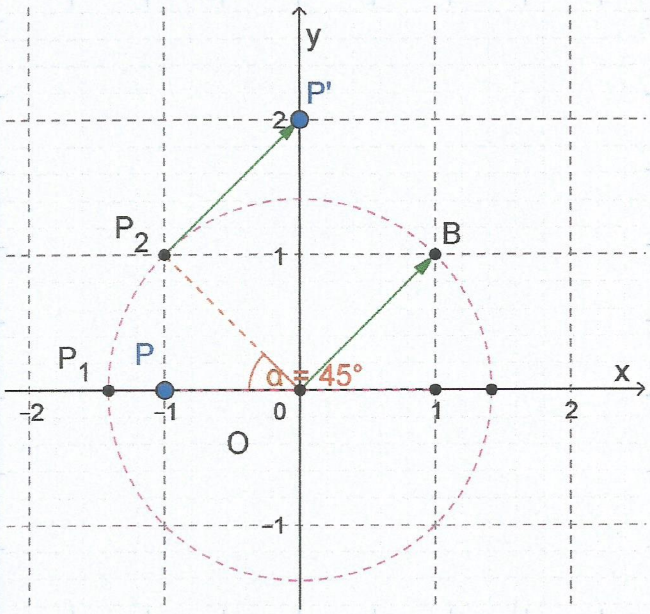
Compléments sur les complexes : Solutions

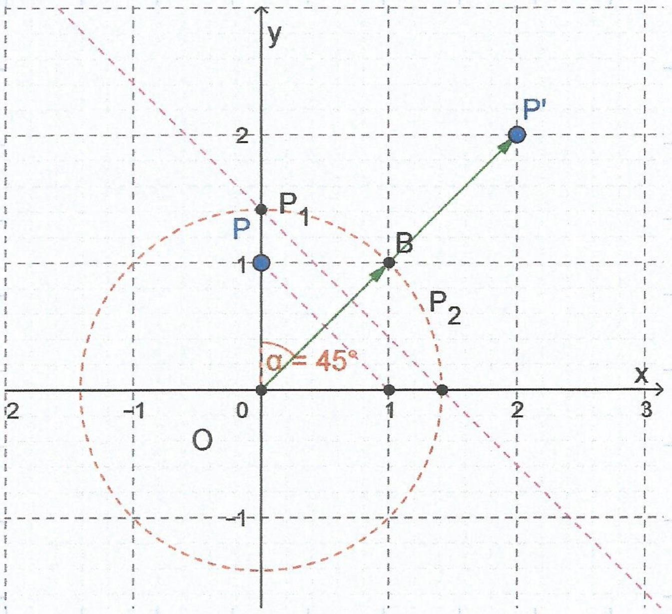
1. Soit $f(z) = (1-i)z + 1 + i$. Déterminer $f(-1)$, $f(i)$ et $f(1+2i)$ algébriquement et graphiquement. Déterminer le point fixe de la transformation.

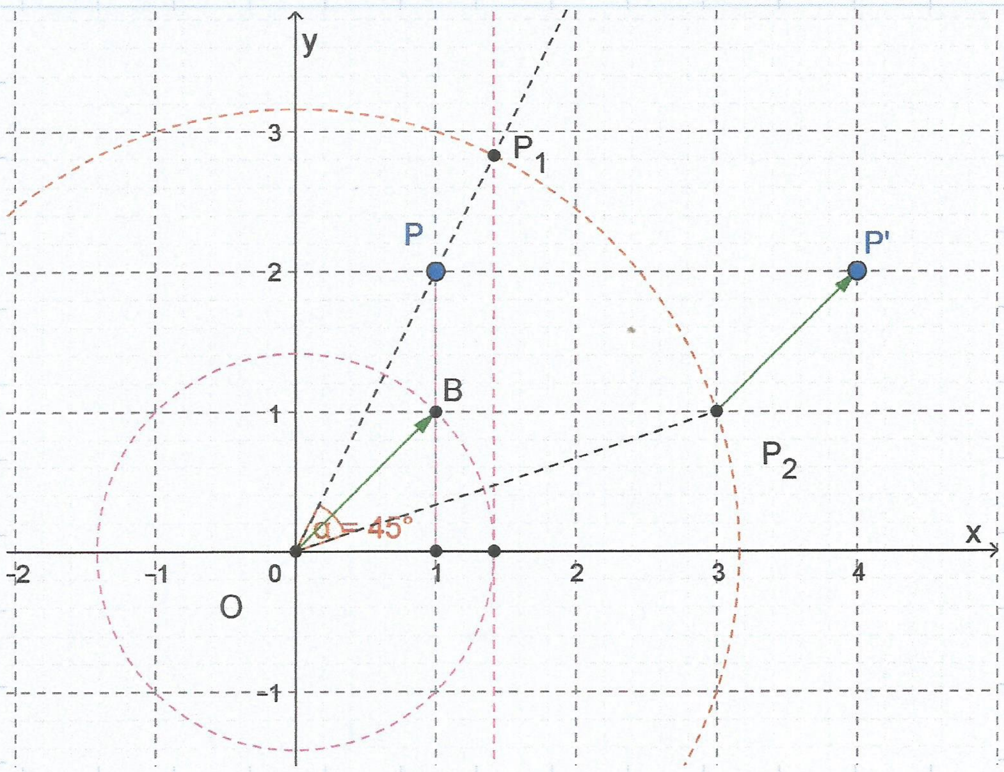
$f(-1) = (1-i)(-1) + 1 + i = 2i$
$f(i) = (1-i)\,i + 1 + i = 2i + 2$
$f(1+2i) = (1-i)(1+2i) + 1 + i$
$= 3 + i + 1 + i = 4 + 2i$

