Coordonnées polaires : Solutions

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points $A(-2, -30°)$ et $B(3, 750°)$

$A : \begin{cases} x = -2\cos(-30) \\ y = -2\sin(-30) \end{cases} \rightarrow A : (-\sqrt{3}, 1)$

$B : \begin{cases} x = 3\cos 750° \\ y = 3\sin 750° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\cos 30° \\ y = 3\sin 30° \end{cases}$

$\Rightarrow B : \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

2. Déterminer les coordonnées polaires des points $C(-3, 2)$ et $D(-1, -\sqrt{3})$.

$C : \begin{cases} r = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \\ \tan\theta = \frac{2}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \simeq -33{,}7° \;(+2k\pi) \quad \text{AR car } C \in Q_{II} \\ \theta \simeq 146{,}3° \end{cases}$

$\rightarrow C : (\sqrt{13} \,;\, 146{,}3°)$

$D : \begin{cases} r = \sqrt{1+3} \;\; 2 \\ \tan\theta = \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} \;\; \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{\cancel{6}\,3} \qquad\qquad \text{AR car } D \in Q_{III} \\ \theta = \cancel{\frac{7\pi}{6}} \;(+2k\pi) \;\; \frac{5\pi}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow D\left(2, \cancel{\frac{7\pi}{6}}\right) \;\; \frac{5\pi}{3}$

3. Etudier les fonctions polaires suivantes :

(a) Le limaçon de Pascal : $r = -1 + 2\cos\theta$

- dom_f : $\mathbb{R}$

- période : 2π

- symétrie : $f(\theta) = f(-\theta) \Rightarrow$ sym % axe polaire

$\Rightarrow$ étude sur $[0, \pi]$

- intersection avec les axes :

$\cap$ axe polaire : $\theta = 0 \Rightarrow r = 1$ (point A)

$\theta = \pi \Rightarrow r = -3$ (point G)

$\cap$ axe $\perp$ axe polaire :

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = -1$ (point E)

- variations :
  - $r'(\theta) = -2\sin\theta$

- tableau de variations :

θ	0		π
r'	0		0
r	1	$\searrow$	-3
$\tan\gamma$	$\pm\infty$		$\pm\infty$
	(A)		(G)

– Points particuliers (voir dessin) :

$\underline{A}$: $\theta = 0$, $r = 1$, $\tan \gamma = \pm\infty \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$

$\underline{B}$: tangente horizontale $\Rightarrow y'(\theta) = 0$

$\Leftrightarrow r' \sin\theta + r\cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin\theta\sin\theta + (-1+2\cos\theta)\cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin^2\theta - \cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$

$\Leftrightarrow -2(1-\cos^2\theta) - \cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\theta - \cos\theta - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 32 = 33 \Rightarrow \cos\theta_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$\Rightarrow \theta_1 \simeq (\pm) 32{,}53°$ et $\theta_2 \simeq (\pm) 126{,}4°$

↳ point F

$r \simeq 0{,}686$

$\tan\gamma \simeq 0{,}64 \Rightarrow \gamma \simeq 147°$

$\underline{C}$: $r = 0 \Leftrightarrow -1 + 2\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = (\pm) 60°$

$\underline{D}$: tangente verticale $\Rightarrow x'(\theta) = 0$

$\Leftrightarrow r'\cos\theta - r\sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin\theta\cos\theta - (-1+2\cos\theta)\sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow -4\sin\theta\cos\theta + \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \sin\theta\,(1 - 4\cos\theta) = 0$

↙ ↘

$\theta = k\pi$ (points A & G)

