Nom, Prénom:

Evaluation formative n°2

Limites et continuité

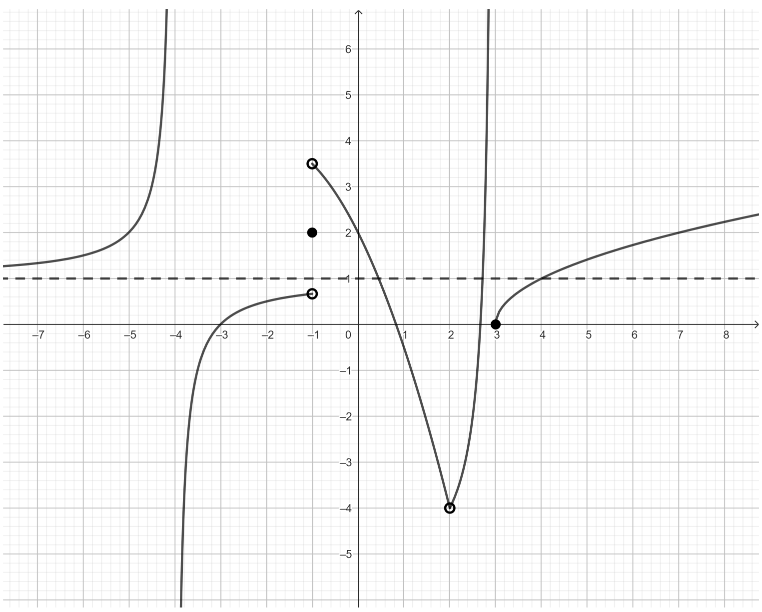
Série A

Le 12 mars 2024 Classe: 5B

Consignes (à lire ou... relire impérativement avant de démarrer le devoir surveillé)

- ✓ Répondre sur des feuilles A4 à en-tête ***quadrillées***;
- ✓ On peut répondre au crayon et dans le désordre (ne pas oublier de noter clairement le numéro de la question);
- ✓ La présentation des résultats entrera en ligne de compte dans l'évaluation.
- ✓ Les résultats d'un calcul mathématique ***peuvent comprendre des phrases françaises***!!!!! Ne pas oublier l'orthographe!
- ✓ Justifier toutes les réponses en ***français correct***!
- ✓ Lire convenablement l'énoncé pour éviter les calculs interminables et ne pas oublier les conclusions!

1. On donne le graphe de la fonction $f(x)$ suivant :



Déterminer les limites en $\pm\infty$, -3, -2, 1, 4. Préciser, le cas échéant, les limites à gauche et à droite.

2. On donne les définitions formelles suivantes. Compléter les pointillés.
   (a) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists \eta \in \mathbb{R}_0^+ : |x-2| < \eta, |f(x)+3| < \epsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to ....} f(x) = ...$
   (b) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists B \in \mathbb{R}_0^- : x < B, |f(x)-1| < \epsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to ....} f(x) = ...$
3. Calculer :
   (a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[4x + 1 - \sqrt{16x^2 + 4x - 3}\right] =$
   (b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3 - 1}{2x^2 + 3x - 2} =$
4. Etudier la continuité de la fonction défini par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 - \sqrt{3-x}}{\sqrt{x+10} - 3} & \text{si } x^2 < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 3 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Evaluation formative n°2

Limites et continuité

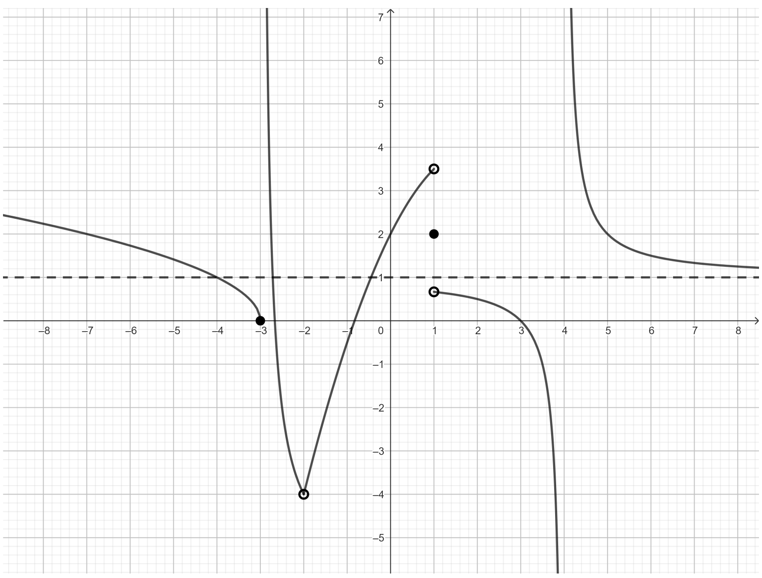
Série B

Le 12 mars 2024 Classe: 5B

Consignes (à lire ou... relire impérativement avant de démarrer le devoir surveillé)

- ✓ Répondre sur des feuilles A4 à en-tête ***quadrillées***;
- ✓ On peut répondre au crayon et dans le désordre (ne pas oublier de noter clairement le numéro de la question);
- ✓ La présentation des résultats entrera en ligne de compte dans l'évaluation.
- ✓ Les résultats d'un calcul mathématique ***peuvent comprendre des phrases françaises***!!!!! Ne pas oublier l'orthographe!
- ✓ Justifier toutes les réponses en ***français correct***!
- ✓ Lire convenablement l'énoncé pour éviter les calculs interminables et ne pas oublier les conclusions!