Ecrivons $1-i$ sous forme trigonométrique. On a
$1 - i = \sqrt{2}\ \mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$f(z)$ correspond à une homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$ (P_1) suivie d'une rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ (P_2) suivie d'une translation de vecteur $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (P')



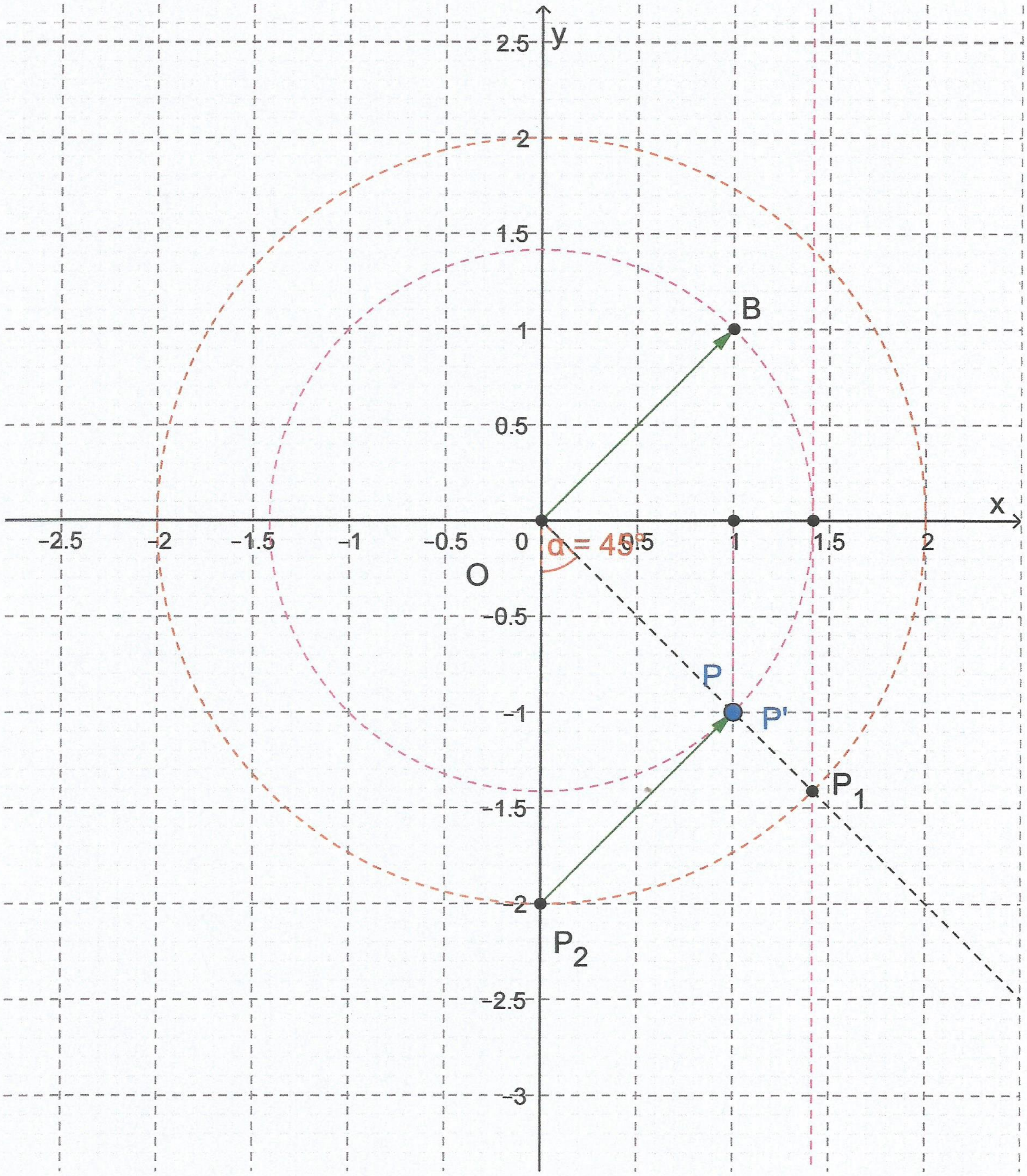




<u>Point fixe</u> : $f(z) = z \Leftrightarrow z = (1-i)\,z + 1 + i$