$\theta = (\pm) 75{,}52°$

$r = -0{,}5$

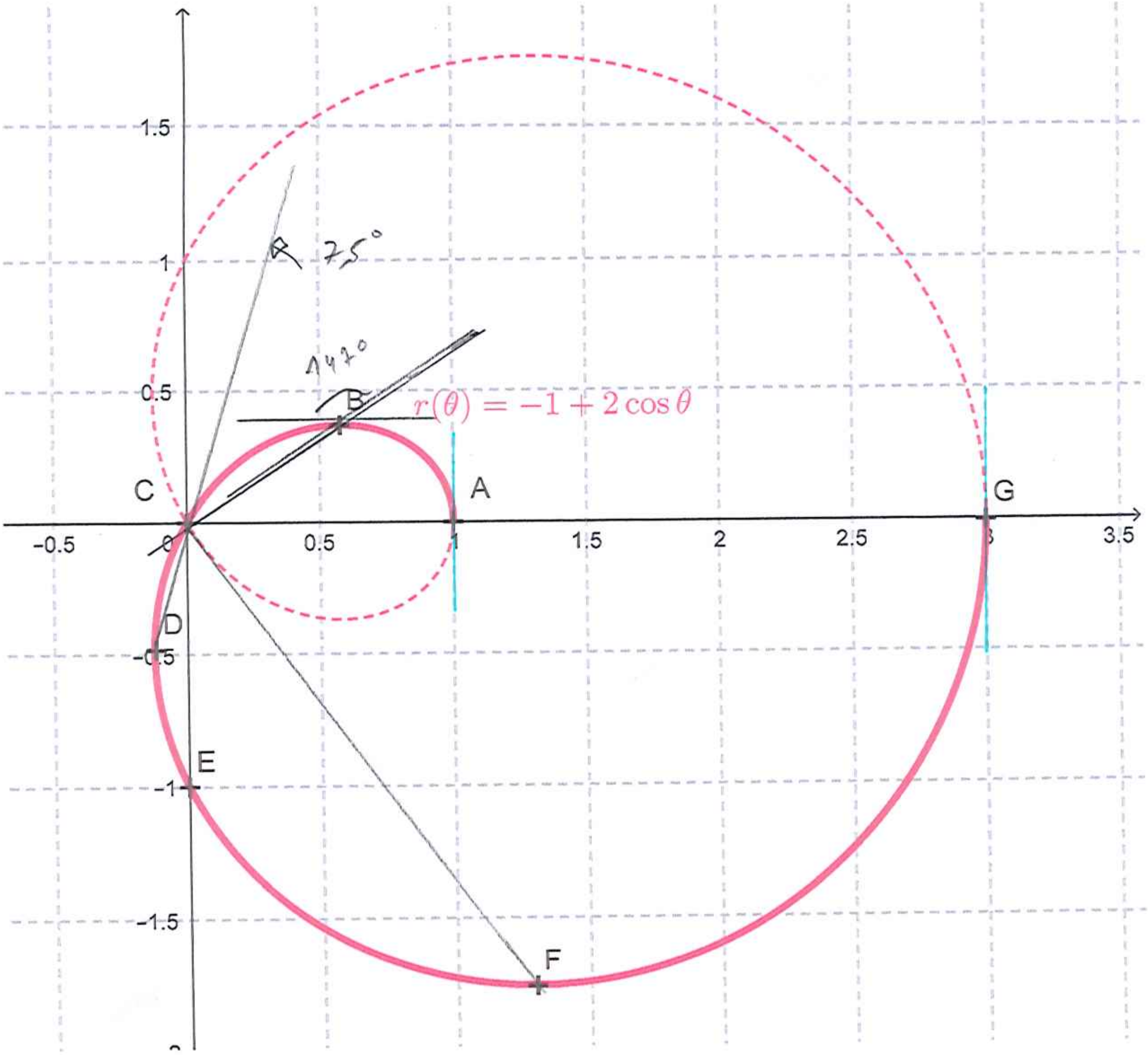
$\underline{E}$: $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $r = -1$

$\underline{F}$: cf B $\quad \theta = 126,4°$

$r \simeq -2,19$

G : $\theta = \pi \Rightarrow r = -3$

et $\tan \gamma = \pm \infty \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$



75°
147°
$r(\theta) = -1 + 2\cos\theta$
A
B
C
D
E
F
G
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5

(b) Le lemniscate de Bernouilli : $r = \sqrt{\cos 2\theta}$

- dom_f :

CE : $\cos 2\theta \geq 0 \iff -\frac{\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$

$\iff -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow dom_f : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

- période : π

- symétrie : $\cos(-2\theta) = \cos 2\theta \Rightarrow$ sym % axe polaire

$\Rightarrow$ étude sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

- intersection avec les axes :

$\theta = 0 \Rightarrow r = 1$ (point c)

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \nexists$

– variations :

– $r'(\theta) = \dfrac{-2\sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}} = -\dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$

– tableau de variations :

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
r'	0	$-$	$\pm\infty$	$+$	0
r	1	$\searrow$	0		
$\tan\gamma$	$\pm\infty$		0		

– Points particuliers (voir dessin) :

$\underline{A}$: $r = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\tan \gamma = 0$

$\underline{B}$: tgte horizontale $\rightarrow$ $y'(\theta) = 0$

$\Rightarrow r' \sin\theta + r\cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\ }} \sin\theta + \sqrt{\ } \cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow -\sin 2\theta \sin\theta + \cos 2\theta \cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow \cos 3\theta = 0 \quad \Leftrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{2}$

