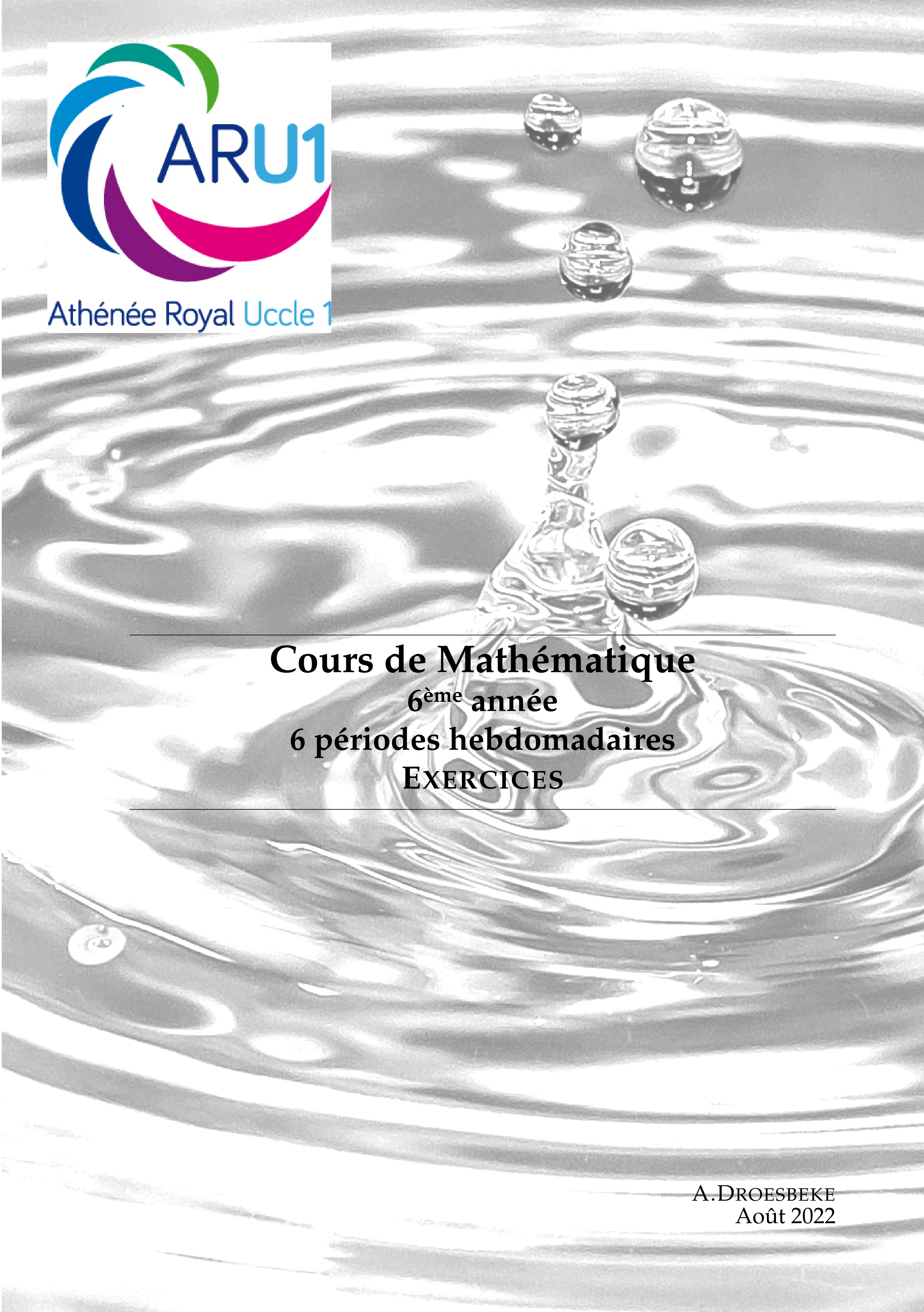


Athénée Royal Uccle 1

Cours de Mathématique

6ème année

6 périodes hebdomadaires

EXERCICES

A.DROESBEKE

Août 2022

Première partie

6SUAA0 - Rappels de 5ème

1

Rappels de 5$^{\text{ème}}$

A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

			Degré d'acquisition		
	Compétence	Exercices	Help	Bof	OK
1	Faire des études de fonctions complètes (domaine, zéros, asymptotes, dérivées, études de variations,...) et résoudre des problèmes d'extrémums	1.1.1			
2	Résoudre des équations et inéquations trigonométriques	1.1.2			

1.1 Exercices

1.1.1 Analyse

1. Déterminer l'équation des asymptotes des fonctions suivantes. Etudier la position relative de la courbe représentative de la fonction par rapport aux asymptotes.

   (a) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 10x - 3}{6(x-1)}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes. Simplifier et factoriser le résultat le plus possible.

   (a) $\left[(x^2-6)(2x+3)^2\right]'$

   (b) $\left[\dfrac{1-x^3}{(1-x^2)^2}\right]'$

   (c) $\left[(x-1)^2\sqrt{x^2+2x-1}\right]'$

   (d) $\left[\dfrac{2}{x}\sqrt{4+x^2}\right]'$

   (e) $\left[\dfrac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right]'$

   (f) $\left[\dfrac{x(3+2x^2)}{3\sqrt[4]{(1+x^2)^3}}\right]'$

   (g) $\left[\dfrac{(1+3x^2)\sqrt{1-2x^2}}{2x^3}\right]'$

3. Soit la fonction $f(x) = \left|x + \sqrt[3]{x^2}\right|$.

   (a) Déterminer le domaine et le(s) zéro(s) de $f(x)$.

   (b) Montrer que la fonction n'admet aucune asymptote.

   (c) Etudier les variations de $f(x)$ en précisant clairement ce qui se passe en $x = -1$ et $x = 0$.

4. Etudier complètement $f(x) = |x|\,\sqrt[3]{(x-1)^2}$ (domaine, zéros, asymptotes, variations).

1.1.2 Trigonométrie

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

1. $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$
2. $\tan x - \cot x = 1$
3. $\sin x + \sin 3x = 1 + \cos 2x$
4. $2\left(\sqrt{3}\sin x\cos x - \sin^2 x\right) = \sqrt{2} - 1$
5. $\sin x + \cos x < 0.5$
6. $5\cos x - 4 < 3\cos 2x$
7. $\dfrac{2\sin 2x - 1}{\cos 2x - 3\cos x + 2} > 0$

1.2 Solutions

1.2.1 Analyse

1. (a)
   - AV$\equiv x = 1$
   - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$
   - AH : non
   - AO$\equiv y = \dfrac{2}{3}x - 1$
   - $f(x)$ au-dessus de l'AO en $-\infty$ et en-dessous en $+\infty$

   (b)
   - AV : non
   - AH$\equiv y = \dfrac{1}{2}$ en $+\infty$
   - $f(x)$ au-dessus de l'AH
   - AO$\equiv y = -2x - \dfrac{1}{2}$ en $-\infty$
   - $f(x)$ au-dessus de l'AO

2. (a) $\left[(x^2-6)(2x+3)^2\right]' = 2(2x+3)(4x^2+3x-12)$

   (b) $\left[\dfrac{1-x^3}{(1-x^2)^2}\right]' = \dfrac{x(-x^3-3x+4)}{(1-x^2)^3} = \dfrac{x(x^2+x+4)}{(1-x)^2(1+x)^3}$

   (c) $\left[(x-1)^2\sqrt{x^2+2x-1}\right]' = \dfrac{(x-1)(3x^2+4x-3)}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

   (d) $\left[\dfrac{2}{x}\sqrt{4+x^2}\right]' = \dfrac{-8}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

   (e) $\left[\dfrac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right]' = \dfrac{3x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$

   (f) $\left[\dfrac{x(3+2x^2)}{3\sqrt[4]{(1+x^2)^3}}\right]' = \dfrac{2x^4+3x^2+2}{2\sqrt[4]{(1+x^2)^7}}$

   (g) $\left[\dfrac{(1+3x^2)\sqrt{1-2x^2}}{2x^3}\right]' = \dfrac{x^2-3}{2x^4\sqrt{1-2x^2}}$

3. (a) $dom_f : \mathbb{R}$, zéros $x = -1$ et $x = 0$.

   (b) voir dom_f et calculs des limites.

   (c) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}+2}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{si } x > -1 \\[2ex] -\dfrac{3\sqrt[3]{x}+2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x < -1 \end{cases}.$

Le tableau de variation donne :

x		-1		$-\dfrac{8}{27}$		0	
-1/1	-		+		+		+
$3\sqrt[3]{x}+2$	-		-	0	+		+
$3\sqrt[3]{x}$	-		-		-	0	+
$f(x)$	-	$^{-\frac{1}{3}}\vert_{-\frac{1}{3}}$	+	0	-	$\nexists$	+
	$\searrow$	P.A.	$\nearrow$	M	$\searrow$	P.R.	$\nearrow$
		(-1,0)		$\left(-\dfrac{8}{27},\dfrac{4}{27}\right)$		(0,0)	

4. (a) $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$
   $f''(x)=\dfrac{-2}{\sqrt[3]{(x-1)^4(x+2)^5}}$
   $dom_{f'}=dom_{f''}=\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$

   (b) i. $t\equiv y=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}x+\sqrt[3]{2}$

   ii. AV : aucune
   AH : aucune
   AO$\equiv y=x$

   (c)

x		-2		-1		1	
$f'(x)$	+	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	+
$f''(x)$	+	$\nexists$	-		-	$\nexists$	-
$f(x)$	$\nearrow$	T.V.	$\nearrow$	M	$\searrow$	P.R.	$\nearrow$
	$\cup$	$(-2,0)$	$\cap$	$(-1,\sqrt[3]{4})$	$\cap$	$(1,0)$	$\cap$

1.2.2 Trigonométrie

1. $S:\left\{-\dfrac{43\pi}{60},-\dfrac{19\pi}{60},\dfrac{\pi}{12},\dfrac{29\pi}{60},\dfrac{53\pi}{60}\right\}$
2. $S:\{-2,12;-0,55;1,02;2,59\}$
3. $S:\left\{-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right\}$
4. $S:\{-3.01;-2,25;0,13;0,92\}$
5. $S:]-\pi;-0.425[\cup]1,99;\pi[$
6. $S:]-\pi;-1,231[\cup\left]-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right[\cup]1,231;\pi]$
7. $S:\left]-\dfrac{11\pi}{12},-\dfrac{7\pi}{12}\right[\cup\left]-\dfrac{\pi}{3},0\right[\cup\left]0,\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{3}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{12}\right]$

Deuxième partie

6SUAA1 - Probabilités

2

Analyse combinatoire

A la fin du chapitre il faudra :

			Degré d'acquisition		
	Compétence	Exercices	Help	Bof	OK
1	Résoudre des problèmes de dénombrements	2.1.1.			
2	Utiliser le triangle de Pascal et la formule du binôme de Newton	2.1.2.			

2.1 Exercices

2.1.1 Exercices de base

1. Pour chacune des situations suivantes, répondre aux questions suivantes :
   (a) Combien d'éléments choisit-on ?
   (b) Combien d'éléments a-t-on au total ?
   (c) Les éléments choisis peuvent-ils être choisis plusieurs fois ?
   (d) L'ordre dans lequel on choisit les éléments a-t-il de l'importance ?

   On ne demande pas de résoudre les problèmes de dénombrement.

   (a) i. Tu possèdes un cadenas avec 5 roulettes. Chaque roulette porte les numéros 0 à 9. Combien de codes secrets possibles propose-t-il ?
   ii. Si je sais que ton code ne comporte que des chiffres différents, combien de possibilités reste-t-il ?

   (b) Scrabble : on choisit 7 lettres et on obtient les lettres L, A, B, C, T, E et U. Pour trouver un mot, tu décides d'essayer toutes les possibilités.
   i. Combien existe-t-il de possibilités ?
   ii. Si maintenant on cherche un mot commençant par la lettre L ?
   iii. Si on cherche un mot commençant et finissant par une consonne ?

   (c) Coupe d'Europe de football : Il y a 27 équipes différentes. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres équipes une seule fois. Combien de matchs doit-on organiser ?

   (d) Cinq amis veulent s'asseoir à un bar devant lequel se trouvent cinq tabourets alignés. De combien de manières peuvent-ils s'installer ?

   (e) Sachant qu'en Belgique les numéros de GSM commencent par 04 suivis de 8 chiffres entre 0 et 9 :
   i. Combien peut-on former de numéros de téléphone ?
   ii. Combien peut-on former de numéros sans le chiffre 5 ?
   iii. Combien peut-on former de numéros se terminant par le chiffre 5 ?

   (f) Dans un concours de "Miss", les demi-finalistes sont les candidates A,B,C,D et E. Seules 3 d'entre elles iront en finale.
   i. Combien de "trios de finalistes" différents existe-t-il ?
   ii. Parmi les 5 candidates, une finaliste recevra le 1er prix (la médaille d'or), une autre le 2ème prix (la médaille d'argent) et une dernière le 3ème prix (la médaille de bronze). Combien y a-t-il de classements possibles ?

2. (a) Tu as 2 pantalons et 3 pulls dans ta garde-robe. De combien de manières peux-tu t'habiller ?
   (b) Si, en plus des 2 pantalons et 3 pulls, tu as 2 paires de chaussures, de combien de manières peux-tu t'habiller ?
   (c) Si maintenant tu achètes 4 shorts (en plus de tes 2 pantalons, tes 3 pulls et tes 2 paires de chaussures), de combien de tenues différentes disposes-tu ?

3. On doit former un comité de trois personnes comprenant un représentant de chacune des catégories direction, personnel et consommateurs. Il y a trois représentants possibles parmi le personnel, deux parmi les membres de la direction et quatre parmi les consommateurs. Combien de comités peut-on former ?
4. La carte d'un restaurant propose 10 hors-d'oeuvre, 4 entrées, 11 plats de viande et 9 desserts. Abstraction faite de considérations culinaires, combien peut-on composer de menus contenant dans cet ordre un hors-d'oeuvre, une entrée, un plat de viande et un dessert ?
5. Il existe 6 chemins possibles allant de A à B et 4 chemins allant de B à C. De combien de façons peut-on :
   (a) aller de A à C en passant par B ?
   (b) aller et revenir de A à C en passant par B ?
   (c) aller et revenir de A à C en passant par B et en ne passant qu'une seule fois par le même chemin ?

2.1.2 Permutations et arrangements

1. Combien de nombres de 4 chiffres peut-on former avec les chiffres de 0 à 9 :
   (a) si les répétitions sont autorisées ?
   (b) si les répétitions sont interdites ?
   (c) si les répétitions sont interdites et le dernier chiffre doit être 0 ?
2. Combien de nombres de 5 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres de 0 à 9 :
   (a) si les nombres doivent être impairs ?
   (b) si les deux premiers chiffres de chaque nombre doivent être pairs ?
3. 7 personnes prennent place sur un banc.
   (a) De combien de manières différentes peuvent-elles se disposer ?
   (b) De combien de manières différentes peuvent-elles se disposer, si deux personnes déterminées doivent occuper les deux extrémités du banc ?
4. Un représentant s'apprête à visiter cinq de ses clients. De combien de façons peut-il faire cette série de visites :
   (a) s'il les fait toutes le même jour ?
   (b) s'il en fait trois un jour et deux le lendemain ?
5. On place au hasard les 12 tomes d'une encyclopédie sur un rayon d'une bibliothèque.
   (a) Combien de classements différents existe-t-il ?
   (b) Parmi ces classements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte dans cet ordre ?
   (c) Parmi ces classements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

6. De combien de façons différentes peut-on aligner 10 billes
   (a) si elles sont toutes de couleur différente ?
   (b) s'il y a 5 billes rouges, 2 billes blanches et 3 billes bleues ?
7. (a) Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MISSISSIPPI ?
   (b) Parmi ces anagrammes, combien commencent et se terminent par la lettre S ?
8. De combien de manières peut-on placer 3 romans, 2 livres de mathématiques et 1 de chimie sur une étagère si :
   (a) aucune restriction n'est mise ;
   (b) les livres de mathématiques doivent être rangés ensemble et les romans aussi ;
   (c) seuls les romans doivent être rangés ensemble ?
9. De combien de manières peut-on colorier une carte représentant 3 pays avec des couleurs différentes choisies parmi 7 tons différents ?
10. Cinq prix doivent être décernés à des étudiants choisis dans une classe de 30 personnes. Combien de résultats peut-on avoir si :
    (a) le cumul des prix est admis ;
    (b) le cumul des prix n'est pas possible ?
11. (a) Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de mots de 5 lettres ? (Les mots n'ont pas nécessairement de signification !)
    (b) Même question mais en se limitant aux mots formés de 5 lettres différentes ?
12. (a) Cinq personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de huit places. Combien y a-t-il de possibilités ?
    (b) Même question, mais avec huit personnes.
13. Dans l'alphabet Braille, chaque lettre ou signe est représenté par 6 points disposés en un tableau de 3 lignes et 2 colonnes, certains étant en relief. Combien de signes distincts peut-on composer ?
14. (a) Un immeuble est composé d'un rez-de-chaussée et de 8 étages. Un ascenseur part du rez-de-chaussée avec 5 occupants. De combien de manières ces 5 occupants peuvent-ils choisir les étages auxquels ils vont se rendre ?
    (b) Même question dans le cas où à chaque étage un occupant au plus quitte l'ascenseur.
15. On considère le mot FRAGMENTS. Combien de mots peut-on former :
    (a) en prenant toutes les lettres (sans répétition) ?
    (b) en prenant 8 lettres (sans répétition) ?
    (c) en prenant 2 lettres (sans répétition) ?