.../4 1. On donne le graphe de la fonction $f(x)$ suivant :



Déterminer les limites en $\pm\infty$, -3, -2, 1, 4. Préciser, le cas échéant, les limites à gauche et à droite.

.../4 2. On donne les définitions formelles suivantes. Compléter les pointillés.

(a) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists B \in \mathbb{R}_0^- : x < B, |f(x)+1| < \epsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to ....} f(x) = ...$

(b) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists \eta \in \mathbb{R}_0^+ : |x+2| < \eta, |f(x)-3| < \epsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to ....} f(x) = ...$

.../8 3. Calculer :

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{27x^3 - 1}{3x^2 + 5x - 2} =$

(b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 4x - 3}] =$

.../4 4. Etudier la continuité de la fonction défini par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2-x} - 2}{3 - \sqrt{x+11}} & \text{si } x^2 < 4 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \\ 3 & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 2 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

EF 2 : limites et continuité

Série A

1) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim\limits_{1^-} f(x) = -4$

$\lim\limits_{-3^-} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{1^+} f(x) = -4$

$\lim\limits_{-3^+} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{4^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{-2^-} f(x) = \frac{2}{3}$ $\quad$ $\lim\limits_{4^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{-2^+} f(x) = \frac{7}{2}$ $\quad$ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

2) a) $\lim\limits_{2} f(x) = -3$

b) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 1$

3) a) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \infty - \infty$ FI

$$= \lim_{+\infty} \frac{[4x+1-\sqrt{}\,][4x+1+\sqrt{}\,]}{4x+1+\sqrt{}}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{(4x+1)^2-(16x^2+4x-3)}{D}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\cancel{16x^2}+8x+1-\cancel{16x^2}-4x+3}{D}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{4x+4}{D} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{FI}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{4x}{4x+\sqrt{16x^2}} = \lim_{+\infty} \frac{4x}{4x+4x} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{\frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{2x^2+3x-2} = \dfrac{0}{0}$ FI

$$= \lim_{\frac{1}{2}} \frac{\cancel{(2x-1)}(4x^2+2x+1)}{\cancel{(2x-1)}(x+2)}$$

$$= \frac{1+1+1}{\frac{1}{2}+2} = \frac{6}{5}$$

4) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+10}-3} & \text{si } -1 < x < 1 \quad (\text{TS}) \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 1 \\ 3 & \text{si } x < -1 \\ x^2+2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Les points de discontinuité sont -1 et 1

$$\lim_{-1^-} f(x) = \lim_{-1^-} 3 = 3$$

$$\lim_{-1^+} f(x) = \lim_{-1^+} \frac{2-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+10}-3} = \frac{0}{0} \text{ FI}$$

$$= \lim_{-1^+} \frac{(2-\sqrt{3-x})(2+\sqrt{3-x})(\sqrt{x+10}+3)}{(\sqrt{x+10}-3)(\sqrt{x+10}+3)(2+\sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{-1^+} \frac{[4-(3-x)](\sqrt{x+10}+3)}{(x+10-9)(2+\sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{-1^+} \frac{\cancel{(1+x)}(\sqrt{x+10}+3)}{\cancel{(x+1)}(2+\sqrt{3-x})} = \frac{3+3}{2+2} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow f(x)$ discontinue en $x = -1$

$$\lim_{1^-} f(x) = \lim_{1^-} \frac{2-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+10}-3} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{11}-3} =$$

$$\lim_{1^+} f(x) = \lim_{1^+} (2x+1) = 3$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ discontinue en $x = 1$.

Les résultats de la série B sont similaires à ceux de la série A.

1) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{1^-} f(x) = \frac{7}{2}$

$\lim\limits_{-3^-} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{1^+} f(x) = \frac{2}{3}$

$\lim\limits_{-3^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{4^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{-2^-} f(x) = -4$ $\qquad$ $\lim\limits_{4^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{-2^+} f(x) = -4$ $\qquad$ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1$

2) a) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -1$

b) $\lim\limits_{-2} f(x) = 3$

3) a) $\frac{9}{7}$

b) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\frac{5}{4}$

4) $\lim\limits_{-2^-} f(x) = 3$

$\lim\limits_{-2^+} f(x) = \frac{3}{2}$

$\lim\limits_{2^-} f(x) = \frac{\sqrt{13}+3}{2}$

$\lim\limits_{2^+} f(x) = 5$