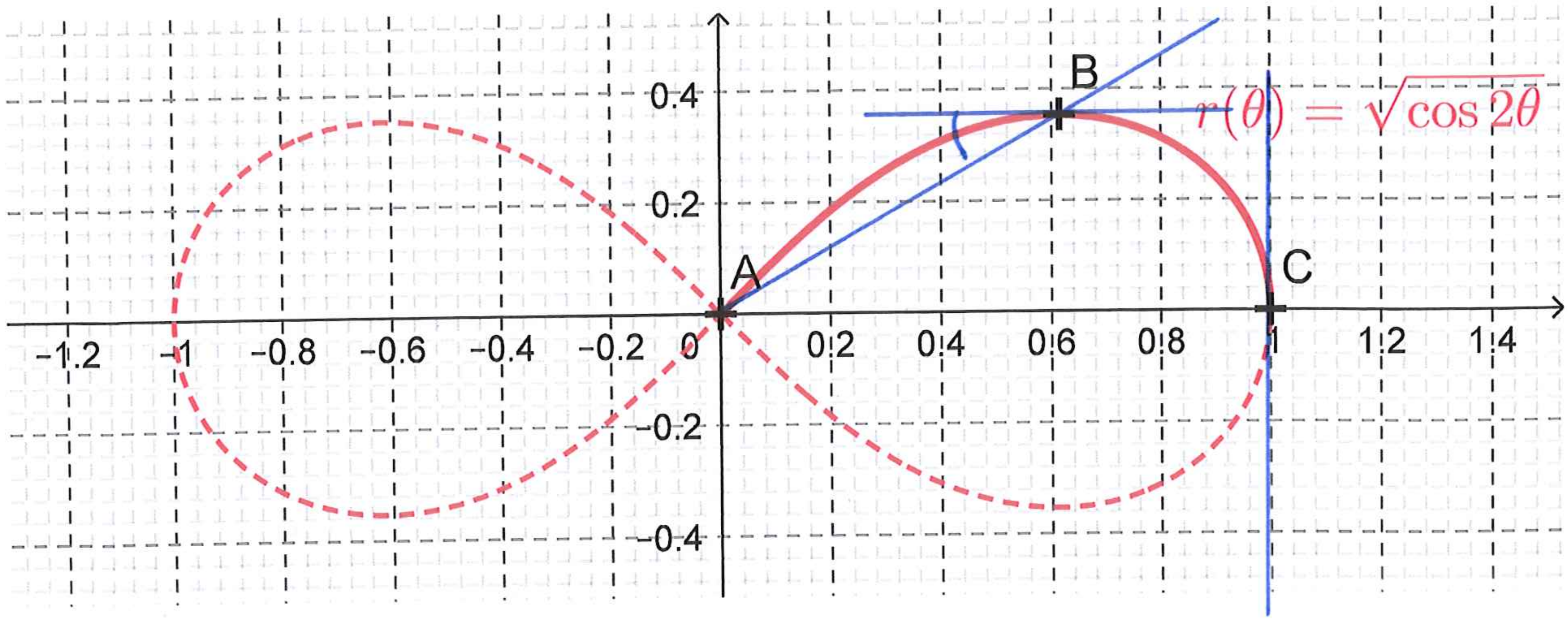
$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et $\tan\gamma = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{-\sqrt{3}}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \gamma = -\frac{\pi}{6}$

C : $r = 1 \Rightarrow \theta = 0$ et $\tan\gamma = \pm\infty \rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$


$r(\theta) = \sqrt{\cos 2\theta}$
A
B
C
-1.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0.4
0.2
-0.2
-0.4

(c) $r = \dfrac{1}{\cos\theta} - 2$

- dom_f :

$dom_f : \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \{ k \in \mathbb{Z} \}$

- période : 2π

- symétrie : $\cos\theta = \cos(-\theta) \to$ sym /. axe polaire

$\Rightarrow$ étude $[0, \pi]$

- intersection avec les axes :

$\theta = 0 \Rightarrow r = -1 \Rightarrow$ pt C

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ imp (branche infinie)

$\theta = \pi \Rightarrow r = -3$ (point D)

– variations :

– $r'(\theta) = \dfrac{-\sin\theta}{\cos^2\theta}$

– tableau de variations :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
r'	0	$-$	AV	$-$	0
r	-1	$\searrow$	AV	$\searrow$	-3
tang	∞				∞