2.1.3 Combinaisons

1. Dans une assemblée composée de 25 dames et 15 messieurs, il est décidé de nommer un comité de 5 personnes.
   (a) Combien de comités peut-on envisager ?
   (b) Combien de ces comités comprennent exactement 3 dames ?
   (c) Combien de ces comités comprennent au moins 3 dames ?
2. 12 personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y a-t-il de poignées de mains ?
3. On tire 3 cartes d'un jeu de 36 cartes. Combien y a-t-il de mains :
   (a) au total ?
   (b) formées de trois as ?
   (c) formées d'un roi et de deux as ?
   (d) ne contenant aucun as ?
   (e) contenant au moins un as ?
   (f) contenant exactement un as ?
4. Douze joueurs d'échecs participent à un tournoi dans lequel chaque joueur joue une fois contre chacun des autres joueurs. Combien y a-t-il de parties jouées dans ce tournoi ?
5. Une femme a 13 amies. Elle désire en inviter 7 à un souper.
   (a) Combien de choix a-t-elle ?
   (b) Combien de choix a-t-elle si deux de ses amies se boudent et ne peuvent venir ensemble ?
6. Un questionnaire comprend 8 questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Combien peut-on donner de réponses différentes avec 4 oui et 4 non ?
7. Un étudiant doit résoudre 8 problèmes sur 10 lors d'un examen écrit.
   (a) Combien de choix peut-il faire ?
   (b) Même question en supposant qu'il doive obligatoirement résoudre les trois premiers problèmes ?
   (c) Même question en supposant qu'il doive obligatoirement résoudre exactement quatre des cinq premiers problèmes ?

2.1.4 Exercices mélangés

1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. Déterminer le nombre de tirages différents si l'on tire 3 boules :
   (a) simultanément ;
   (b) successivement et sans remettre dans l'urne celles qui ont déjà été tirées ;
   (c) successivement et après chaque tirage on remet la boule dans l'urne.

2. (a) Dans une société de 25 personnes, on doit en désigner 4 qui formeront le comité. Combien de comités différents peut-on constituer ?
   (b) Dans une société de 25 personnes, on doit désigner un président, un vice- président, un trésorier et un secrétaire ; ces 4 personnes constituent le comité. Combien de comités différents peut-on ainsi former ?
3. On a un lot de 6 pièces dont 3 sont bonnes et 3 défectueuses.
   (a) Combien d'échantillons de 3 pièces peut-on former ?
   (b) Combien, parmi ces échantillons, contiennent 3 pièces bonnes ?
   (c) Combien contiennent au moins une pièce bonne ?
4. Une association comprenant 20 membres, 12 hommes et 8 femmes, désire former un comité de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes. Trouver de combien de manières l'on peut former ce comité dans chacun des cas suivants :
   (a) chaque membre de l'association accepte de faire partie de ce comité ;
   (b) deux des hommes refusent d'en faire partie ;
   (c) M. Pahud et Mme Sandoz refusent de siéger ensemble.
5. (a) Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former avec les 6 chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9 ?
   (b) Parmi ceux-ci, combien sont inférieurs à 400 ?
   (c) Parmi ceux-ci, combien sont pairs ?
   (d) Parmi ceux-ci, combien sont multiples de 5 ?
6. Dans un groupe de 20 personnes, 10 lisent au moins la revue A, 8 lisent au moins la revue B et 3 lisent les 2 revues. Combien d'échantillons différents peut-on choisir si l'échantillon doit être formé :
   (a) de cinq personnes lisant au moins une revue ?
   (b) de trois personnes lisant la revue A, et de deux personnes lisant la revue B, chacune d'entre elles ne lisant qu'une seule revue ?
   (c) de cinq personnes, dont trois au moins lisent la revue A ?
7. Combien peut-on former d'anagrammes des mots "*ATROCE*" et "*COMMENCEMENT*" ?
8. Combien peut-on former de mots de
   (a) 5 lettres ?
   (b) 5 lettres distinctes ?
   (c) 5 lettres commençant par z ?
   (d) 5 lettres distinctes se terminant par r et c ?
   (e) 5 lettres distinctes se terminant par r ou c ?
   (f) 5 lettres distinctes où les lettres a, b et c sont groupées dans l'ordre alphabétique ?
   (g) 5 lettres distinctes où les lettres a, b et c sont groupées dans un ordre quelconque ?

2.1.5 Triangle de Pascal et binôme de Newton

1. Si 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1 est une ligne du triangle de Pascal, déterminer les nombres de la ligne suivante.
2. Développer
   (a) $(x+y)^5$
   (b) $(2a-3b)^4$
   (c) $\left(x+\dfrac{1}{x\sqrt{2}}\right)^6$
   (d) $\left(\dfrac{a}{2}-\sqrt{a}\right)^4$.
3. Déterminer le $i^{\text{ème}}$ terme du développement de
   (a) $\left(5x-\dfrac{y}{2}\right)^8$ si i=6
   (b) $\left(\dfrac{1}{2a}+a\sqrt{2}\right)^{12}$ si i=5
4. Déterminer :
   (a) Le terme en x^6 du développement de $(3x^2-2)^{10}$
   (b) Le terme en x^3 du développement de $\left(4x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^{15}$
5. Calculer le terme en x^5 dans le développement de $\left(2x+\dfrac{4}{x^2}\right)^{17}$.

2.2 Solutions

2.2.1 Exercices de base

1.

		Combien d'éléments ?	Combien d'él. choisis ?	Répétitions ?	Ordre ?
(a)	i	10	5	oui	oui
	ii	10	5	non	oui
(b)	i	7	7	non	oui
	ii	6	6	non	oui
	iii	7	7	non	oui
(c)		27	2	non	non
(d)		5	5	non	oui
(e)	i	10	8	oui	oui
	ii	9	8	oui	oui
	iii	10	7	oui	oui
(f)	i	5	3	non	non
	ii	5	3	non	oui

2. 6 - 12 - 36
3. 24
4. 3960
5. 24 - 576 - 360

2.2.2 Permutations et arrangements

1. 9000 - 4536 - 504
2. 13440 - 5376
3. 5040 - 240
4. 120 - 120
5. 479001600 - 39916800 - 79883600
6. 3628800 - 2520
7. 34650 - 3780
8. 720 - 72 - 144
9. 210
10. 24300000 - 17100720
11. 11881376 - 7893600

12. 6720 - 40320
13. 64
14. 32768 - 6720
15. 362880 - 362880 - 72

2.2.3 Combinaisons

1. 658008 - 241500 - 484380
2. 66
3. 7140 - 4 - 24 - 4960 - 2180 - 1984
4. 66
5. 1716 - 1254
6. 70
7. 45 - 21 - 24

2.2.4 Exercices mélangés

1. 220 - 1320 - 1728
2. 12650 - 303600
3. 20 - 1 - 19
4. 9856 - 5880 - 9240
5. 216 - 72 - 72 - 36
6. 3003 - 350 - 7752
7. 720 - 3326400
8. 11881376 - 7893600 - 456976 - 24288 - 60720 - 1518 - 9108

2.2.5 Triangle de Pascal et binôme de Newton

1. 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
2. (a) $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$
   (b) $(2a-3b)^4 = 16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$
   (c) $\left(x + \frac{1}{x\sqrt{2}}\right)^6 = c^6 + 3\sqrt{2}x^4 + \frac{15}{2}x^2 + 5\sqrt{2} + \frac{15}{4x^2} + \frac{3\sqrt{2}}{4x^4} + \frac{1}{8x^6}$
   (d) $\left(\frac{a}{2} - \sqrt{a}\right)^4 = \frac{a^4}{16} - \frac{a^3\sqrt{a}}{2} + \frac{3}{2}a^3 - 2a^2\sqrt{a} + a^2$
3. (a) $-\frac{875}{4}x^3y^5$
   (b) $\frac{495}{64a^4}$
4. (a) $-414720x^6$
   (b) $-40040x^3$
5. $4991221760x^5$

3

Probabilités

A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

			Degré d'acquisition		
	Compétence	Exercices	Help	Bof	OK
1	Calculer des probabilités simples	1 à 13 - 23-24			
2	Calculer des probabilités conditionnelles	14 à 22			

3.1 Exercices

1. On tire une carte au hasard dans un jeu ordinaire de 52 cartes. Quelle est la probabilité de prélever :
   (a) une carte rouge,
   (b) un trèfle,
   (c) un as,
   (d) un roi noir,
   (e) la dame de cœur ?
2. Un groupe de personnes est composé de 20 hommes (dont 10 Européens) et de 30 femmes (dont 20 Européennes). Si l'on choisit une personne au hasard dans ce groupe, déterminez la probabilité pour qu'elle soit :
   (a) du sexe féminin ;
   (b) de nationalité européenne ;
   (c) un homme de nationalité non européenne.
3. On considère une famille de 3 enfants. Trouvez les probabilités des événements suivants :
   (a) avoir exactement un garçon ;
   (b) avoir un garçon comme aîné ;
   (c) avoir un garçon comme aîné et une fille comme cadette ;
   (d) avoir exactement deux garçons ;
   (e) avoir au moins un garçon ;
   (f) avoir au moins deux garçons ;
   (g) avoir au plus un garçon ;
   (h) avoir plus de garçons que de filles ;
   (i) avoir au moins une fille et un garçon ;
   (j) n'avoir aucune fille plus jeune qu'un garçon.
4. Une balle est tirée au hasard d'une boîte contenant 4 balles rouges, 6 balles blanches, 2 balles vertes et 8 balles noires. Déterminez la probabilité pour qu'elle soit :
   (a) rouge,
   (b) verte,
   (c) non blanche,
   (d) verte ou noire,
   (e) rouge ou blanche.
5. Une urne U1 contient 5 balles blanches, 4 balles rouges et trois balles noires. Une autre urne U2 contient 5 balles blanches, 6 balles rouges et 7 balles noires. On prélève au hasard une balle dans chaque urne Quelle est la probabilité pour que ces deux balles soient de la même couleur ?
6. Un dé bien équilibré est joué jusqu'à l'obtention d'un as (le chiffre 1). Quelle est la probabilité pour qu'il faille plus de trois jets pour voir apparaître l'as ?

7. Lors d'une élection on a observé les résultats suivants :

Candidat	A	B	C	D
Pourcentage obtenu	30%	25%	25%	20%

   Si nous choisissons au hasard et avec remise trois personnes dans cette population, quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu ayant voté pour D dans ce groupe ?
8. Trouvez la probabilité d'avoir le résultat 4 au moins une fois en deux jets d'un dé
9. Considérons deux jeux de 52 cartes et prélevons une carte au hasard dans chacun d'eux. Quelle est la probabilité pour que l'une ou l'autre de ces deux cartes soient la dame de pique ?
10. Si deux dés sont lancés, quelle est la probabilité pour que la somme des deux résultats
    (a) 3
    (b) au moins 3
    (c) au plus 3
    (d) au moins 4 ?
11. Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. Les boules numérotées 1, 2 et 3 sont de couleur noire et les autres de couleur blanche. On prélève dans cette urne deux boules au hasard et avec remise. Calculez la probabilité des événements suivants :
    (a) les chiffres indiqués sur les boules prélevées sont 8 et 9 ;
    (b) au moins un des chiffres indiqués sur les boules prélevées est pair ;
    (c) les boules prélevées sont de la même couleur ;
    (d) les chiffres indiqués sur les boules prélevées sont tous deux supérieurs eu égaux à 6 et l'une au moins des deux boules est de couleur noire ;
    (e) les chiffres indiqués sur les boules prélevées sont tous deux pairs et ces boules sont de même couleur
12. Trois balles sont tirées d'une boîte contenant 6 balles rouges, 4 balles blanches et 5 balles noires. Quelle est la probabilité qu'elles soient prélevées dans l'ordre " rouge-blanche-noire"
    (a) si après chaque tirage on replace la balle prélevée dans la boîte ?
    (b) si les balles ne sont pas replacées dans la boîte ?
13. On prélève au hasard et sans remise quatre chaussures dans un lot de dix paires de chaussures différentes. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins une paire parmi les quatre chaussures choisies ?
14. On lance un dé non pipé deux fois de suite. Quelle est la probabilité pour que la somme des points obtenus :
    (a) soit 8, sachant qu'au premier jet le point amené est impair ?
    (b) soit 8, sachant qu'au premier jet le point amené est 3 ?
15. La probabilité pour qu'un jour quelconque de mai soit non pluvieux est 0,8. Une équipe de football gagne ses matchs par temps clair avec une probabilité de 0,7, par temps de pluie avec une probabilité de 0,4. Sachant que cette équipe a gagné un match le 10 mai, quelle est la probabilité pour qu'il ait plu ce jour-là ?

16. Un panier contient 6 oranges et 5 pamplemousses. Un deuxième panier contient 6 oranges et 8 pamplemousses. Choisissons un panier au hasard et prélevons-y un fruit. Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne une orange ?
17. Une urne contient 6 balles blanches et 3 balles noires ; une deuxième urne contient 7 balles blanches et 4 balles noires. On choisit une balle au hasard dans chacune des urnes et on place ces deux balles dans une troisième urne contenant déjà 3 balles blanches et 3 balles noires. On prélève ensuite une balle dans cette troisième urne ; quelle est la probabilité pour que cette balle soit blanche ?
18. Supposons que 5 hommes sur 100 et 25 femmes sur 10000 soient daltoniens. Choisissons un daltonien au hasard. Quelle est la probabilité pour que cette personne soit un homme, si l'on suppose que les hommes et les femmes sont en nombre égal ?
19. Une urne U_1 contient 9 balles blanches et 1 noire. Une autre urne U_2 contient 5 balles blanches et 20 noires. On prélève une balle au hasard dans une des urnes choisie elle-même au hasard parmi U_l et U_2. On constate que cette balle est blanche. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne U_1 ?
20. Un restaurant prépare deux plats pour les clients pressés : un plat froid spécial et une assiette de charcuterie. 80% des hommes qui sont clients commandent le plat spécial, les autres prenant le second plat, 90% des clientes commandent l'assiette de charcuterie, les autres prenant le plat spécial. 75% des clients sont des hommes. On demande :
    (a) la proportion de plats spéciaux par rapport aux assiettes de charcuterie que doit idéalement préparer le restaurant ;
    (b) la probabilité pour qu'une personne commandant un plat spécial soit un homme.
21. Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées. Le vaccin est-il efficace ?
    Si on suppose de plus que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades. Quelle est la proportion de malades dans la population ?
22. Dans un athénée, 25% des élèves échouent en français, 15% échouent en chimie et 10% échouent en chimie et en français. On choisit un élève au hasard.
    (a) S'il échoue en chimie, quelle est la probabilité qu'il échoue aussi en français ?
    (b) S'il échoue en français, quelle est la probabilité qu'il échoue aussi en chimie ?
    (c) Quelle est la probabilité qu'il échoue en français ou en chimie ?
23. Quelle est la probabilité de gagner au Lotto à 42 numéros
    (a) au rang 1 (6 bons numéros) ;
    (b) au rang 2 (5 bons numéros et le complémentaire) ;
    (c) au rang 3 (5 bons numéros) ;
    (d) au rang 4 (4 bons numéros) ;
    (e) au rang 5 (3 bons numéros).
24. On jette une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir face est le double de la probabilité d'obtenir pile. Si face apparaît, on choisit au hasard l'un des nombres allant de 1 à 9. Si c'est pile qui apparaît, on choisit au hasard l'un des nombres allant de 1 à 5. Calculer la probabilité qu'un nombre pair ait été choisi.

3.2 Solutions

1. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{13}$ (d) $\frac{1}{26}$ (e) $\frac{1}{52}$
2. (a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{1}{5}$
3. (a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{3}{8}$ (e) $\frac{7}{8}$ (f) $\frac{1}{2}$ (g) $\frac{1}{2}$ (h) $\frac{1}{2}$ (i) $\frac{3}{4}$ (j) $\frac{1}{2}$
4. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{10}$ (c) $\frac{7}{10}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{2}$
5. $\frac{35}{108}$
6. $\frac{125}{216}$
7. $\frac{61}{125}$
8. $\frac{11}{36}$
9. $\frac{51}{1352}$
10. (a) $\frac{1}{18}$ (b) $\frac{35}{36}$ (c) $\frac{1}{12}$ (d) $\frac{11}{12}$
11. (a) $\frac{1}{50}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{29}{50}$ (d) 0 (e) $\frac{17}{100}$
12. (a) $\frac{8}{225}$ (b) $\frac{4}{91}$
13. $\frac{99}{323}$

14. (a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{1}{6}$
15. $\frac{1}{8}$
16. $\frac{75}{154}$
17. $\frac{71}{132}$
18. $\frac{20}{21}$
19. $\frac{9}{11}$
20. (a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{24}{25}$
21. (a) $P(M/V) = \frac{2}{5}.P(M)$: le vaccin est efficace ;
    (b) $P(M) = \frac{1}{5}$
22. (a) $\frac{2}{3}$
    (b) $\frac{2}{5}$
    (c) $\frac{3}{10}$
23. (a) $1.9\text{x}10^{-7}$ $\left(= \frac{1}{5245786}\right)$
    (b) $11{,}4\text{x}10^{-7}$ $\left(= \frac{3}{2622893}\right)$
    (c) $4\text{x}10^{-5}$ $\left(= \frac{15}{374699}\right)$
    (d) $18\text{x}10^{-4}$ $\left(= \frac{675}{374699}\right)$
    (e) $272\text{x}10^{-4}$ $\left(= \frac{10200}{374699}\right)$
24. $\frac{58}{135}$

Troisième partie

6SUAA2 - Lois de probabilités

4

Loi de probabilités

A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

			Degré d'acquisition		
	Compétence	Exercices	Help	Bof	OK
1	Déterminer les caractéristiques d'une variable aléatoire discrète	4.1.1.-1 à 3			
2	Résoudre des problèmes mettant en jeu la loi binomiale (ou de Bernouilli)	4.1.1.-4 à 6			
3	Résoudre des problèmes mettant en jeu la loi de Poisson	4.1.1.-7-8			
4	Résoudre des problèmes mettant en jeu la loi normale (variable continue)	4.1.2.			

4.1 Exercices

4.1.1 Variables aléatoires discrètes

1. On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
2. On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.
   Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
3. (a) Un joueur tire sur une cible de 10cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1,2, ..., 10 cm, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   (b) Le joueur gagne k euros s'il atteint la couronne numérotée k pour k compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.
   (a) Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :
   – A : "Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent".
   – B : "Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent".
   (b) Soit X la variable aléatoire : "nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres" : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?
5. Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : "nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20". Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?
6. Un lot de graine est réputé avoir un taux de germination de 80%. Soit X la variable aléatoire définissant le nombre de graine ayant germée dans un lot de 25 graines.
   (a) Quel est le modèle suivi par la variable aléatoire ?
   (b) Calculer la probabilité que toutes les graines germent ?
   (c) Calculer la probabilité que 20 graines germent ?
   (d) Calculer la probabilité qu'au moins 20 graines germent ?
7. Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n

et la minute $n+1$ est : $p = 0,1$. On veut calculer la probabilité pour que : 3,4,5,6,7,8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

   (a) Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.
   (b) Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?