$\Leftrightarrow (1 - 1 + i)\,z = 1 + i \Leftrightarrow z = \dfrac{1+i}{i} \cdot \dfrac{-i}{-i}$

$\Leftrightarrow z = 1 - i$



y
x
B
O
α = 45°
P
P'
P_1
P_2
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3

2. Soit $f_1(z) = \dfrac{z\sqrt{2}}{1-i}$ et $f_2(z) = 2z + 2 - 3i$. Déterminer algébriquement et graphiquement $f_2 \circ f_1(z)$.

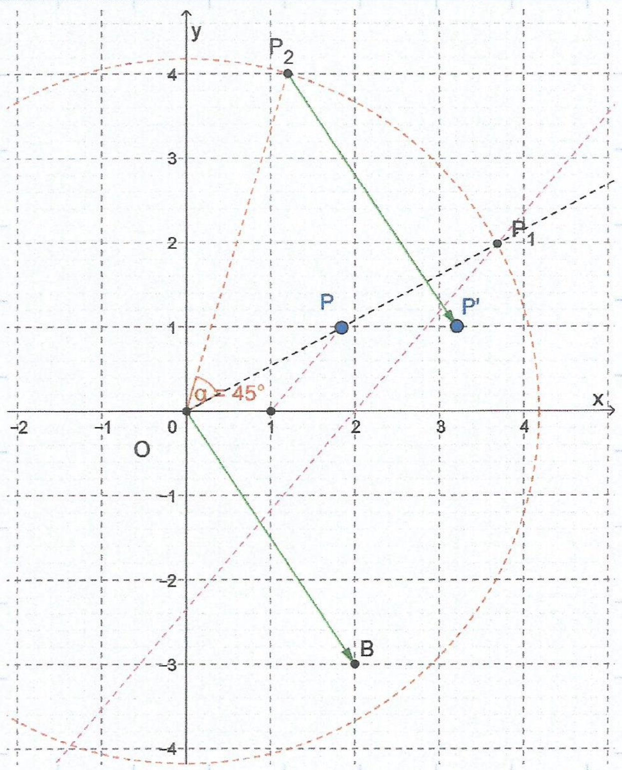
$$f_2 \circ f_1(z) = 2\left(\frac{\sqrt{2}\, z}{1-i}\right) + 2 - 3i$$