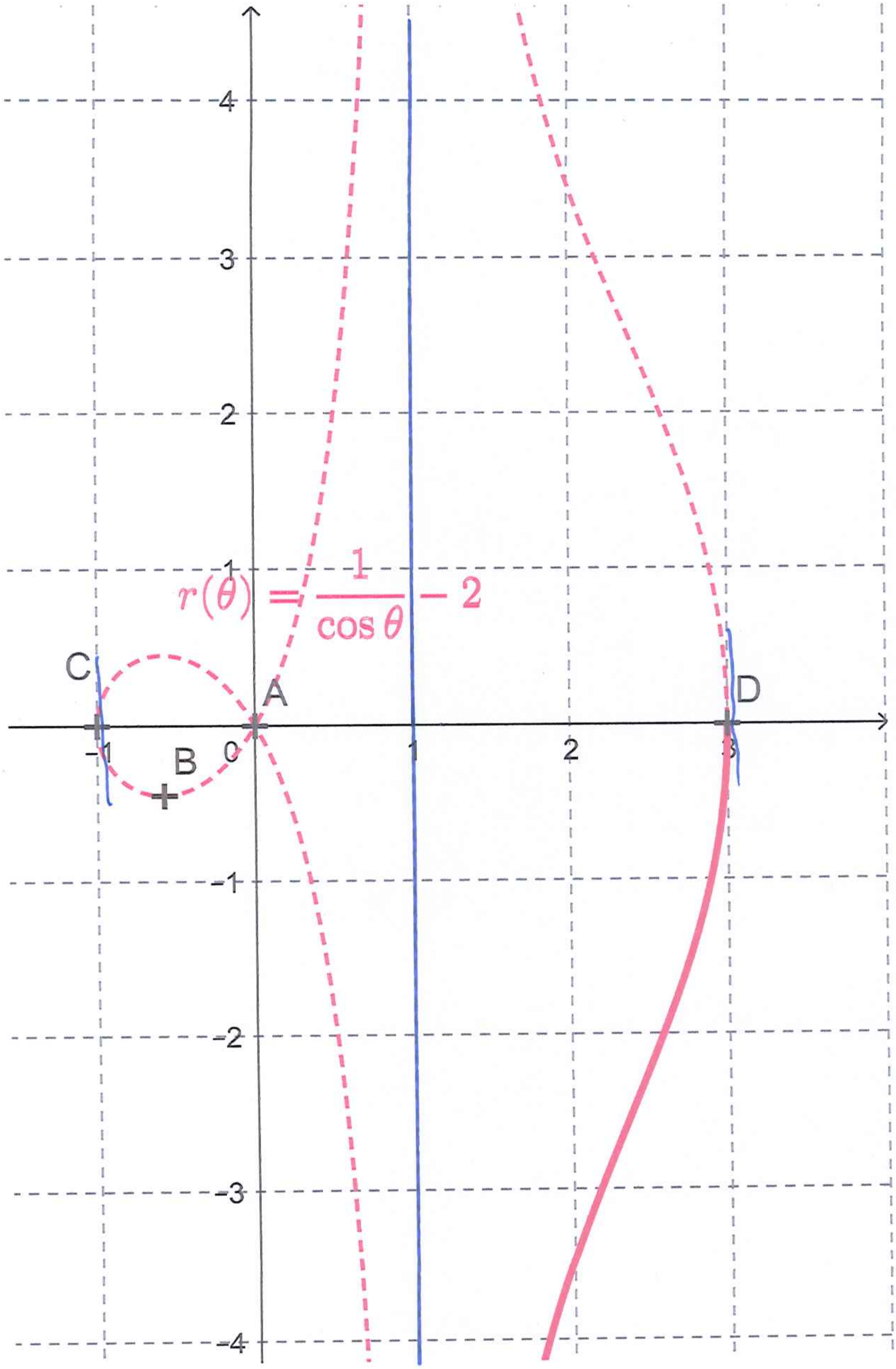
– branche infinie :

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x(\theta) = r\cos\theta$

$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - 2\right)\cos\theta$

$= 1 - 2\cos\theta$

si $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 1 \Rightarrow AV \equiv x = 1$



$r(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} - 2$
A
B
C
D

– Points particuliers (voir dessin) :

A : $r = 0 \iff \dfrac{1}{\cos\theta} - 2 = 0 \iff \cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$\rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$ et $r' = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} = -2\sqrt{3}$

et $\tan \gamma = 0$

B : pt à tgte horizontale $\Rightarrow y'(\theta) = 0$

$\iff r' \sin\theta + r\cos\theta = 0$

$\iff -\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\sin\theta + \left(\dfrac{1}{\cos\theta} - 2\right)\cos\theta = 0$

$\iff -\tan^2\theta + 1 - 2\cos\theta = 0$

C : $r = -1 \iff \theta = 0$ et $r' = 0$

$\rightarrow \tan\gamma = \dfrac{\pi}{2}$

D : $r = -3 \rightarrow \theta = \pi$ et $r' = 0$

$\rightarrow \tan\gamma = \dfrac{\pi}{2}$