8. Un central téléphonique possède L lignes. On estime à 1200 le nombre de personnes susceptibles d'appeler le standard sur une journée de 8 heures, la durée des appels étant de deux minutes en moyenne. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes en train de téléphoner à un instant donné.
   (a) Montrer que l'on est en droit d'approcher la distribution de X par une loi de Poisson.
   (b) On suppose $L = 3$. Calculer la probabilité d'encombrement à un instant donné, à savoir $P(X > L)$.
   (c) Quelle doit être la valeur minimale de L pour qu'à un instant donné, la probabilité d'encombrement ne dépasse pas 0,1.

4.1.2 Variables aléatoires continues

1. Une assurance s'intéresse aux coûts des sinistres susceptibles de survenir en 2013. On note X la variable aléatoire qui à chaque sinistre associe son coût. L'étude des années précédentes montre que X suit la loi normale de moyenne 1130 e et d'écart type 180e. Quelle est la probabilité qu'en 2013 un sinistre pris au hasard coûte entre 850 et 1700 e ?
2. Un usine fabrique des puzzles de 512 pièces. Pour tester la conformité des puzzles, le service qualité de l'entreprise prélève au hasard un puzzle de 512 pièces. On appelle X la variable aléatoire qui à un puzzle donné associe le nombre de pièces non conforme. On estime que X suit le loi normale de moyenne 9 et d'écart type 3.
   (a) Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 12 pièces non conformes dans le puzzle.
   (b) Déterminer le réel x_0 tel que $P(X < x_0) = 0,01$.
   En déduire le plus petit entier k tel que la probabilité que le puzzle comporte plus de k pièces non conformes soit inférieure à 0,01.
3. La température T pendant le mois de juillet suit une loi normale de moyenne 22°C et d'écart type 4°C. Calculer la probabilité que la température :
   (a) soit inférieure à 19°C
   (b) soit supérieure à 25°C
   (c) soit comprise entre 18 et 26°C
4. On suppose que les masses des blocs de beurre produites par la société Toutdeloi sont distribuées normalement avec une moyenne de 250g et d'un écart type de 10g. On considère qu'un bloc n'est pas rentable si sa masse est plus grande ou égale à 265g. Calculer le pourcentage de blocs non rentables fabriqués par cette société.

5. La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race Française Frisonne Pis Noir peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne μ=6000 litres et d'écart type σ=400 litres. La fonction g désigne la fonction de densité de cette loi normale.

   (a) Afin de gérer au mieux son quota laitier, en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite disposer de certaines probabilités.

      i. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres de lait par an.

      ii. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5900 et 6100 litres de lait par an.

      iii. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6250 litres de lait par an.

   (b) Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite connaître :

      i. La production maximale prévisible des 30% de vaches les moins productives du troupeau.

      ii. La production maximale prévisible des 20% de vaches les plus productives du troupeau.

Quatrième partie

6SUAA3 - Intégrales

5

Les primitives

A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

			Degré d'acquisition		
	Compétence	Exercices	Help	Bof	OK
1	Calculer des primitives immédiates de fonctions ou par la méthode de décomposition	1			
2	Calculer des primitives de fonctions composées	2			
3	Calculer des primitives de fonctions par la méthode d'intégration par partie	3			
4	Calculer des primitives de fonctions rationnelles	4			
5	Calculer des primitives en utilisant toutes les techniques	5			

5.1 Exercices

1. Calculer les primitives suivantes :

(a) $\int x^{17}\,dx$

(b) $\int 7\,dx$

(c) $\int \frac{4}{x^3}\,dx$

(d) $\int \frac{3}{x}\,dx$

(e) $\int (3x^2-4x+7)\,dx$

(f) $\int \left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{3x^2}\right)\,dx$

(g) $\int (e^x-3^x)\;dx$

(h) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}}-x\sqrt{2}\right)\,dx$

(i) $\int (2x^2+3)^2\,dx$

(j) $\int 2x(3+x^2)\,dx$

(k) $\int (x^2+1)(x^3+2x)\,dx$

(l) $\int \left(2x^2+\frac{2}{\sqrt{x^3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)\,dx$

(m) $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{x^2}\,dx$

2. Calculer les primitives suivantes :

(a) $\int \frac{2}{(2x+1)^4}\,dx$

(b) $\int \frac{1}{5-2x}\,dx$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+5}}\,dx$

(d) $\int (1-2x)^7\,dx$

(e) $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^3}\,dx$

(f) $\int \frac{x+1}{\sqrt{(x^2+2x-8)^3}}\,dx$

(g) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\,dx$

(h) $\int \frac{x+3}{2(x^2+6x+5)^4}\,dx$

(i) $\int \frac{1}{2x^2+3}\,dx$

(j) $\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}\,dx$

(k) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

(l) $\int 3xe^{x^2}\,dx$

(m) $\int 2^x(2^x+3)^3\,dx$

(n) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

(o) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

(p) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$

(q) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}\,dx$

3. Calculer les primitives suivantes :

(a) $\int x\sqrt{1-x}\,dx$

(b) $\int x^2(x-3)^5\,dx$

(c) $\int \frac{3x}{(5x+3)^2}\,dx$

(d) $\int (1+x)\sqrt{2x+3}\,dx$

(e) $\int \frac{x}{\sqrt[4]{3+4x}}\,dx$

(f) $\int x(2x+1)^6\,dx$

4. Calculer les primitives suivantes :

(a) $\int x^2e^x\,dx$

(b) $\int (x+1)\ln x\,dx$

(c) $\int \ln x\,dx$

(d) $\int (x+2)e^{-x}\,dx$

(e) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

(f) $\int \cos x.e^x\,dx$

5. Calculer les primitives suivantes :

(a) $\int \frac{1}{x^2-6x+8}\,dx$

(b) $\int \frac{1}{2x^2-5x-3}\,dx$

(c) $\int \frac{1}{x^3-5x^2+2x+8}\,dx$

(d) $\int \frac{8}{x^3-2x^2+4x-8}\,dx$

(e) $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$

(f) $\int \frac{x}{x^2+4x+6}\,dx$

(g) $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}\,dx$

6. Calculer les primitives suivantes :

(a) $\int \left(e^{3x}-x\right)^2\,dx$

(b) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

(c) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$

(d) $\int \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$

(e) $\int \frac{\ln x}{x^5}\,dx$

(f) $\int \sin 2x\,e^{3x-2}\,dx$

(g) $\int x\ln x^3\,dx$

(h) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$

(i) $\int \frac{1}{x^2+2x}\,dx$

(j) $\int \frac{1}{3x^2-x+1}\,dx$

(k) $\int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2\,dx$

(l) $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

(m) $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}\,dx$

(n) $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$

(o) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx$

(p) $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(q) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

(r) $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x-x^2}}\,dx$

(s) $\int (t^2+1)\ln(t^2+1)\,dt$

(t) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(u) $\int x\arctan x\,dx$

5.2 Solutions

1. (a) $\int x^{17}\,dx = \frac{x^{18}}{18} + C$

   (b) $\int 7\,dx = 7x + C$

   (c) $\int \frac{4}{x^3}\,dx = \frac{-2}{x^2} + C$

   (d) $\int \frac{3}{x}\,dx = 3\ln|x| + C$

   (e) $\int (3x^2 - 4x + 7)\,dx = x^3 - 2x^2 + 7x + C$

   (f) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{3x^2}\right)\,dx = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + \frac{2}{3x} + C$

   (g) $\int (e^x - 3^x)\,dx = e^x - \frac{3^x}{\ln 3} + C$

   (h) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{2}\right)\,dx = 4\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}x^2}{2} + C$

   (i) $\int (2x^2+3)^2\,dx = \frac{4x^5 + 20x^3 + 45x}{5} + C$

   (j) $\int 2x(3+x^2)\,dx = \frac{x^4}{2} + 3x^2 + C$

   (k) $\int (x^2+1)(x^3+2x)\,dx = \frac{x^6}{6} + \frac{3x^4}{4} + x^2 + C$

   (l) $\int \left(2x^2 + \frac{2}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)\,dx = \frac{-4}{\sqrt{x}} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + C$

   (m) $\int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}\,dx = \frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x} + C$

2. (a) $\int \frac{2}{(2x+1)^4}\,dx = \frac{-1}{3(2x+1)^3} + C$

   (b) $\int \frac{1}{5-2x}\,dx = \frac{-\ln|2x-5|}{2} + C$

   (c) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+5}}\,dx = \frac{2\sqrt{3x+5}}{3} + C$

   (d) $\int (1-2x)^7\,dx = \frac{-(2x-1)^8}{16} + C$

   (e) $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^3}\,dx = \frac{-1}{2(x^2+x+2)^2} + C$

   (f) $\int \frac{x+1}{\sqrt{(x^2+2x-8)^3}}\,dx = \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x-8}} + C$

   (g) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\,dx = -2\sqrt{\frac{x+1}{x}} + C$

   (h) $\int \frac{x+3}{2(x^2+6x+5)^4}\,dx = \frac{-1}{12(x^2+6x+5)^3} + C$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+3}\,dx = \frac{\sqrt{6}\arctan\frac{\sqrt{6}x}{3}}{6} + C$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}\,dx = \frac{\arcsin\frac{3x}{4}}{3} + C$

(k) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln(e^x+1) + C$

(l) $\displaystyle\int 3xe^{x^2}\,dx = \frac{3e^{x^2}}{2} + C$

(m) $\displaystyle\int 2^x(2^x+3)^3\,dx = \frac{(2^x+3)^4}{4\ln 2} + C$

(n) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{\arcsin x^2}{2} + C$

(o) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

(p) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x\,dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

(q) $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}} + C$

3. (a) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx = 2\frac{\sqrt{(1-x)^5}}{5} - 2\frac{\sqrt{(1-x)^3}}{3} + C$

(b) $\displaystyle\int x^2(x-3)^5\,dx = \frac{(x-3)^8}{8} + 6\frac{(x-3)^7}{7} + 3\frac{(x-3)^6}{2} + C$

(c) $\displaystyle\int \frac{3x}{(5x+3)^2}\,dx = \frac{3}{25}\ln|5x+3| + \frac{9}{25}.\frac{1}{5x+3} + C$

(d) $\displaystyle\int (1+x)\sqrt{2x+3}\,dx = \frac{1}{10}\sqrt{(2x+3)^5} - \frac{1}{6}\sqrt{(2x+3)^3} + C$

(e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{3+4x}}\,dx = \frac{1}{28}\sqrt[4]{(3+4x)^7} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{(3+4x)^3} + C$

(f) $\displaystyle\int x(2x+1)^6\,dx = \frac{(2x+1)^8}{32} - \frac{(2x+1)^7}{28} + C$

4. (a) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx = e^x(x^2-2x+2) + C$

(b) $\displaystyle\int (x+1)\ln x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} - x + C$

(c) $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$

(d) $\displaystyle\int (x+2)e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x+3) + C$

(e) $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + C$

(f) $\displaystyle\int \cos x.e^x\,dx = e^x\frac{\cos x+\sin x}{2} + C$

5. (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+8}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|$+C

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-5x-3}\,dx = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{2x+1}\right| + C$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-5x^2+2x+8}\,dx = \frac{1}{10}\ln|x-4| - \frac{1}{6}\ln|x-2| + \frac{1}{15}\ln|x+1| + C$
$\displaystyle\left(= \frac{1}{30}\ln\left|\frac{(x-4)^3(x+1)^2}{(x-2)^5}\right|\right) + C$

(d) $\displaystyle\int \frac{8}{x^3-2x^2+4x-8}\,dx = -\arctan\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \ln|x-2| + C$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$

(f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+6}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+6) - \sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}(x+2)}{2} + C$

(g) $\displaystyle\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}\,dx = \frac{\sqrt{7}\arctan\frac{\sqrt{7}(4x-1)}{7}}{14} + \frac{\ln(2x^2-x+1)}{4}$
$\displaystyle+x^3 - \frac{x^2}{2} + C$

6. (a) $\displaystyle\int \left(e^{3x}-x\right)^2\,dx = \frac{e^{6x}}{6} + \frac{2e^{3x}(1-3x)}{9} + \frac{x^3}{3} + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \arcsin e^x + C$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx = \arctan(e^x+1) + C$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos x} + C$

(e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^5}\,dx = \frac{-\ln|x|}{4x^4} - \frac{1}{16x^4} + C$

(f) $\displaystyle\int \sin 2x\, e^{3x-2}\,dx = e^{3x-2}\frac{3\sin 2x - 2\cos 2x}{13} + C$

(g) $\displaystyle\int x\ln x^3\,dx = \frac{x^2\ln|x^3|}{2} - \frac{3x^2}{4} + C$

(h) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = \frac{2(e^x-2)\sqrt{e^x+1}}{3} + C$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x}\,dx = \frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln|x+2|}{2} + C$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2-x+1}\,dx = \frac{2\sqrt{11}}{11}\arctan\frac{\sqrt{11}(6x-1)}{11} + C$

(k) $\displaystyle\int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2\,dx = 2ab\ln|x-a| - \frac{b^2}{x-a} + a^2x + C$

(l) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \frac{-1}{\ln x} + C$

(m) $\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}\,dx = \ln|\cos x + x| + C$

(n) $\displaystyle\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx = \frac{5\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2} + \sqrt{4-3x^2} + C$

(o) $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx = 2\arctan x + \ln|x| + C$

(p) $\displaystyle\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\arcsin^3 x}{3} + C$

(q) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{2\sqrt{\cos^5 x}}{5} - 2\sqrt{\cos x} + C$

(r) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-3x-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{\sqrt{17}(2x+3)}{17} + C$

(s) $\displaystyle\int (t^2+1)\ln(t^2+1)\,dt = \frac{4}{3}\arctan t + \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\ln(t^2+1) - \frac{2t^3}{9} - \frac{4t}{3} + C$

(t) $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C$

(u) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx = \left(\frac{x^2+1}{2}\right)\arctan x - \frac{x}{2} + C$

6

Calcul intégral

A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

			Degré d'acquisition		
	Compétence	Exercices	Help	Bof	OK
1	Calculer des intégrales définies	6.1.1.-1			
2	Déterminer analytiquement des aires de surfaces comprises entre une courbe représentative d'une fonction $f(x)$, l'axe Ox et deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$	6.1.1.-2			
3	Déterminer analytiquement des aires de surfaces comprises entre deux courbes représentatives de fonctions $f(x)$ et $g(x)$ et deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$	6.1.1.-3			
4	Déterminer analytiquement des aires de surfaces comprises entre deux courbes représentatives de fonctions $f(x)$ et $g(x)$	6.1.1.-4			
5	Résoudre des problèmes de calcul d'aires	6.1.1.-5-6			
6	Calculer des volumes de révolutions	6.1.1.-7 à 11			
7	Résoudre des problèmes complexes de type "*BAC S*"	6.1.2.			

6.1 Exercices

6.1.1 Exercices généraux

1. Calculer les intégrales définies suivantes

   (a) $\displaystyle\int_0^1 (e^x+1)^2\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5x\sin\left(x^2-\frac{\pi^2}{16}\right)\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_e^{e^2} \ln^2 x\,\mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$

2. Calculer l'aire des surfaces limitées par le graphique de f, l'axe Ox et les droites $x=a$ et $x=b$.

   (a) $f(x)=\sqrt{2x}$, $a=0$ et $b=4$;

   (b) $f(x)=\sin x$, $a=\dfrac{\pi}{2}$ et $b=\dfrac{3\pi}{2}$;

   (c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}$, $a=-1$ et $b=1$;

   (d) $f(x)=x^2\ln x$, $a=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ et $b=e$.

3. Calculer l'aire des surfaces limitées par les graphiques de f et de g et les droites $x=a$ et $x=b$.

   (a) $f(x)=x^2-2x+1$, $g(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$, $a=\dfrac{5}{2}$ et $b=4$;

   (b) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, $a=0$ et $b=\dfrac{\pi}{2}$;

   (c) $f(x)=\ln(x^2+1)$, $g(x)=\ln 2$, $a=-3$ et $b=2$.

4. Calculez l'aire de la surface fermée délimitée par les graphiques de f et g.

   (a) $f(x)=2-x^2$ et $g(x)=\dfrac{x+3}{2}$

   (b) $f(x)=x^3-3x+2$ et $g(x)=2x^2-2x$

   (c) $f(x)=-\dfrac{x^3}{2}-1$ et la droite passant par $A(-2,3)$ et l'origine des axes.

5. Déterminer la pente de la droite passant par l'origine qui délimite avec la parabole d'équation $y=-x^2+6x$ une surface dont l'aire vaut $\frac{1}{8}$ de la surface limitée par la parabole et l'axe Ox.

6. Calculer l'aire délimitée par le graphique de la fonction $f(x)=xe^{-x^2}$, la tangente au graphique en son maximum et l'axe Oy.

7. Calculer les volumes de révolution engendrés par la rotation autour de Ox de la surface limitée par le graphe de $f(x)$ et l'axe Ox

   (a) $f(x) = 9 - x^2$

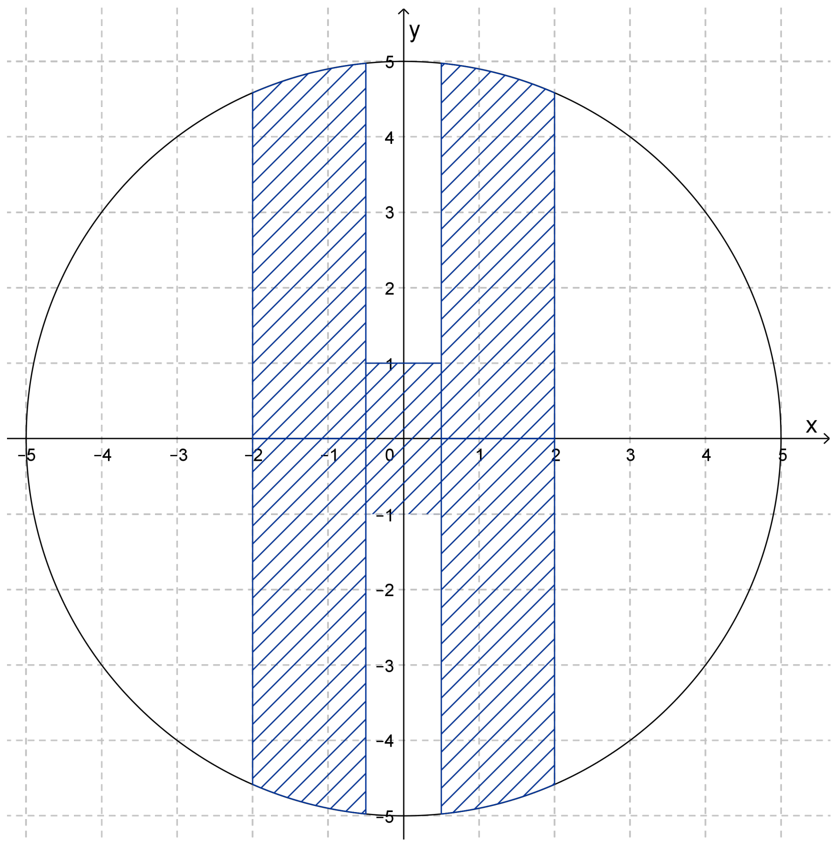
   (b) $f(x) = x^3 + x^2$

8. Calculer le volume de révolution engendré par la rotation autour de Ox des surfaces limitées par les graphes de $f(x) = \sqrt{x-2}$ et $g(x) = \sqrt{\frac{x}{2} + 2}$ entre $x = -4$ et $x = 8$.