$$= 2\sqrt{2}\, z \cdot \frac{1+i}{2} + 2 - 3i$$

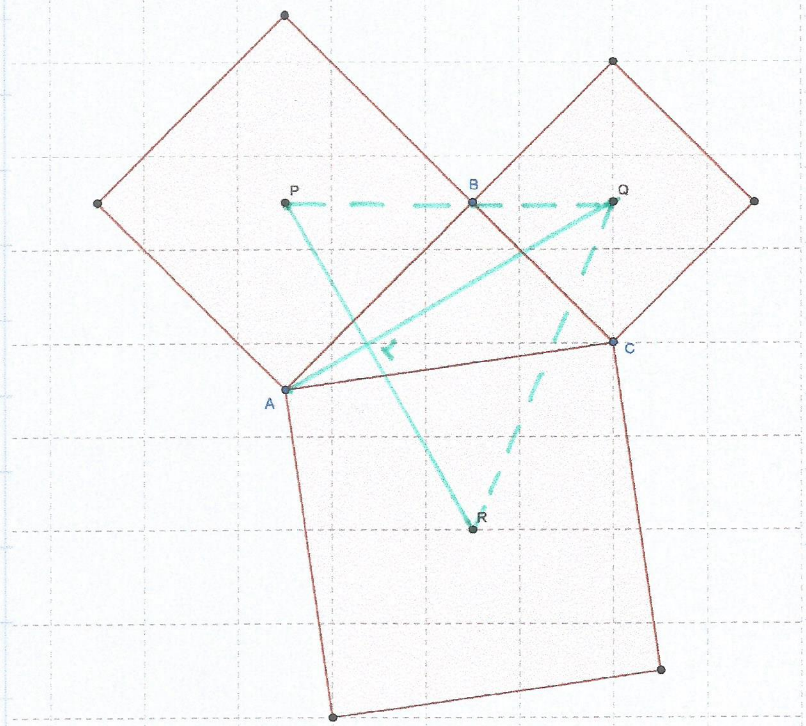
$$= \sqrt{2}(1+i)\, z + 2 - 3i$$

$$= 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\, z + 2 - 3i$$

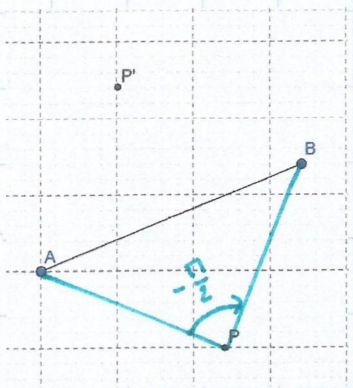
$f_2 \circ f_1(z)$ correspond à une homothétie de centre O et de rapport 2 (P_1) suivie d'une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ (P_2) suivie d'une translation de vecteur $\vec{OB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ (P')



3. À l'extérieur d'un triangle ABC, on construit trois carrés, de centres P, Q et R sur les trois côtés du triangle (P est le centre du carré construit sur $[AB]$, ...).
Les droites joignant les centres des carrés aux sommets opposés des triangles sont concourantes : leur point d'intersection s'appelle le point de Vecten du triangle.



(a) Soient A et B deux points du plan, d'affixes respectives a et b. Donner les affixes p et p' des centres P et P' des deux carrés de côté $[AB]$.



Pour P, B est l'image de A par une rotation de centre P et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
Avec les notations données dans le cours de maths

$$b = -i(a-p)+p$$

$$\Leftrightarrow b+ia = (i+1)p \Leftrightarrow p = \frac{b+ia}{i+1} \cdot \frac{i-1}{i-1}$$

$$\Leftrightarrow p = +\frac{1}{2}\left[+a+b+i(-b+a)\right]$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{(a+b)+i(a-b)}{2}$$

De même $p' = \dfrac{(a+b)+i(b-a)}{2}$ (l'angle de rot est $\frac{\pi}{2}$)

(b) Revenons au triangle ABC.

i. Donner les affixes p, q et r des points P, Q et R en fonction des affixes a, b et c des points A, B et C.

D'après la figure de la page suivante et les résultats du (a), on a

$$p = \frac{(a+b) + i(b-a)}{2}$$

$$q = \frac{(b+c) + i(c-b)}{2}$$

$$r = \frac{(a+c) + i(a-c)}{2}$$

ii. Montrer que les triangles ABC et PQR ont même centre de gravité.

Le centre de gravité de ABC a pour affixe

$$\frac{a+b+c}{3}$$

et celui de PQR

$$\frac{p+q+r}{3} = \frac{\frac{a+b+i(\cancel{b}-\cancel{a})}{2} + \frac{b+c+i(\cancel{c}-\cancel{b})}{2}}{3} \ldots$$

$$\ldots + \frac{\frac{a+c+i(\cancel{a}-\cancel{c})}{2}}{3}$$

$$= \frac{2a+2b+2c}{6}$$

$$= \frac{a+b+c}{3}$$

iii. Démontrer que $|PR| = |AQ|$ et que les droites PR et AQ sont perpendiculaires.

$$PR = r - p = \frac{\cancel{a}+c+i(a-c)}{2} - \frac{(\cancel{a}+b)+i(b-a)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(c-b)+i(2a-b-c)\right]$$

$$\text{et } AQ = q - a = \frac{b+c+i(c-b)}{2} - a$$

$$= \frac{1}{2}\left[(-2a+b+c)+i(c-b)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(-i)\left[(c-b)+i(2a-b-c)\right]$$

$|PR| = |AQ|$ car les partie réelle et imaginaire sont identiques. De plus $PR \perp AQ$ puisque

$AQ = -i\, PR$ ($-i$ = rot d'angle $-\frac{\pi}{2}$)

iv. Démontrer que les droites AQ, BR et CP sont concourantes.

Dans le ΔPQR, $AQ \perp PR \Rightarrow AQ$ est une hauteur.
Il en est de m pour CP et BR.

Dans un Δ, les 3 hauteurs sont toujours concourantes.