La démonstration de la formule de Cardan

Historique

Jérôme Cardan est né à Pavie le 24 septembre 1501. C'est un mathématicien, un philosophe, un astrologue, un inventeur et un médecin italien.

Il est le premier à introduire des idées générales à la théorie des équations algébriques. Sa méthode de résolution des équations du troisième degré a pour conséquence l'émergence des nombres imaginaires, qui deviendront nos nombres complexes au XIXe siècle.

Son nom est également associé à une méthode de stéganographie, la grille de Cardan, utilisant une grille à trous masquant une partie d'un texte pour révéler les mots utiles. Elle deviendra plus tard une méthode de cryptographie quand la grille pourra être déplacée d'un quart de tour (technique popularisée, par exemple, dans le roman Mathias Sandorf de Jules Verne).

Cardan est le premier à décrire des hypocycloïdes dans "*De proportionibus*". En 1539, il explique avec des exemples concrets dans "*Practica arithmetice*" et "*Mesurandi singularis*", comment calculer le volume d'un tonneau, problème auquel plusieurs mathématiciens, dont Johannes Kepler, ont apporté des solutions au fil du temps.

En mécanique, il est l'éponyme - mais pas l'inventeur - de la suspension à cardan, un système mécanique permettant le gyroscope libre, que Cardan modernise pour donner naissance au joint de cardan, ancêtre du joint de transmission.

Une autre découverte de Cardan améliore la chambre noire décrite et dessinée par Léonard de Vinci en 1515. Il remplace le petit trou de cette chambre par une lentille de verre, ce qui permet de dessiner les perspectives avec exactitude. Il a ainsi inventé l'objectif, composante fondamentale des futures chambres photographiques.

Il invente et décrit en partie d'autres dispositifs mécaniques, tels que la serrure à combinaison, des mécanismes d'horlogerie et des norias. Dans le domaine encore balbutiant de la physique, il démontre la relation entre les densités de l'air et de l'eau et ouvre un débat de fond sur le mouvement des projectiles. Parmi d'autres affirmations étonnantes, malgré l'absence de démonstration, il soutient que l'atome est composé de particules encore plus petites, car il peut "*se rompre*".

Il a également avancé le premier exposé du calcul des probabilités dans un livre intitulé "*Liber de ludo aleae*" (Livre du jeu de hasard), écrit sur près de quarante années et achevé vers 1564, mais non publié jusqu'en 1663 pour des raisons obscures. Le livre contient des analyses de plusieurs méthodes de tricheries et des conseils pour s'en protéger. Il y est question d'"*égalité*" au sens mathématique, mot qui pour Cardan équivaut à "*probabilité*" et de "*circuit ou révolutions*", concept qui semble correspondre à l'ensemble des cas possibles ou "*espace d'échantillon*". Au chapitre XIV, Cardan donne ce que certains historiens et spécialistes considèrent comme la première définition de la probabilité classique, ou probabilité mathématique : "*Il y a donc une règle générale, c'est-à-dire que nous devons considérer le circuit tout entier, et quel résultat peut sortir de tel nombre de tirage de cartes, et comparer ce nombre avec le nombre qui reste du circuit, et en accord avec cette proposition, établir les paris pour jouer dans des conditions équitables*".

Il meurt à Rome le 21 septembre 1576.

Equation du troisième degré

La résolution d'équation du troisième degré peut toujours se ramener à la résolution d'équation du type $x^3 = px + q$ (auxquelles Cardan s'est intéressé).
Si l'on considère l'équation générale du troisième degré $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ et que l'on fait le changement de variable $X = x + \frac{a}{3}$, on a successivement :

$$\begin{aligned}
& x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(X - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(X - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \\
\Leftrightarrow\ & X^3 - 3X^2\frac{a}{3} + 3X\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + a\left[X^2 - 2\frac{a}{3}X + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right] + b\left(X - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \\
\Leftrightarrow\ & X^3 - \cancel{aX^2} + X\frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{27} + \cancel{aX^2} - 2\frac{a^2X}{3} + \frac{a^3}{9} + b - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
\Leftrightarrow\ & X^3 + X\left(\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3}\right) - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + b - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
\Leftrightarrow\ & X^3 + X\underbrace{\left(-\frac{a^2}{3}\right)}_{-p} + \underbrace{\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + b + c\right)}_{-q} = 0
\end{aligned}$$

et l'on est bien ramener à une équation du type

$$x^3 = px + q$$

Méthode Cardan

L'idée de Cardan est de remplacer l'inconnue x par deux autres inconnues u et v telles que $x = u + v$.
Il remarque en effet que

$$\begin{aligned}
(u+v)^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\
(u+v)^3 &= 3uv(u+v) + u^3 + v^3
\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} 3uv = p \\ u^3 + v^3 = q \end{cases}$$

on constate que $u + v$ est bien solution de l'équation

$$x^3 = px + q$$

Dès lors, trouver la solution de cette équation consiste à trouver deux nombres u et v tels que

$$\left\{\begin{array}{l} 3uv = p \\ u^3 + v^3 = q \end{array}\right.$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l} u^3v^3 = \dfrac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = q \end{array}\right.$$

ou encore à chercher deux nombres u^3 et v^3 dont on connait la somme (S) est le produit (P).
En se ramenant à la théorie des équations du second degré, ces nombres (Y) sont solutions de l'équation

$$Y^2 - SY + P = 0$$

Dans cette équation, $S = q$ et $P = \dfrac{p^3}{27}$.
La résolution de l'équation du troisième degré se ramène donc à la résolution d'une équation du second degré. En résolvant cette équation, on obtient :

$$\Delta = S^2 - 4P$$

et

$$Y_{1,2} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

En remplaçant S et P par leurs valeurs, on obtient

$$u^3, v^3 = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4\dfrac{p^3}{27}}}{2}$$

ou

$$u, v = \sqrt[3]{\frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4\dfrac{p^3}{27}}}{2}}$$

ou encore

$$u, v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Finalement un solution de l'équation $x^3 = px + q$ est donc

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \quad \text{si } \; 27q^2 - 4p^3 \geq 0$$

Cardan remarquera cependant que, dans certains cas $27q^2 - 4p^3 < 0$ ce qui entrainera la nécessité d'introduire le nombre i !

Sources

1. https :\\fr.wikipedia.org\wiki\Jérôme_Cardan
2. https :\\fr.wikipedia.org\wiki\Méthode_de_Cardan