9. Une parabole d'axe Oy comprend les points (2,4) et (0,2). Déterminer l'équation de cette parabole ainsi que le volume engendré par la rotation de la parabole autour de l'axe Ox entre $x = -2$ et $x = 2$.

10. Calculer le volume d'une sphère de rayon 2 à l'aide du calcul intégral.

11. Un yoyo est formé :
    - d'un moyeu cylindrique de 2cm de diamètre et de 1cm de large
    - de deux flancs de 1,5cm d'épaisseur coupés dans une sphère de 5cm de rayon centrée au centre du moyeu.



Calculer le volume de ce yoyo.

6.1.2 Exercices récapitulatifs : fonctions exponentielles et calcul intégral

Exercice 1

Soient les fonctions

$$f(x) = x^2e^{-x} \qquad g(x) = e^{-x}$$

et F et G leur graphe respectif dans le même repère orthonormé.

1. Déterminer les coordonnées des extrémums de $f(x)$ et en donner la nature ;
2. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de F ;
3. Etudier la limite en $\pm\infty$ de $f(x)$;
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de F et G ;
5. Tracer F et G ;
6. Déterminer l'aire de la région finie S entre F et G ;
7. Calculer la longueur du plus grand segment de droite parallèle à l'axe des ordonnées que l'on peut trouver dans S.

Exercice 2

Soit f la fonction définie pour tout x élément de $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x+2}$$

On note F la représentation graphique de f dans un repère orthogonal et d la droite d'équation $y = \frac{5}{2}x$. On note $\mathcal{A}$ l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe F, la droite d et la droite d'équation $x = 0$. On note O, P, Q et R les points de coordonnées : $0(0,0)$, $P(0,5)$, $Q(2,5)$ et $R(0;e^2)$.

1. Détermination d'un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$
   (a) Montrer par le calcul que le point Q appartient à la droite d et à la courbe F, et que la courbe F coupe l'axe des ordonnées au point R.
   (b) Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte des aires de chacun des triangles OPQ et OQR. En déduire un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ en unités d'aire.
2. Calcul de la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$
   (a) Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide d'une expression faisant intervenir une intégrale.
   (b) Soit G la fonction définie pour tout x élément de $\mathbb{R}$ par :
   $$G(x) = (-x^2 - 2x - 3)e^{-x+2}$$
   On note G' la fonction dérivée de G sur $\mathbb{R}$. Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, calculer $G'(x)$ en donnant les détails du calcul. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$. En donner une valeur approchée arrondie au centième.

6.2 Solutions

6.2.1 Exercices généraux

1. (a) $\dfrac{e^2}{2} + 2e - \dfrac{3}{2}$
   (b) $\dfrac{5}{2}\left(\cos\dfrac{\pi^2}{16} - 1\right)$
   (c) $\sqrt{59} - \sqrt{11}$
   (d) -2
   (e) $2e^2 - e$
   (f) $\arctan 2 - \dfrac{\pi}{4}$
2. (a) $\mathcal{A} = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$(u.a.)
   (b) $\mathcal{A} = 2$(u.a.)
   (c) $\mathcal{A} = \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \arcsin\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$(u.a.) $(= 2\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2})$
   (d) $\mathcal{A} = \dfrac{2}{9} + \dfrac{2e^3}{9} - \dfrac{5}{18\sqrt{e^3}}$(u.a.)
3. (a) $\dfrac{103}{24}$ (u.a.)
   (b) $2\sqrt{2} - 2$ (u.a.)
   (c) $\ln\dfrac{3125}{4} - \dfrac{\pi}{2} - 2$ (u.a.)
4. (a) $\dfrac{9}{16}(u.a.)$
   (b) $\dfrac{37}{12}(u.a.)$
   (c) $\dfrac{27}{8}(u.a.)$
5. $m = 3$
6. $\dfrac{\sqrt{e}}{e} - \dfrac{1}{2}(u.a.)$
7. (a) $\pi\dfrac{1296}{5}(u.v.)$
   (b) $\dfrac{\pi}{105}(u.v.)$
8. 18π
9. $\dfrac{448\pi}{5}(u.v.)$
10. $\dfrac{32\pi}{3}(u.v.)$
11. $\dfrac{849\pi}{12}(u.v.)$

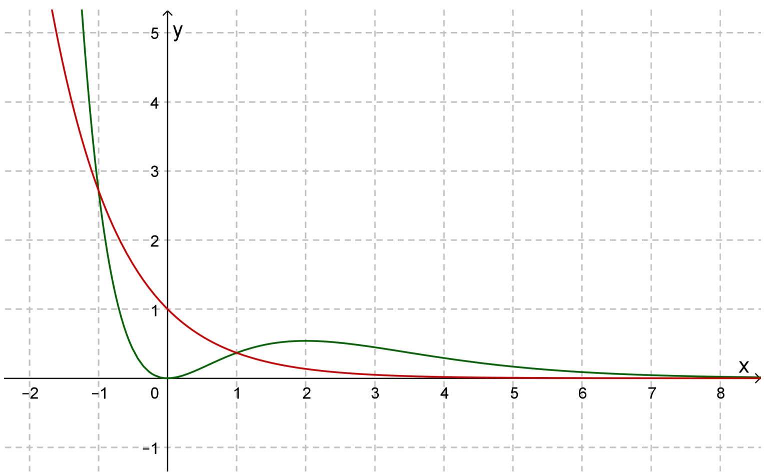
6.2.2 Exercices récapitulatifs : fonctions exponentielles et logarithmiques et calcul intégral

Exercice 1

1. $f'(x) = xe^{-x}(2-x)$ et le tableau de variation est :

x		0		2	
x	-	0	+		+
$2-x$	+		+	0	-
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$
		(-0,0)		$\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$	

2. $f''(x) = e^{-x}(x^2-4x+2)$.
   Les points d'inflexion ont pour coordonnées $\left(2 \pm \sqrt{2}, (6 \pm 4\sqrt{2})e^{-2\pm\sqrt{2}}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
4. Les points d'intersection sont $A(-1, e)$ et $B(1, e^{-1})$.



5.
6. Position relative de F et G : $f(x) - g(x) = (x^2-1)e^{-x}$.

x		-1		1	
$f-g$	+	0	-	0	+
			$f < g$		

$$\mathcal{A} = -\int_{-1}^{1} (x^2-1)e^{-x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{int. par partie}}{=} \frac{4}{e}$$

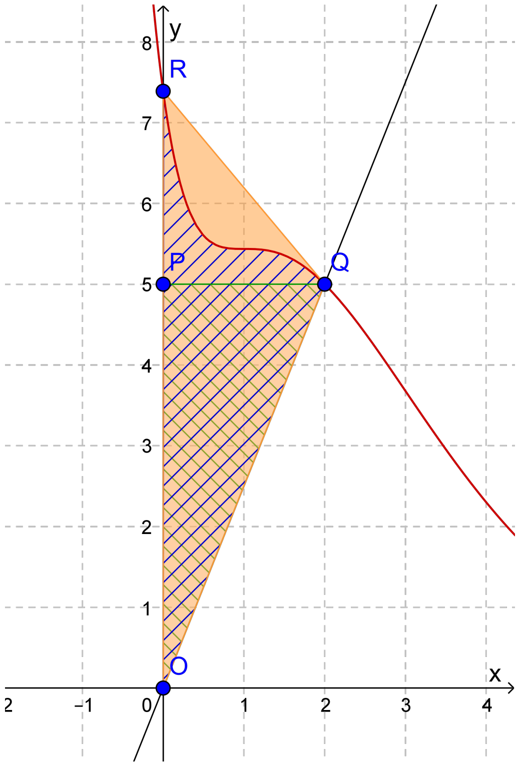
7. Droite parallèle à l'axe des ordonnées $d \equiv x = k$. Les points d'intersection entre d et f (P) et d et g (Q) ont pour coordonnées :

$$P : (k, k^2e^{-k}) \quad \text{et} \quad Q : (k, e^{-k})$$

   $l = d(P,Q) = (k^2-1)e^{-k}$. l est maximum si $l'(k) = 0$ c'est-à-dire si $k = -1 \pm \sqrt{2}$. Dans ce cas, $l_{max} = (2-2\sqrt{2})e^{1-\sqrt{2}}$.

Exercice 2

La situation est représentée ci-dessous.



1. (a) $Q \in d \Leftrightarrow 5 = \dfrac{5}{2}.2$ et $f \cap Oy : (0, e^2)$.
   (b) $\mathcal{A}_{OPQ} = 5$ et $\mathcal{A}_{OQR} = e^2 \approx 7,389$
2. (a) Le calcul de la position relative de f et d est impossible analytiquement. D'après le graphe on constate que $f > d$. Dès lors :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \left[(x^2+1)e^{-x+2} - \frac{5}{2}x\right] \mathrm{d}x$$

   (b) On obtient $G'(x) = f(x)$. $G(x)$ est donc une primitive de $f(x)$.
   (c) $\mathcal{A} = [G(x)]_0^2 = 3e^2 - 16 \approx 6,167$(u.a.).

Cinquième partie

6SUAA4 - Fonctions exponentielles et logarithmiques

7

Fonctions exponentielles et logarithmiques

A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

			Degré d'acquisition		
	Compétence	Exercices	Help	Bof	OK
1	Etablir, par manipulations graphiques de fonction des graphes de fonctions exponentielles	7.1.1.-1			
2	Résoudre des équations et inéquations exponentielles simples	7.1.1.-2			
3	Etablir, par manipulations graphiques de fonction des graphes de fonctions logarithmiques	7.1.2.-1			
4	Utiliser les propriétés des logarithmes pour établir des identités	7.1.2.-2 à 4			
5	Résoudre des équations et inéquations exponentielles et logarithmiques	7.1.2.-6			
6	Etablir des caractéristiques de fonctions exponentielles et logarithmiques	7.1.2.-5-7 à 10			
7	Résoudre des problèmes mettant en œuvre des fonctions exponentielles ou logarithmiques	7.1.2.-11-12			
8	Résoudre des exercices tu type "*BAC S*"	7.1.3.			

7.1 Exercices

7.1.1 Fonctions exponentielles

1. Etablir le graphe de la fonction $f(x) = 2^x$. Etablir le graphe des fonctions suivantes par manipulations graphiques de fonctions.
   (a) $f(x) = \left|2^{x-1} - 2\right|$
   (b) $f(x) = \frac{1}{3}2^{-x+1} - 1$
2. Résoudre les équations suivantes
   (a) $2^x = 8$
   (b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} = \frac{1}{27}$
   (c) $2^{5x-3} = \frac{1}{4}$
   (d) $2^{x^2} = 4.2^x$
   (e) $3^{|x|}.9^x = \frac{1}{3}$
   (f) $\left(\frac{1}{16}\right)^x - 3\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4$
   (g) $-2^{2x} + 3.2^x - 2 \leq 0$
   (h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-6} \leq 27$

7.1.2 Fonctions logarithmiques

1. Etablir le graphe de la fonction $f(x) = 2^x$. A partir de ce graphe, et par manipulations graphiques de fonctions, établir le graphe des fonctions
   (a) $f(x) = \log_2 x$
   (b) $f(x) = 2\left|\log_2(2x+1) + 1\right|$
   (c) $f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$
2. Sans utiliser la calculatrice, calculer :
   (a) $\log_3 81$
   (b) $\log_{\frac{1}{4}} 256$
   (c) $\log \sqrt{1000}$
   (d) $\log_a \sqrt[3]{a^{2n}}$
3. Si $\log_2 x = 41,43$, calculer :
   (a) $\log_2 8x$
   (b) $\log_2 \sqrt{2}x$
   (c) $\log_2 \frac{x}{64}$
   (d) $\log_2 x^3$
4. Démontrer que
   (a) $\log_b a.\log_c b.\log_a c = 1$
   (b) $\log_a p.\log_b p + \log_b p.\log_c p + \log_c p.\log_a p = \dfrac{\log_a p \log_b p \log_c p}{\log_{abc} p}$

5. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

   (a) $\log_{0.5}(1-4x)$
   (b) $\ln(4x-x^2)$
   (c) $\dfrac{e^x-1}{e^{x+1}-1}$
   (d) $\log(4x^2+x-3)-\ln(9-x^2)+\log 3$
   (e) $\log\dfrac{1}{4x^2-16x}$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$

   (a) $\log_5(7x+6)=3\log_5 x$
   (b) $\log_{0.5}(x-1)+\log_{0.5}2-\log_{0.5}x=1$
   (c) $\log x>2$
   (d) $\log_{0.2}(2x-1)\leq 3$
   (e) $\ln(x-1)=\ln 3+\ln(x^2+2x-1)$
   (f) $\ln^2 x-3\ln x+2=0$
   (g) $2\ln x-\ln 2\geq\ln(1-2x)$
   (h) $\dfrac{\ln x+1}{1-\ln x}<0$
   (i) $\log x^2=\log^2 x$
   (j) $x^{\log x}=100$
   (k) $\log_2 x+\ln x=5$
   (l) $10^{2x}-10^x=5$
   (m) $e^x+5e^{-x}=6$
   (n) $-e^{2x}+3e^x-2\leq 0$

7. Dériver :

   (a) $\ln(4x-5)$
   (b) $\ln^3 x-3\ln^2 x-5\ln x$
   (c) $\ln\dfrac{3-x}{3+x}$
   (d) e^{x^2}
   (e) $\dfrac{x}{e^x}$
   (f) $\dfrac{\ln x}{xe^x}$
   (g) $\ln^2\left(e^{2x}-1\right)$
   (h) $\sqrt{\dfrac{1-e^x}{1+e^x}}$
   (i) 3^{2x+1}
   (j) $\dfrac{3^x+2^x}{5^x}$
   (k) $e^x(\sin x+\cos x)$
   (l) $\ln(\sin x)$
   (m) $x^{\ln x}$

8. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y=\dfrac{\ln x}{x}-1$ au point d'abscisse 2.

9. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2}$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$
   (d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

10. Faire l'étude complète des fonctions suivantes

    (a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$
    (b) $f(x)=e^x(x-1)$
    (c) $f(x)=x^3e^x$
    (d) $f(x)=e^{\tan x}$

11. Dans certaines conditions, une population de bactéries triple toutes les trois heures. Supposons qu'il y ait initialement 100 bactéries.
    (a) Quelle est la population au bout de 15 heures ?
    (b) Déterminer le temps qu'il faut pour que la population atteigne 50000 éléments.
12. Un isotope de sodium, le ^{24}Na, a une demi-vie de 15 heures.
    (a) Si l'on prend un échantillon de 2 gr. de cet isotope, combien en reste-t-il au bout de 60 heures ?
    (b) Combien de temps faut-il pour qu'il n'en reste que 0,01 gr. ?

7.1.3 Exercices récapitulatifs

Fonction n°1

On cherche à étudier le comportement de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$$

L'étude de cette fonction nécessite l'étude d'une fonction annexe

$$g(x) = x^2 - 2\ln x$$

1. Déterminer le domaine de $f(x)$.
2. Etude de la fonction $g(x)$.
   (a) Etudier la variation de $g(x)$.
   (b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $dom f$.
3. Etude de la fonction $f(x)$.
   On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f(x)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Calcul des asymptotes
      i. Déterminer la limite de $f(x)$ en 0 et interpréter graphiquement le résultat ;
      ii. Déterminer la limite en $+\infty$.
      iii. Montrer que la droite $d \equiv y = \frac{x}{2}$ est asymptote de la courbe $\mathcal{C}$.
      iv. Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à d. Montrer en particulier que d coupe $\mathcal{C}$ en un point A dont on déterminera les coordonnées.
   (b) Etudier les variations de $f(x)$.
   (c) Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente t à $\mathcal{C}$ est parallèle à d. Préciser les coordonnées de B.
   (d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique a. Justifier l'encadrement $0.34 < a < 0.35$.

Fonction n°2

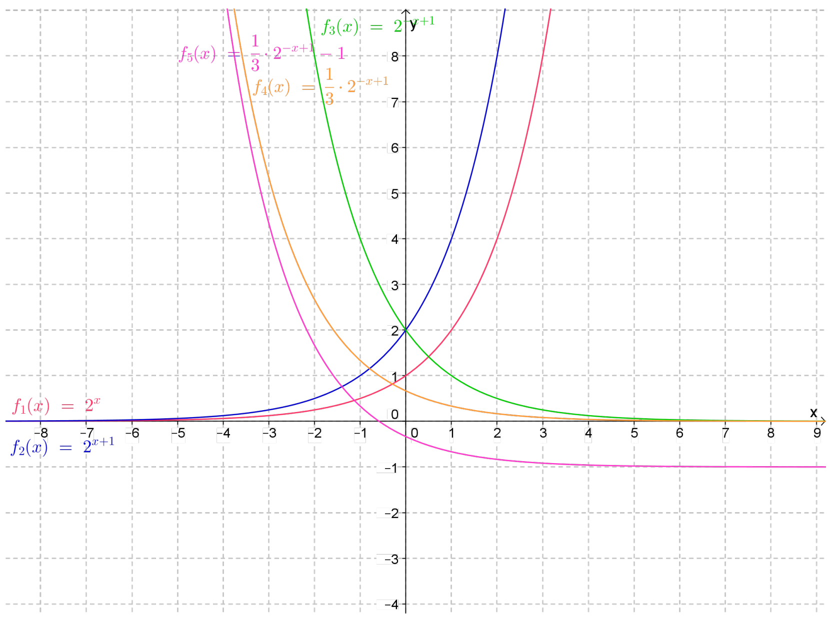
1. Soit $g(x) = \ln(x+1) - \ln x$.
   (a) Déterminer le domaine de $g(x)$.
   (b) Montrer que sur $domg$, la fonction peut s'écrire sous la forme
   $$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$
   (c) Etudier le signe de $g(x)$.
   (d) Déterminer les limites de $g(x)$ en 0 et en $+\infty$
2. Soit la fonction
   $$f(x) = x + 2 + \ln(x+1) - \ln x$$
   définie sur $]0, +\infty$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En utilisant les résultats du 1, on demande de montrer que
   (a) L'axe des ordonnées est asymptote de la courbe $\mathcal{C}$;
   (b) La droite $d \equiv y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$;
   (c) La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de d.

