d'abscisse -2.

On a $f(-2) = 3$. De plus $f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-1}}$ et donc $f'(-2) = \frac{-7}{6}$.

L'équation de la tangente est donc $t \equiv y - 3 = -\frac{7}{6}(x + 2)$ ou, après simplification

$$t \equiv y = -\frac{7}{6}x + \frac{2}{3}$$

- .../4 5. Déterminer les coordonnées des points où la tangente au graphique de la fonction $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ est horizontale.

La tangente est horizontale si $f'(x) = 0$. On a successivement :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Les points on donc pour coordonnées : $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.