7.2 Solutions

7.2.1 Fonctions exponentielles

1. (a) $f(x) = \left|2^{x-1} - 2\right|$

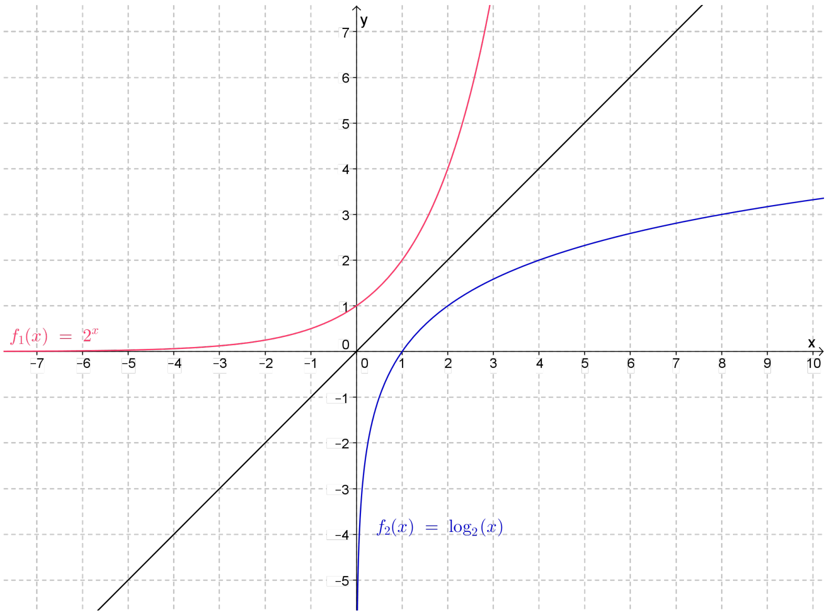
(b) $f(x) = \frac{1}{3}2^{-x+1} - 1$



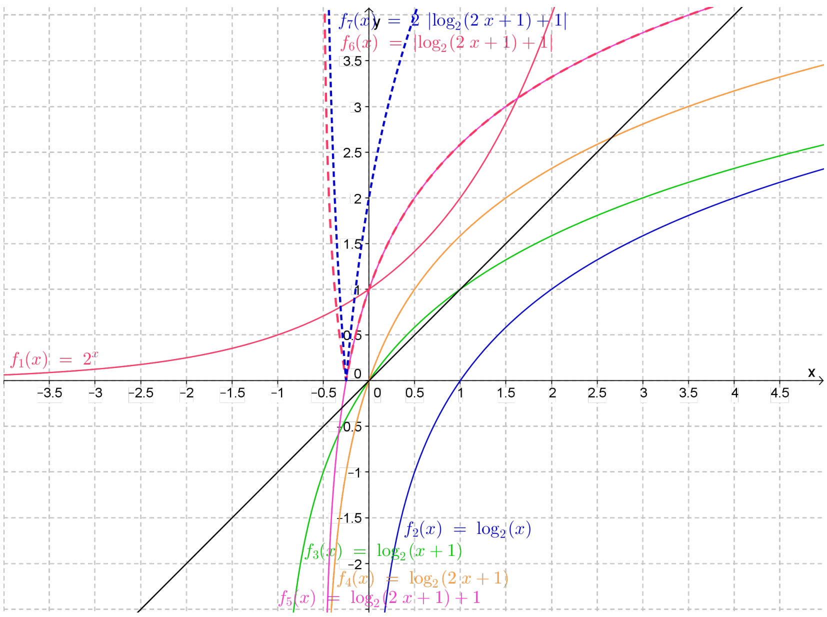
2. (a) S :$\{3\}$
   (b) S :$\{1\}$
   (c) S :$\left\{\frac{1}{5}\right\}$
   (d) S :$\{-1, 2\}$
   (e) S :$\{-1\}$
   (f) S :$\{-1\}$
   (g) S : $-\infty, 0] \cup [1, +\infty$
   (h) S : $-\infty, -1] \cup [3, +\infty$

7.2.2 Fonctions logarithmiques

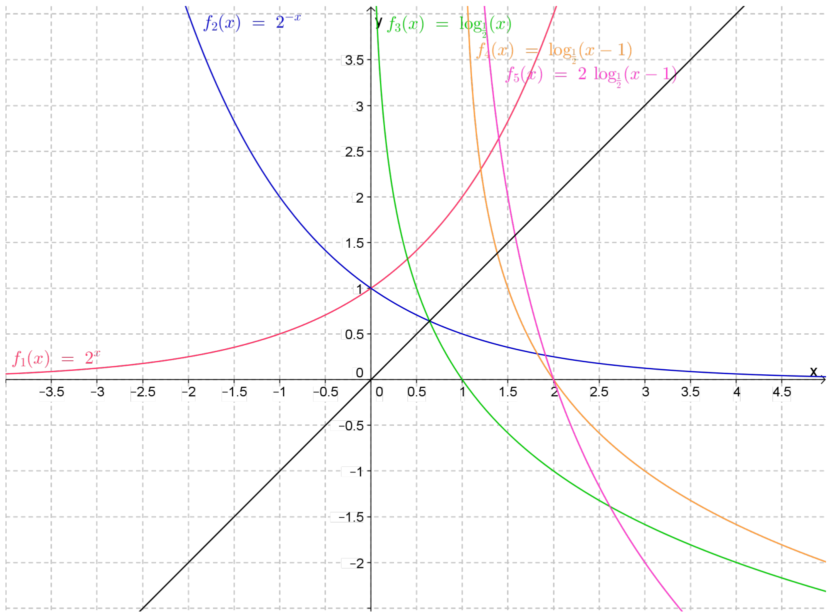
1. (a) $f(x) = \log_2 x$



(b) $f(x) = 2\,|\log_2(2x+1)+1|$



(c) $f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$



2. (a) 4
   (b) -4
   (c) $\dfrac{3}{2}$
   (d) $\dfrac{2n}{3}$

3. (a) 44,43
   (b) 41,93
   (c) 35,43
   (d) 124,29

4. Voir cours oral.

5. (a) $-\infty, \frac{1}{4}\Big[$
   (b) $]0,4[$
   (c) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
   (d) $]-3,-1[\cup\Big]\frac{3}{4},3\Big[$
   (e) $-\infty, 0[\cup]4,+\infty$

6. (a) $S:\{3\}$
   (b) $S:\left\{\frac{4}{3}\right\}$
   (c) $S:]100,+\infty$
   (d) $S:\left[\frac{63}{125},+\infty\right.$
   (e) $S:\phi$
   (f) $S:\{e,e^2\}$
   (g) $S:\left[-2+\sqrt{6},\frac{1}{2}\right[$
   (h) $S:\left]0,\frac{1}{e}\right[\cup]e,+\infty$
   (i) $S:\{1,100\}$
   (j) $S:\left\{10^{-\sqrt{2}},10^{\sqrt{2}}\right\}$
   (k) $S:\left\{e^{\frac{5\ln 2}{\ln 2+1}}\right\}$
   (l) $S:\left\{\log\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\}$
   (m) $S:\{0,\ln 5\}$
   (n) $S:-\infty,0]\cup[\ln 2,+\infty$

7. (a) $\dfrac{4}{4x-5}$
   (b) $\dfrac{3\ln^2 x}{x} - \dfrac{6\ln x}{x} - \dfrac{5}{x}$
   (c) $\dfrac{6}{x^2-9}$
   (d) $2xe^{x^2}$
   (e) $e^{-x}(1-x)$
   (f) $\dfrac{e^{-x}\left[1-(x+1)\ln x\right]}{x^2}$
   (g) $\dfrac{4e^{2x}\ln(e^{2x}-1)}{e^{2x}-1}$
   (h) $-\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^x}.\,(e^x+1)^{\frac{3}{2}}}$
   (i) $2.3^{2x+1}\ln 3$
   (j) $-\dfrac{3^x\ln\frac{5}{3}+2^x\ln\frac{5}{2}}{5^x}$
   (k) $2e^x\cos x$
   (l) $\cot x$
   (m) $2x^{\ln x-1}\ln x$
8. $t \equiv y = \dfrac{1-\ln 2}{4}x + \dfrac{2\ln 2-3}{2}$
9. (a) 1
   (b) 0
   (c) 0
   (d) 1
10. Voir cours oral.
11. $P(t) = P_0\, 3^{\frac{t}{3}}$
    (a) $P(15) = 24300$;
    (b) $t \approx 17$h.
12. $m(t) = m_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$
    (a) $m(60) = 0,125$gr ;
    (b) $t \approx 115$h.

7.2.3 Exercices récapitulatifs

Fonction n°1

1. dom_f : $\mathbb{R}_0^+$
2. (a) $g'(x) = \dfrac{2'x^2-1)}{x}$. Le tableau de variation est :

x	0		1	
x^2-1		-	0	+
x	0	+		+
$f'(x)$	$\nexists$	-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	m (-1,1)	$\nearrow$

   (b) Comme le minimum est positif, $g(x) > 0$ sur dom_f.

3. (a)
   i. $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$. Il y a donc une AV$\equiv x = 0$.
   ii. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
   iii. $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{x}{2} \right] = 0$. Il y a donc une AO$\equiv y = \frac{x}{2}$.
   iv. $d(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x}$. Le tableau de signe de la distance est :

x	0		$\frac{1}{e}$	
$\ln x + 1$		-	0	+
x	0	+		+
$d(x)$	$\nexists$	-	0	+
			$A(\frac{1}{e}\frac{1}{2e})$	

(b) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$. $f'(x) > 0$ donc $f(x)$ est toujours croissante.

(c) B est tel que $f'(a) = \dfrac{1}{2}$ et donc $a = 1$. Donc $B : \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.

(d) $f(x)$ est monotone, $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On est donc dans les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires.
$f(0,34) \approx -0,061$ et $f(0,35) \approx 0,033$.

Fonction n°2

1. (a) $\text{dom}_f : \mathbb{R}_0^+$.
   (b) $g(x) = \ln(x+1) - \ln x = \ln \dfrac{x+1}{x} = \ln \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
   (c) $x > 0$. Donc $\ln \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) > \ln 1 > 0$. Donc $g(x) > 0$.
   (d) $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$
2. (a) $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$. Il y a donc une AV$\equiv x = 0$.
   (b) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Il y a donc une AO$\equiv y = x + 2$.
   (c) $d(x) = g(x)$. Or $g(x) > 0$. La courbe est donc toujours au-dessus de l'AO.

Sixième partie

6SUAA5 - Fonctions réciproques et cyclométriques

8

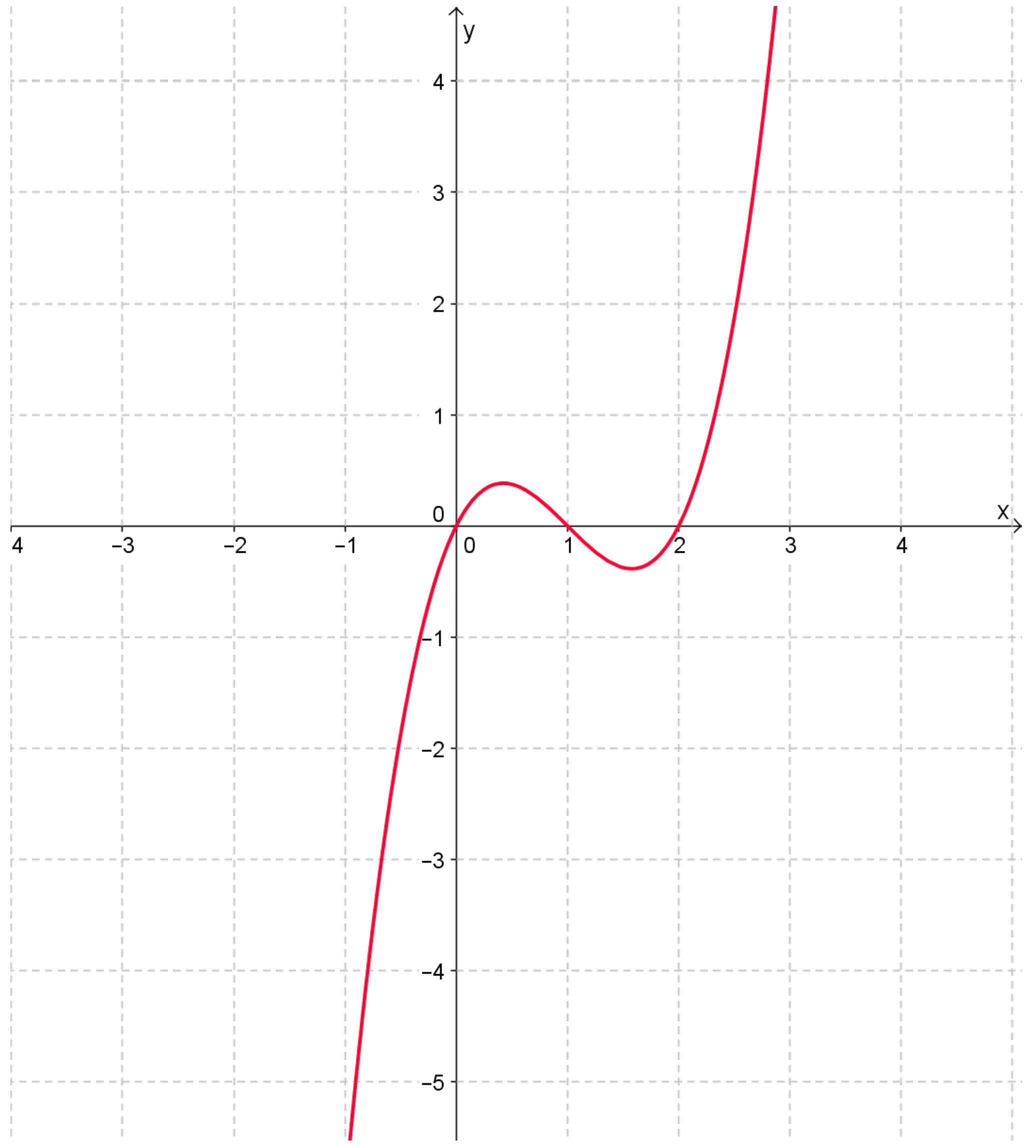
Fonctions cyclométriques

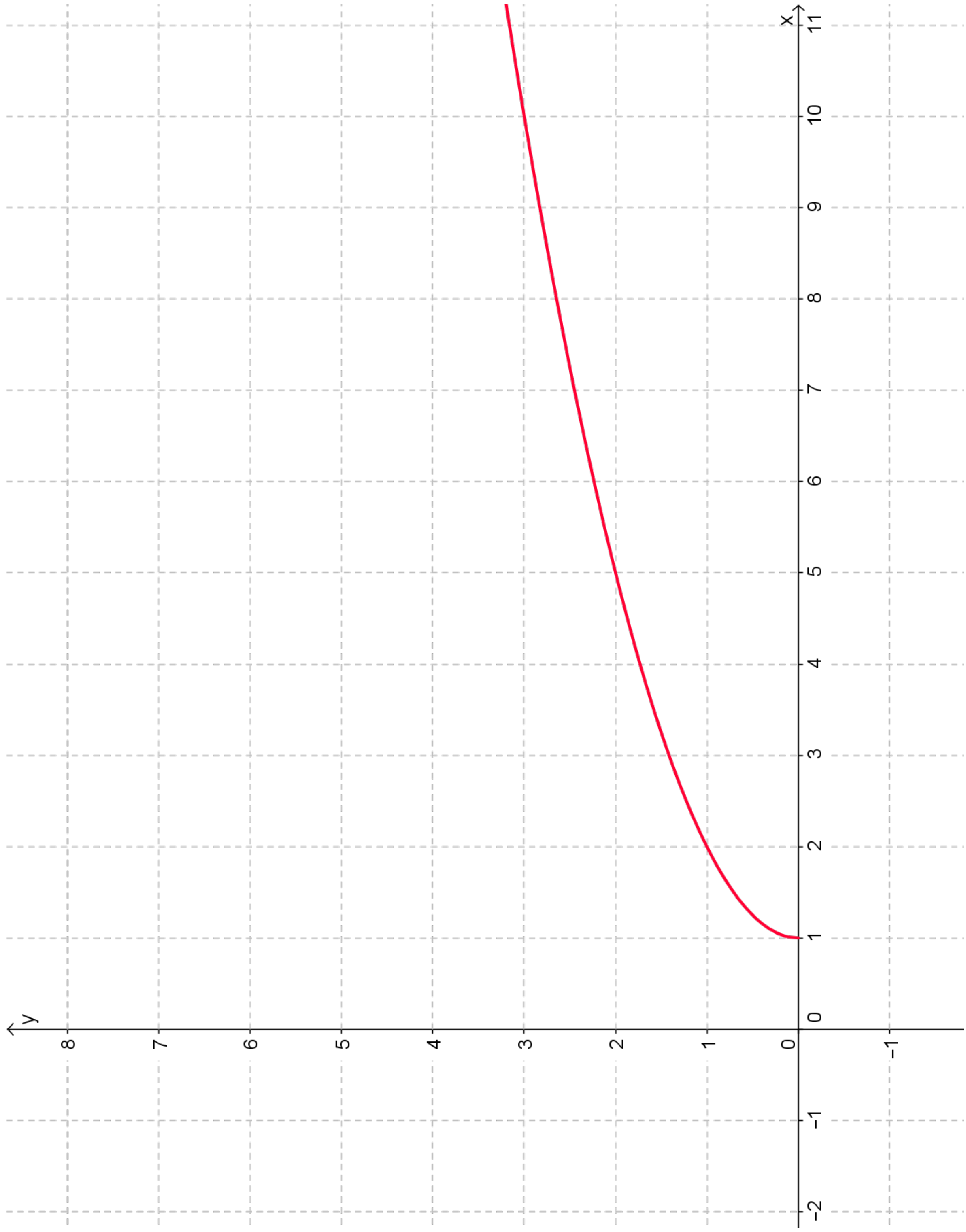
A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

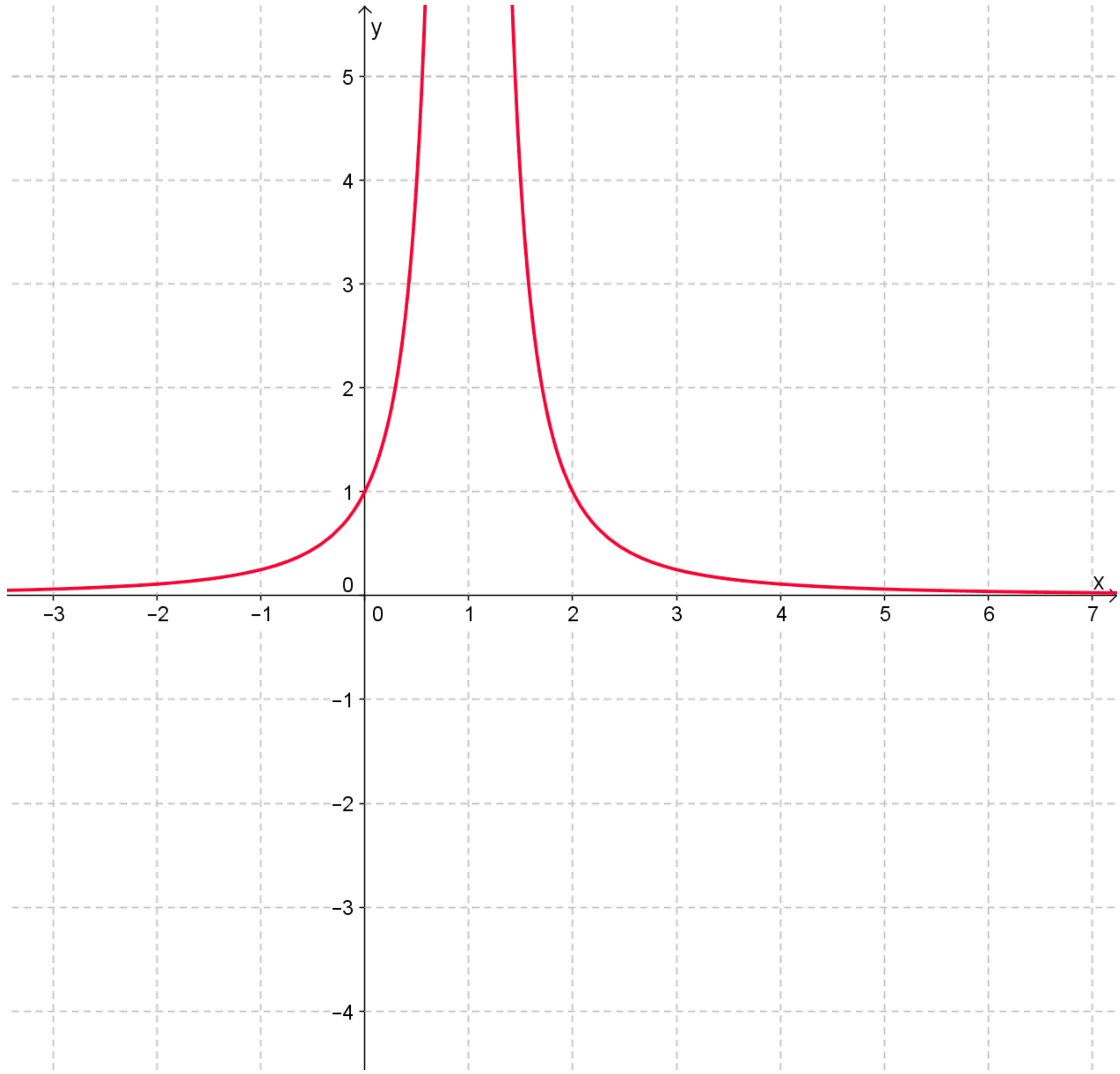
			Degré d'acquisition		
	Compétence	Exercices	Help	Bof	OK
1	Etablir des graphes de fonctions réciproques et/ou déterminer des formes analytiques de fonctions réciproques	1 à 3			
2	Etablir des identités cyclométriques ou résoudre des équations cyclométriques	4 à 6			
3	Déterminer des caractéristiques de fonctions cyclométriques	7 à 9			

8.1 Exercices

1. On donne les graphes des fonctions suivantes




x
y
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8



(a) Pour chacune de ces fonctions, établir le graphe de sa réciproque ;

(b) Les fonctions réciproques obtenues sont-elles des fonctions ? Justifier.

2. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$. Déterminer la forme analytique de sa réciproque. Que constate-t-on ? Vérifier graphiquement le résultat obtenu.

3. Déterminer la valeur de a, b et c pour que la fonction $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ réponde aux trois conditions suivantes :
   - Son domaine est $\mathbb{R}\backslash\{2\}$
   - Elle est égale à sa réciproque ;
   - Son graphique comprend le point (3,-1).

4. Calculer

   (a) $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$

   (b) $\arctan\sqrt{3}$

   (c) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   (d) $\arccos(-1,3)$

5. Résoudre

   (a) $\arccos x = \frac{2\pi}{3}$

   (b) $\arctan x = 1.2$

   (c) $\arcsin x = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arctan(-1)$

   (d) $\arctan x + \arctan(x-2) = \frac{\pi}{4}$

   (e) $\arctan 2x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

6. Vérifier les identités suivantes

   (a) $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

   (b) $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} + \arccos\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$

   (c) $2\arctan\frac{\sqrt{5}}{2} + \arctan(4\sqrt{5}) = \pi$

   (d) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3} + \arctan\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\pi}{2}$

7. Déterminer le domaine de définition et la dérivée première des fonctions suivantes

   (a) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

   (b) $f(x) = \arccos\frac{x}{x-1}$

   (c) $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-2x}{x^2-3}}$

   (d) $f(x) = \arcsin(x^2-5)$

8. Calculer les limites suivantes (si elles existent)

   (a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \left[(1-x)\tan\frac{x\pi}{2}\right]$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)\right]$

9. Faire l'étude complète de

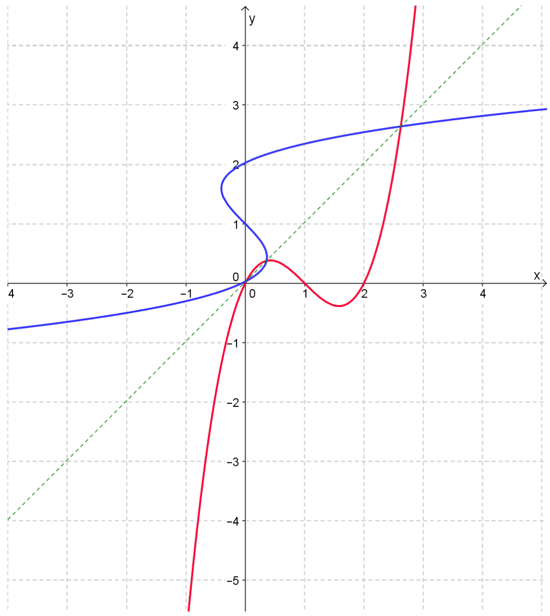
   (a) $f(x) = \arcsin(x^2-1)$

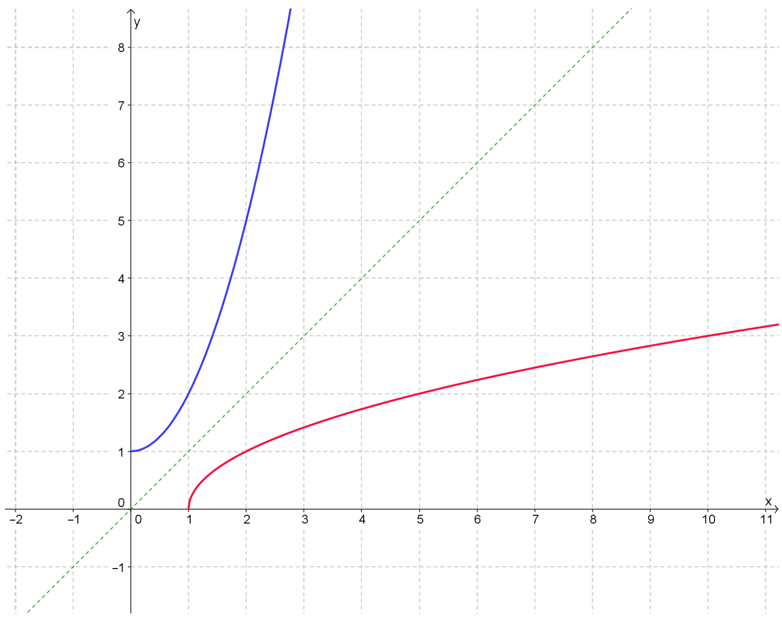
   (b) $f(x) = \arctan\frac{x-1}{x+1}$

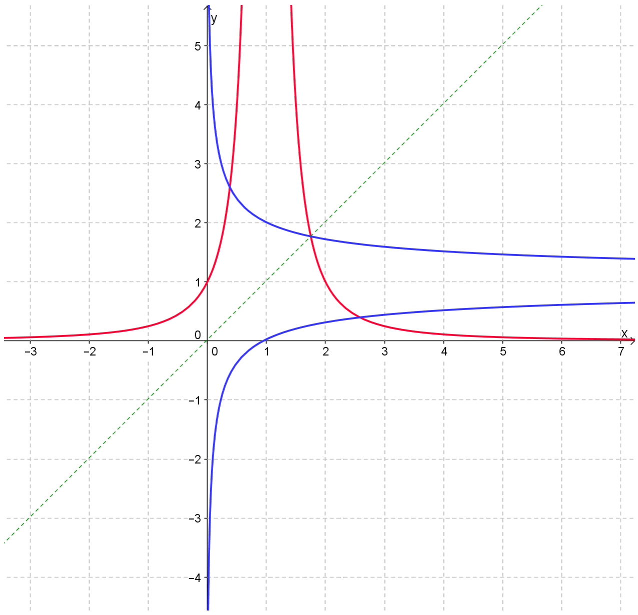
8.2 Solutions

1.

   (a)

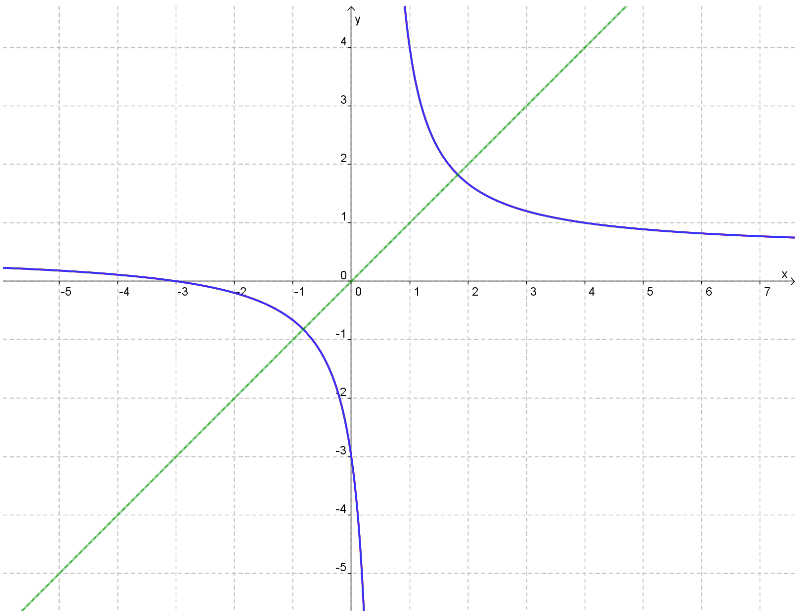






(b) non - oui - non

2. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$.



3. $f(x) = \dfrac{2x-7}{x-2}$

4. (a) $\arccos\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$
   (b) $\arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$
   (c) $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
   (d) $\arccos(-1,3)$: impossible

5. (a) $x = -\dfrac{1}{2}$
   (b) $x = \tan\dfrac{6}{5}$
   (c) $x = 1$
   (d) $x = \pm\sqrt{3}$
   (e) $x = 0$ ou $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. Voir cours oral.
7. (a) $dom_f : \mathbb{R}_0\,;\, f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

   (b) $dom_f : \left.-\infty, \dfrac{1}{2}\right]\,;\, f'(x) = \dfrac{1}{|x-1|\,\sqrt{1-2x}}$

   (c) $dom_f : -\infty, -\sqrt{3}\left[\, \cup \left[\dfrac{1}{2}, \sqrt{3}\right[\right.\,;\, f'(x) = \dfrac{(x^2-x+3)\sqrt{\dfrac{1-2x}{x^2-3}}}{(1-2x)(x^2-2x-2)}$

   (d) $dom_f : \left[-\sqrt{6}, -2\right] \cup \left[2, \sqrt{6}\right]\,;\, f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{-x^4+10x^2-24}}$
8. (a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^3} = -\infty$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \left[(1-x)\tan\dfrac{x\pi}{2}\right] = \dfrac{2}{\pi}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$

   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)\right] = 1$
9. Voir cours oral.

Septième partie

6SUAA6 - Lieux géométriques

9

Les coniques

A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

			Degré d'acquisition		
	Compétence	Exercices	Help	Bof	OK
1	Déterminer l'équation et/ou les caractéristiques d'une ellipse répondant à des conditions géométriques données	9.1.1.			
2	Déterminer l'équation et/ou les caractéristiques d'une hyperbole répondant à des conditions géométriques données	9.1.2.			
3	Déterminer l'équation et/ou les caractéristiques d'une parabole répondant à des conditions géométriques données	9.1.3.			
4	Etudier la position relative d'une conique et d'une droite de manière analytique	9.1.4.			
5	Résoudre analytiquement des problèmes géométriques liés aux coniques	9.1.5.			

9.1 Exercices

9.1.1 Parabole

1. Déterminer les caractéristiques des paraboles suivantes (sommet, axe de symétrie, coordonnées du foyer, équation de la directrice, orientation) :
   (a) $P_1 \equiv 4x - y^2 = 0$
   (b) $P_2 \equiv x^2 + 8y = 0$
   (c) $P_3 \equiv -6x + y^2 - 6y = 3$
   (d) $P_4 \equiv x^2 + 8x + 2y + 15 = 0$
2. Trouver l'équation de la parabole de foyer $\left(0, -\dfrac{4}{3}\right)$ et de directrice $d \equiv y - \dfrac{4}{3} = 0$.
3. Trouver l'équation de la parabole de sommet (3,2) et de foyer (5,2).
4. Ecrire l'équation de la parabole ayant pour foyer le point (6,-2) et de directrice la droite $d \equiv x = 2$.
5. Ecrire l'équation de la parabole d'axe parallèle à Oy, ayant pour sommet (2,3) et passant par (4,5).

9.1.2 Ellipse

1. Déterminer les caractéristiques des ellipses suivantes (centre, coordonnées des sommets, équation de l'axe focale, coordonnées des foyers) :
   (a) $E_1 \equiv 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$
   (b) $E_2 \equiv x^2 + 4y^2 = 64$
   (c) $E_3 \equiv 49x^2 - 294x + 4y^2 - 16y + 261 = 0$
   (d) $E_4 \equiv 100x^2 + 100x + 256y^2 + 1536y = 4071$
2. Trouver l'équation de l'ellipse ayant pour centre l'origine, pour foyer le point (0,3) et de longueur de demi grand axe 5.
3. Un point se déplace de telle sorte que sa distance au point (4,0) est toujours égale à la moitié de sa distance à la droite $d \equiv x - 16 = 0$. Trouver l'équation et les caractéristiques du lieu obtenu.
4. Un point $P(x, y)$ se déplace de telle sorte que la somme de ses distances aux points (4,2) et (-2,2) est égale à 8. Trouver l'équation et les caractéristiques du lieu obtenu.
5. Trouver l'équation de l'ellipse de centre (1,2), de foyer (6,2) et passant par le point (4,6).
6. Trouver l'équation de l'ellipse de foyers $(0, \pm 4)$ et passant par $\left(\frac{12}{5}, 3\right)$.

9.1.3 Hyperbole

1. Déterminer les caractéristiques des ellipses suivantes (centre,coordonnées des sommets, équation de l'axe focale, coordonnées des foyers, équations des asymptotes) :
   (a) $H_1 \equiv 16x^2 - 25y^2 = 400$
   (b) $H_2 \equiv 2y^2 - 4 = x^2$
   (c) $H_3 \equiv 4x^2 - 8x - y^2 - 4y - 16 = 0$
   (d) $H_4 \equiv 64x^2 + 64x = 100y^2 - 100y - 1591$
2. Un point se déplace de telle sorte que sa distance au point (0,4) soit les $\frac{4}{3}$ de sa distance à la droite $d \equiv 4y - 9 = 0$. Trouver l'équation et les caractéristiques du lieu.
3. Un point se déplace de telle sorte que le produit de ses distances algébriques aux droites $d \equiv 4x - 3y + 11 = 0$ et $d' \equiv 4x + 3y = -5$ est égale à $\frac{144}{25}$. Trouver l'équation et les caractéristiques du lieu.
4. Trouver l'équation de l'hyperbole ayant pour centre l'origine, pour un des sommets (6,0) et pour équation d'une des asymptotes $AO \equiv 4x - 3y = 0$.

9.1.4 Position relative de droites et de coniques

1. Trouver la pente de la tangente à l'hyperbole $H \equiv 9x^2 - 4y^2 = 36$ au point $\left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.
2. Ecrire les équations des tangentes à l'ellipse $E \equiv x^2 + 4y^2 = 100$ parallèles à la droite $d \equiv 3x + 8y = 7$. Déterminer les coordonnées des points de tangence.
3. Trouver les équations des tangentes à l'ellipse $E \equiv 5x^2 + y^2 = 5$ passant par le point (-2,-1).
4. Trouver l'équation de la tangente et de la normale à la conique $\mathcal{C} \equiv 2x^2 + 3y^2 - 30 = 0$ au point (-3,2).
5. Trouver les points de l'hyperbole $H \equiv x^2 - 2y^2 - 8 = 0$ où la tangente est perpendiculaire à la droite $d \equiv 4x + 5y - 2 = 0$.
6. La parabole $P \equiv y^2 = 4ax$ ($a \in \mathbb{R}$) passe par le point (-8,4). Trouver l'équation de la tangente à cette parabole parallèle à la droite $d \equiv 3x + 2y - 6 = 0$.

9.1.5 Exercices récapitulatifs sur les coniques.

1. Déterminer la nature et les caractéristiques des coniques suivantes, en justifiant complètement la caractéristique des coniques :
   (a) $\mathcal{C} \equiv 9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$.
   (b) $\mathcal{C} \equiv 4y^2 + 10x - 8y + 5 = 0$;
   (c) $\mathcal{C} \equiv 9x^2 + 4y^2 - 6x + 12y - 26 = 0$;
   (d) $\mathcal{C} \equiv 9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y + 89 = 0$;
   (e) $\mathcal{C} \equiv 4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$;
   (f) $\mathcal{C} \equiv y^2 + 8y - 6x + 4 = 0$.

2. On donne les coniques $\mathcal{C} \equiv y^2 + 4x = 0$ et $\mathcal{C}' \equiv 2x^2 = 2\sqrt{3}y$.
   (a) Déterminer les coordonnées des foyers de ces coniques.
   (b) Calculer les coordonnées de leurs points d'intersections et écrire les équations des tangentes en ces points à chacune de ces coniques.
3. Soit la conique d'équation $\mathcal{C} \equiv 5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$.
   (a) Ecrire les équations des tangentes et normales [1] à cette conique en ses points d'abscisse 2.
   (b) Ecrire les équations des tangentes à la conique formant un angle de 60° avec l'axe Ox. Quelles sont les coordonnées des points de tangence ?
4. La tangente et la normale en un point d'une ellipse sont les bissectrices des angles formés par les droites qui joignent ce point aux foyers. Démontrer.
5. Si une droite coupe une hyperbole en M et M', alors elle coupe les asymptotes en P et P' et les segments $[MM']$ et $[PP']$ ont même milieu. Démontrer.

1. La normale en un point d'une conique est la perpendiculaire à la tangente à la conique en ce point.

9.2 Solutions

9.2.1 Parabole

1. (a)
   - $p = 2$;
   - sommet $S : (0, 0)$;
   - axe de symétrie $AS \equiv y = 0$;
   - foyer $F : (1, 0)$
   - équation de la directrice $d \equiv x = -1$
   - orientation : vers les x positifs.

   (b)
   - $p = 4$;
   - sommet $S : (0, 0,)$;
   - axe de symétrie $AS \equiv x = 0$;
   - foyer $F : (0, -2)$
   - équation de la directrice $d \equiv y = 2$
   - orientation : vers les y négatifs.

   (c)
   - équation réduite : $P_3 \equiv (y-3)^2 = 6\,(x+2)$;
   - $p = 3$;
   - sommet $S : (-2, 3)$;
   - axe de symétrie $AS \equiv y = 3$;
   - foyer $F : \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$
   - équation de la directrice $d \equiv x = -\frac{7}{2}$
   - orientation : vers les x positifs.

   (d)
   - équation réduite : $P_4 \equiv (x+4)^2 = -2\left(y - \frac{1}{2}\right)$;
   - $p = 1$;
   - sommet $S : \left(-4, \frac{1}{2}\right)$;
   - axe de symétrie $AS \equiv x = 4$;
   - foyer $F : (-4, 0)$
   - équation de la directrice $d \equiv y = 1$
   - orientation : vers les y négatifs.

2. $P \equiv x^2 = -\frac{16}{3}y$.
3. $P \equiv (y-2)^2 = 8(x-3)$.
4. $P \equiv (y+2)^2 = 8(x-4)$.
5. $P \equiv (x-2)^2 = 2(y-3)$.

9.2.2 Ellipse

1. (a)
   - $a = 5$, $b = 3$ et $c = 4$;
   - centre $C : (0, 0)$;
   - sommets $A : (0, 5)$, $A' : (0, -5)$, $B : (3, 0)$ et $B' : (-3, 0)$;
   - axe focal $x = 0$
   - foyers $F : (0, 4)$ et $F' : (0, -4)$.

   (b)
   - $a = 8$, $b = 4$ et $c = 4\sqrt{3}$;
   - centre $C : (0, 0)$;
   - sommets $A : (8, 0)$, $A' : (-8, 0)$, $B : (0, 4)$ et $B' : (0, -4)$;
   - axe focal $y = 0$
   - foyers $F : \left(4\sqrt{3}, 0\right)$ et $F' : \left(-4\sqrt{3}, 0\right)$.

   (c)
   - équation réduite : $E_3 \equiv \dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{49} = 1$;
   - $a = 7$, $b = 2$ et $c = 3\sqrt{5}$;
   - centre $C : (3, 2)$;
   - sommets $A : (3, 9)$, $A' : (3, -5)$, $B : (1, 2)$ et $B' : (5, 2)$;
   - axe focal $x = 3$
   - foyers $F : \left(3, 2 + 3\sqrt{5}\right)$ et $F' : \left(3, 2 - 3\sqrt{5}\right)$.

   (d)
   - équation réduite : $E_4 \equiv \dfrac{\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2}{64} + \dfrac{(y+3)^2}{25} = 1 = 1$;
   - $a = 8$, $b = 5$ et $c = \sqrt{39}$;
   - centre $C : \left(-\dfrac{1}{2}, -3\right)$;
   - sommets $A : \left(\dfrac{15}{2}, -3\right)$, $A' : \left(-\dfrac{17}{2}, -3\right)$, $B : \left(-\dfrac{1}{2}, 2,\right)$ et $B' : \left(-\dfrac{1}{2}, -8,\right)$;
   - axe focal $y = -3$
   - foyers $F : \left(-\dfrac{1}{2} + \sqrt{39}, -3\right)$ et $F' : \left(-\dfrac{1}{2} - \sqrt{39}, -3\right)$.

2. $E \equiv \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{16} = 1$.

3. $E \equiv \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$, $a = 8$, $b = 4\sqrt{3}$ et $c = 4$.

4. $E \equiv \dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{7} = 1$, $C : (1, 2)$, $a = 4$, $b = \sqrt{7}$ et $c = 3$.

5. $E \equiv \dfrac{(x-1)^2}{45} + \dfrac{(y-2)^2}{20} = 1$.

6. $E \equiv \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{9} = 1$.

9.2.3 Hyperbole

1. (a)
   - $a = 5$, $b = 4$ et $c = \sqrt{41}$
   - centre $C : (0, 0)$;
   - sommets $A : (5, 0)$ et $A' : (-5, 0)$;
   - axe focale $x = 0$;
   - foyers $F : \left(\sqrt{41}, 0\right)$ et $F' \left(-\sqrt{41}, 0\right)$;
   - asymptotes : $AO \equiv y = \pm\frac{4}{5}x$

   (b)
   - $a = \sqrt{2}$, $b = 2$ et $c = \sqrt{6}$
   - centre $C : (0, 0)$;
   - sommets $A : \left(0, \sqrt{2}\right)$ et $A' : \left(0, -\sqrt{2}\right)$;
   - axe focale $y = 0$;
   - foyers $F : \left(0, \sqrt{6}\right)$ et $F' \left(0, -\sqrt{6}\right)$;
   - asymptotes : $AO \equiv y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

   (c)
   - équation réduite $H_3 \equiv \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$;
   - $a = 2$, $b = 4$ et $c = 2\sqrt{5}$
   - centre $C : (1, -2)$;
   - sommets $A : (3, -2,)$ et $A' : (-1, -2)$;
   - axe focale $y = -2$;
   - foyers $F : \left(2\sqrt{5}, -2\right)$ et $F' \left(-2\sqrt{5}, -2\right)$;
   - asymptotes : $AO_1 \equiv y = 2x - 4$ et $AO_2 \equiv y = -2x$

   (d)
   - équation réduite $H_4 \equiv \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)2}{16} - \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{25} = 1$;
   - $a = 4$, $b = 5$ et $c = \sqrt{41}$
   - centre $C : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
   - sommets $A : \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ et $A' : \left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$;
   - axe focale $x = -\frac{1}{2}$;
   - foyers $F : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{41}\right)$ et $F' \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{41}\right)$;
   - asymptotes : $AO_1 \equiv y = \frac{4}{5}x + \frac{9}{10}$ et $AO_2 \equiv y = -\frac{4}{5}x + \frac{1}{10}$

2. $H \equiv \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$, axe focal Oy, $a = 3$, $b = \sqrt{7}$, $c = 4$ et $AO \equiv y = \pm\frac{3\sqrt{7}}{7}x$.

3. $H \equiv \frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$, $C : (-2, 1)$, axe focal Ox, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ et $AO \equiv y - 1 = \pm\frac{4}{3}(x + 2)$

4. $H \equiv \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

9.2.4 Position relative de droites et de coniques

1. $m\dfrac{9\sqrt{5}}{10}$.
2. $t \equiv y = -\dfrac{3}{8}x \pm \dfrac{25}{4}$.
3. $t_1 \equiv 3y + 2x + 7 = 0$ et $t_2 \equiv y = 2x + 3$.
4. $t \equiv y = x + 5$ et $n \equiv y = -x - 1$.
5. $A_1 : \left(\dfrac{10\sqrt{34}}{17}, \dfrac{4\sqrt{34}}{17}\right)$ et $A_2 : \left(-\dfrac{10\sqrt{34}}{17}, -\dfrac{4\sqrt{34}}{17}\right)$.
6. $t \equiv y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{3}$.

9.2.5 Exercices récapitulatifs sur les coniques.

1. (a) Parabole d'axe focal parallèle à Ox, dirigé vers les $x < 0$, $p = \dfrac{5}{4}$, $S : \left(-\dfrac{1}{10}, 1\right)$, $F : \left(-\dfrac{29}{40}, 1\right)$ et $d \equiv x = \dfrac{21}{40}$.

   (b) Ellipse d'axe focal parallèle à Oy, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$ et $C : \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{3}{2}\right)$.

   (c) Hyperbole d'axe focal parallèle à Oy, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $C : (1, 2)$ et $AO \equiv y - 2 = \pm\dfrac{3}{4}(x - 1)$.

2. (a) $F_1 : (-1, 0)$ et $F_2 : \left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

   (b) $A_1 : (0, 0)$ et $A_2 : \left(-\sqrt[3]{12}, 2\sqrt[6]{12}\right)$.
   Tangentes à $\mathcal{C}$: en A_1 : $t_1 \equiv x = 0$ et en A_2 : $t_2 \equiv 2\sqrt[6]{12}y = -2(x - \sqrt[3]{12})$.
   Tangentes à $\mathcal{C}'$: en A_1 : $t_1 \equiv y = 0$ et en A_2 : $t_2 \equiv -\sqrt[3]{12}x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(y + 2\sqrt[6]{12})$.

3. (a) $t \equiv y = \pm\left(-\dfrac{2}{3}x + 3\right)$ et $n \equiv y = \pm\dfrac{3}{2}x \mp \dfrac{4}{3}$.

   (b) $t \equiv y = \sqrt{3}x \pm 4\sqrt{2}$ et $A : \left(\mp\dfrac{9\sqrt{6}}{8}, \pm\dfrac{5\sqrt{2}}{8}\right)$.

4. Voir cours oral.
5. Voir cours oral.

10

Les lieux géométriques

A LA FIN DU CHAPITRE IL FAUDRA :

			Degré d'acquisition		
	Compétence	Exercices	Help	Bof	OK
1	Déterminer l'équation d'un lieu géométrique par la méthode analytique	1-3-4-5			
2	Déterminer l'équation d'un lieu géométrique par la méthode des génératrices	2-6-7-8-9			

10.1 Exercices

1. On donne deux points fixes A et B. Quel est le lieu des points P qui sont deux fois plus loin de B que de A ?
2. Déterminer le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'un cercle donné sur les cordes issues d'un même point de ce cercle.
3. Soit un triangle équilatéral ABC. Déterminer le lieu des points P vérifiant la condition :
$$\left\|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$$
4. Déterminer le lieu des points P tels que
$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \frac{5}{4}\,|AB|^2$$
5. $ABCD$ est un carré. Déterminer le lieu des points tels que
$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}).(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}) = |AB|^2$$
6. On donne la parabole $\mathcal{P} \equiv y = (x+1)^2$. Déterminer le lieu des milieux des cordes découpées par la parabole sur des droites comprenant l'origine des axes.
7. Déterminer le lieu géométrique des milieux des segments de longueur constante dont les extrémités glissent sur les côtés d'un angle droit.
8. Soit un triangle variable OAB dont le sommet O est à l'origine et le côté AB (de longueur constante L) sur la droite d'équation $y = b$. Déterminer l'équation cartésienne du lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle, ainsi que sa nature.
9. Soit $OABC$ un parallélogramme dont la diagonale OB est perpendiculaire au côté OA. Un segment de droite $[DE]$ de longueur 2 se déplace parallèlement à OA, tandis que son extrémité D se déplace sur OB. Quel est le lieu des points d'intersection de AE et CD.

10.2 Solutions

1. $d(P,B) = 2d(P,A) \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$
2. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$
3. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$
4. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{3}{2}$
5. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$
6. $\left(y+\frac{1}{2}\right) = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
7. $x^2 + y^2 = \frac{L^2}{4}$ où L est la longueur du segment[1].
8. $\left(x-\frac{L}{4}\right)^2 = -b\left(y-\frac{L^2}{16b}\right)$
9. $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{\alpha}\left(x+\frac{\alpha}{8}\right)$ où α est l'abscisse du point C.

1. Il peut être intéressant d'étudier le cas où le point se trouve au tiers du segment !

Huitième partie

6SUAA7 - Nombres complexes

11

Nombres complexes

A la fin du chapitre il faudra :						
			Degré d'acquisition		
	Compétence	Exercices	Help	Bof	OK
1	Appliquer les règles de calcul algébrique sur les nombres complexes	11.1.1-1 à 5			
2	Utiliser la forme trigonométrique des nombres complexes pour les multiplier, les diviser ou déterminer leur racine $n^{\text{ème}}$	11.1.1-6 à 9			
3	Déterminer le lien entre opérations complexes et transformations géométriques du plan de Gauss	11.1.2			

11.1 Exercices

11.1.1 Nombres complexes

1. Simplifier et réduire les expressions suivantes :

   (a) $(2+3i)+(1+2i)$

   (b) $(2i+3)+(-5i+1)-(3-2i)$

   (c) $(4+3i)(3+4i)$

   (d) $(2-3i)^2$

   (e) $(\sqrt{3}-i)^3$

   (f) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

   (g) $\dfrac{4-i}{2-i}+\dfrac{4+i}{2+i}$

   (h) $\dfrac{z^2+z+1}{z^2-z+1}$ si $z=2-i$

2. Calculer les racines carrées de z si

   (a) $z=-i$

   (b) $z=-8-6i$

   (c) $z=11-60i$

3. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$

   (a) $x^2+2x+2=0$

   (b) $ix^2-(5i+2)x+5(i+1)=0$

   (c) $(-3+i)x^2+(5i-1)x=-2$

   (d) $x^2-2(i+1)+(i-1)x=0$

   (e) $(2i+1)z+z^2+2i=0$

   (f) $2x^2-7x+5=5i$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$

   (a) $2z+i\bar{z}=9$

   (b) $\begin{cases} 3z_1+z_2=1-7i \\ iz_1+2z_2=11i \end{cases}$

5. On donne $P(z)=z^3+9iz^2+2(6i-11)z-3(4i+12)$

   (a) Montrer que $P(z)$ admet une racine réelle que l'on déterminera ;

   (b) Factoriser $P(z)$.

6. Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique et les placer dans le plan de Gauss.

   (a) $z=1+i$

   (b) $z=\sqrt{3}-3i$

   (c) $z=3i-2$

7. Calculer, en utilisant la formule de de Moivre, le module et l'argument de

   (a) $z=(1+i)(\sqrt{3}-i)$

   (b) $z=-\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$

   (c) $z=\dfrac{(1-i)^3}{4(i+1)^4}$

   (d) z^{20} si $z=\dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$

8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ et représenter les solutions dans le plan de Gauss.
   (a) $z^2 = i - 1$
   (b) $z^4 = \dfrac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$
   (c) $z^3 = -6\sqrt{3}(1+i)$
9. ***Exercices "exotiques"***
   (a) Soit $z = x + iy$ et $z' = \dfrac{z-i}{z+1}$. Trouver le lieu des points z tel que z' est réel.
   (b) Résoudre $z^6 + (1-2i)z^3 - 2i = 0$
   (c) Calculer le module et l'argument de $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$ et $z_1.z_2$. En déduire la valeur exacte de $\cos \dfrac{\pi}{12}$

11.1.2 Transformation du plan complexe

Trouver, à l'aide d'une latte et d'un compas, l'image du point $P(z)$ par la transformation t si

1. $z = 1 + i$ et t est la translation de vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$;
2. $z = 2 - i$ et t est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$;
3. $z = 2i - 1$ et t est l'homothétie de centre O et de rapport 2 ;
4. $z = 3 + 2i$ et t est la rotation de centre $A(-1,-2)$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$;
5. $z = 1 + i$ et t est l'homothétie de centre $B(-1,2)$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$;
6. $z = 4 - 3i$ et t est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ suivi de l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2}$;
7. $z = 2 + 3i$ et t est la rotation de centre $C(2,2)$ et d'angle $-\dfrac{5\pi}{6}$ suivi de l'homothétie de centre $A(-1,-2)$ et de rapport $\dfrac{2}{3}$ suivi de la translation de vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

Vérifier à chaque fois algébriquement le résultat.

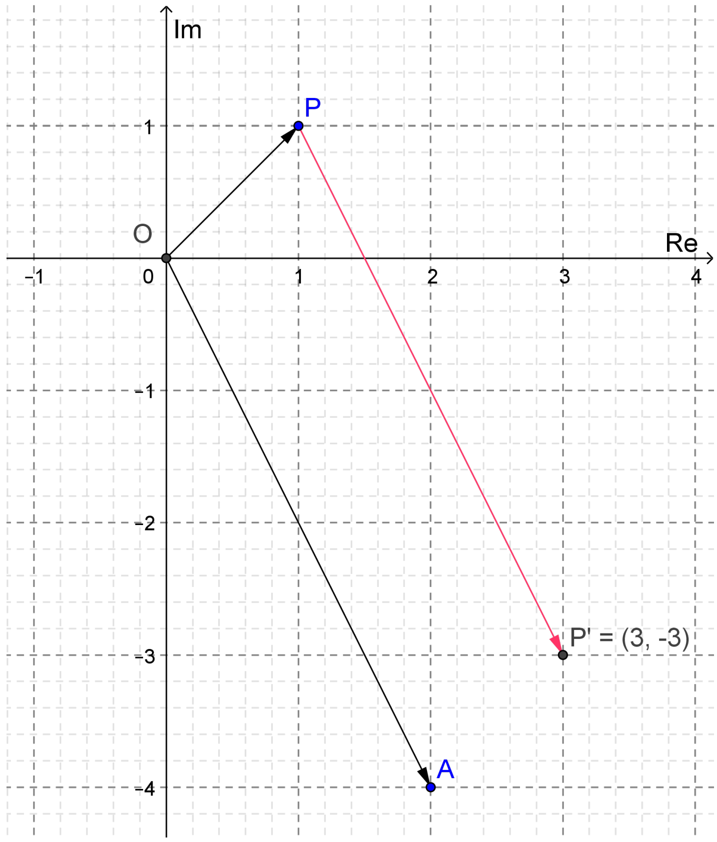
11.2 Solutions

11.2.1 Nombres complexes

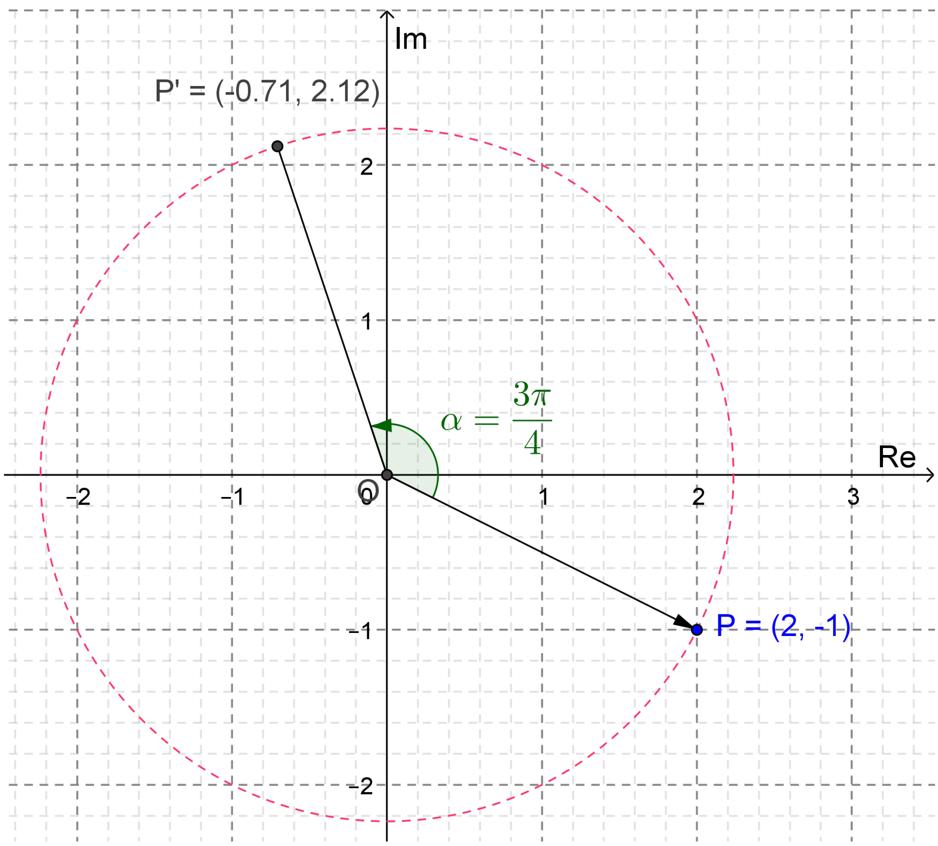
1. (a) $3+5i$
   (b) $1-i$
   (c) $25i$
   (d) $-5-12i$
   (e) $-8i$
   (f) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$
   (g) $\dfrac{18}{5}$
   (h) $\dfrac{27+8i}{13}$
2. (a) $u=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$
   (b) $u=\pm(1-3i)$
   (c) $u=\pm(6-5i)$
3. (a) $S:\{-1+i,-1-i\}$
   (b) $S:\{3-i,2-i\}$
   (c) $S:\left\{i-1,\dfrac{1+2i}{5}\right\}$
   (d) $S:\{2,-1-i\}$
   (e) $S:\{-2i,-1\}$
   (f) $S:\left\{3+i,\dfrac{1}{2}-i\right\}$
4. (a) $S:\{6-3i\}$
   (b) $S:\{(1-4i,-2+5i)\}$
5. (a) $P(a)=0\Leftrightarrow a=-2\,;$
   (b) $P(z)=(z+2)(z+6i-2)(z+3i).$
6. (a) $z=\sqrt{2}\text{ cis }\dfrac{\pi}{4}$
   (b) $z=2\sqrt{3}\text{ cis }\dfrac{-\pi}{3}$
   (c) $z=\sqrt{13}\text{ cis }(2,159)$
7. (a) $z=2\sqrt{2}\text{ cis }\dfrac{\pi}{12}$
   (b) $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{ cis }\dfrac{11\pi}{12}$
   (c) $z=\dfrac{\sqrt{2}}{8}\text{ cis }\dfrac{-7\pi}{4}$
   (d) $z^{20}=-1$
8. (a) $z=\sqrt[4]{2}\text{ cis }\left(\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\right)\ (k\in\mathbb{Z})$
   (b) $z=\text{ cis }\left(\dfrac{-\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$
   (c) $z=\sqrt{6}\text{ cis }\left(\dfrac{5\pi}{12}+k\dfrac{2\pi}{3}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$
9. ***Exercices "exotiques"***
   (a) Le lieu est la droite d'équation $y=x+1$
   (b) Résoudre $S:\left\{\text{ cis }\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}\right),\sqrt[3]{2}\text{ cis }\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}\right)\right\}\ (k\in\mathbb{Z})$
   (c) $z_1=\sqrt{2}\text{ cis }\dfrac{\pi}{4}, z_2=2\text{ cis }\dfrac{-\pi}{6}$ et $z_1.z_2=2\sqrt{2}\text{ cis }\dfrac{\pi}{12}.\ \cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

11.2.2 Transformation du plan complexe

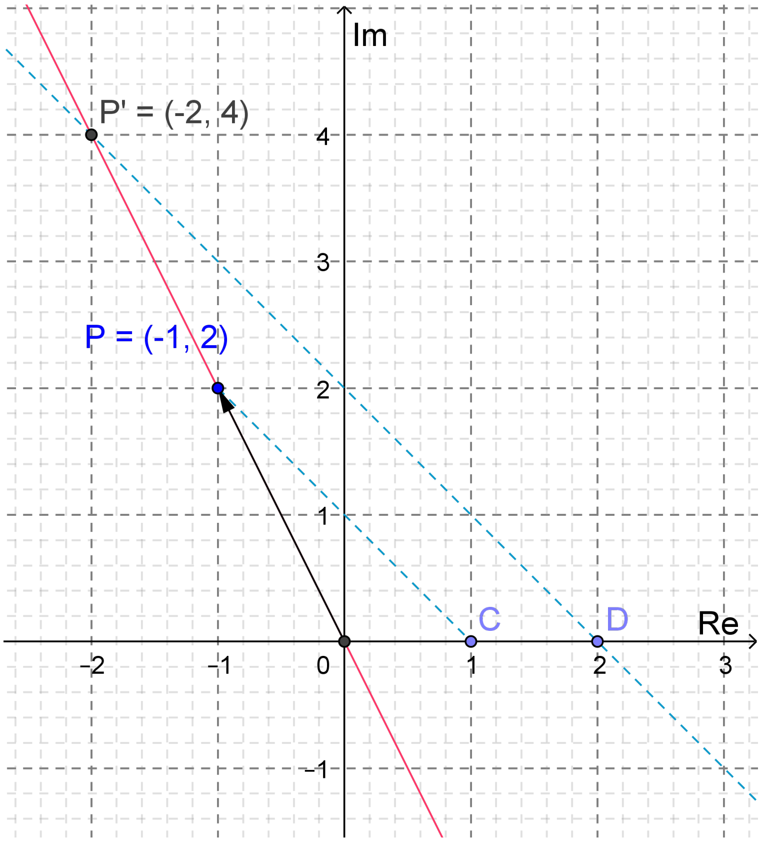
1.



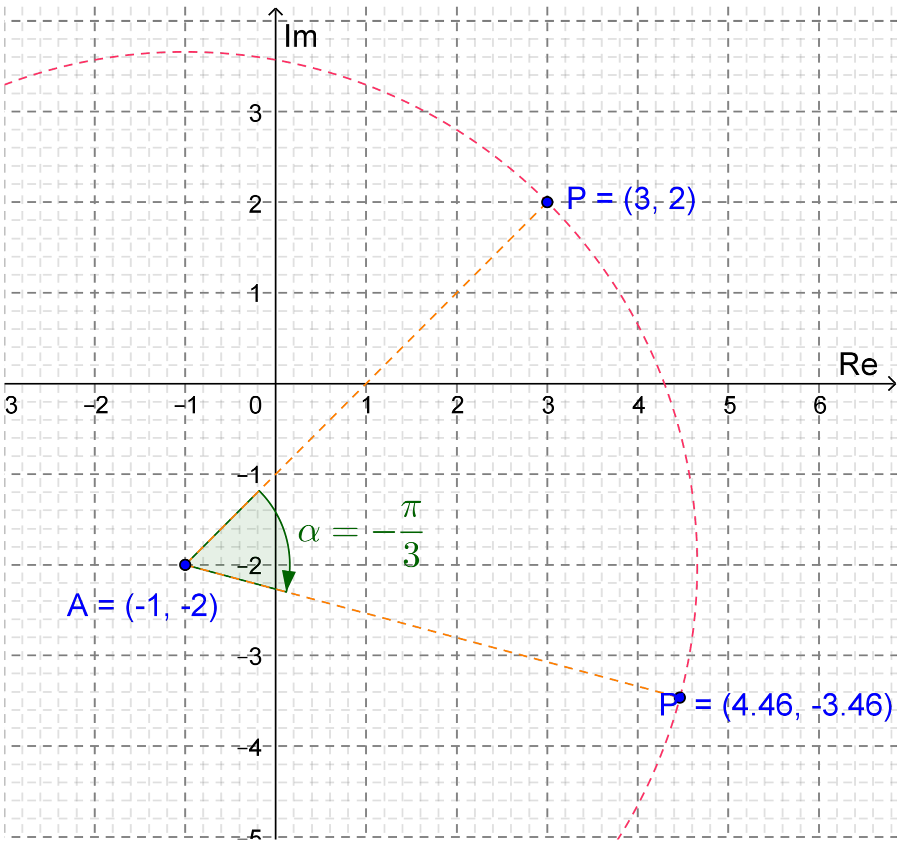
2.



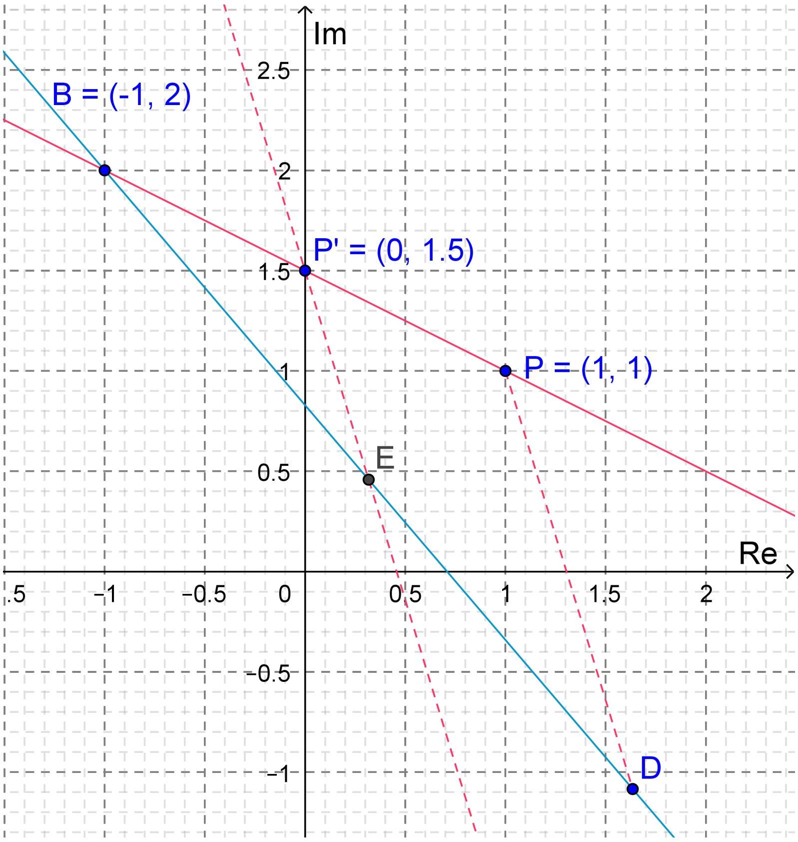
3.


Im
P' = (-2, 4)
P = (-1, 2)
C
D
Re
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
1
2
3

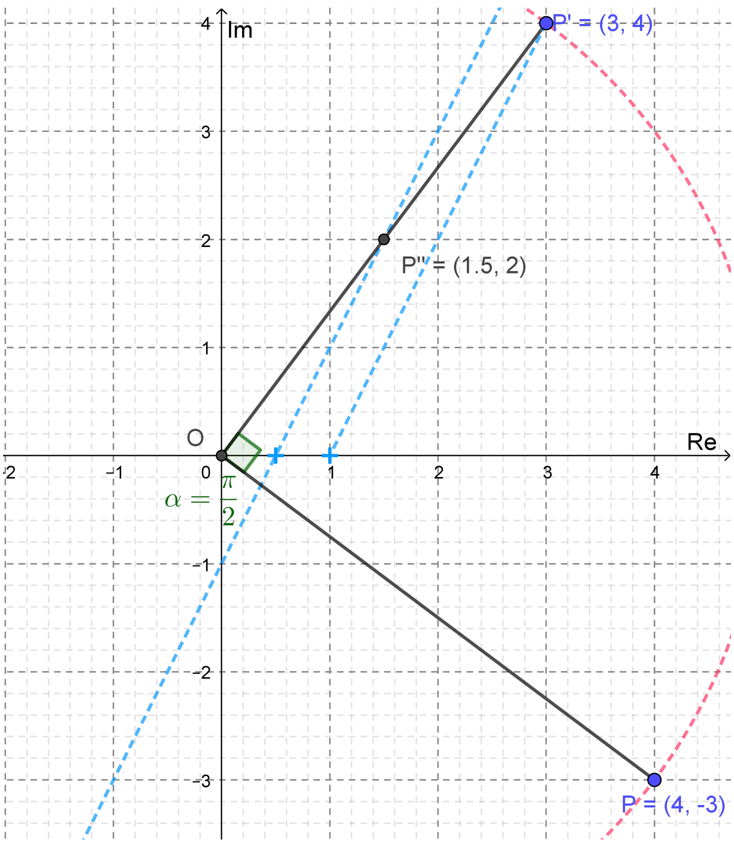
4.


Im
P = (3, 2)
Re
$\alpha = -\frac{\pi}{3}$
A = (-1, -2)
P' = (4.46, -3.46)
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
1
2
3
4
5
6

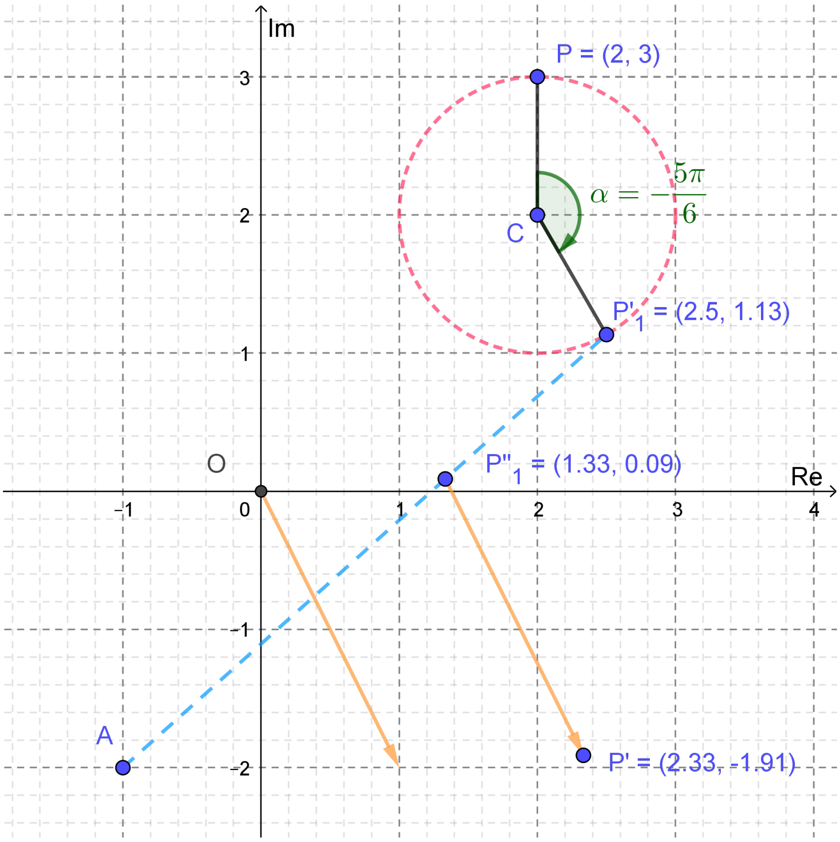
5.



6.



7.


Im
P = (2, 3)
$\alpha = -\frac{5\pi}{6}$
C
P'1 = (2.5, 1.13)
O
P"1 = (1.33, 0.09)
Re
A
P' = (2.33, -1.91)
-1
0
1
2
3
4
3
2
1
-1
-2