Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°9 - Solutions

Limites

Série A

Le 17 avril 2025 Classe: 5AC

1. Calculer les limites suivantes

.../5 (a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8}$

On a successivement :

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$
$$= \lim_{x\to 2} \left[\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(x^2+2x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x^2+2x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$
$$= \frac{1}{48}$$

.../5 (b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{3x^2+7x+2}$

On a successivement :

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{3x^2+7x+2} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$
$$\stackrel{\Delta}{=} \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(3x+1)} = \frac{4}{5}$$

.../5 (c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left[\sqrt{x^2-x}+x-1\right]$

On a

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2-x}+x-1\right] = +\infty$$

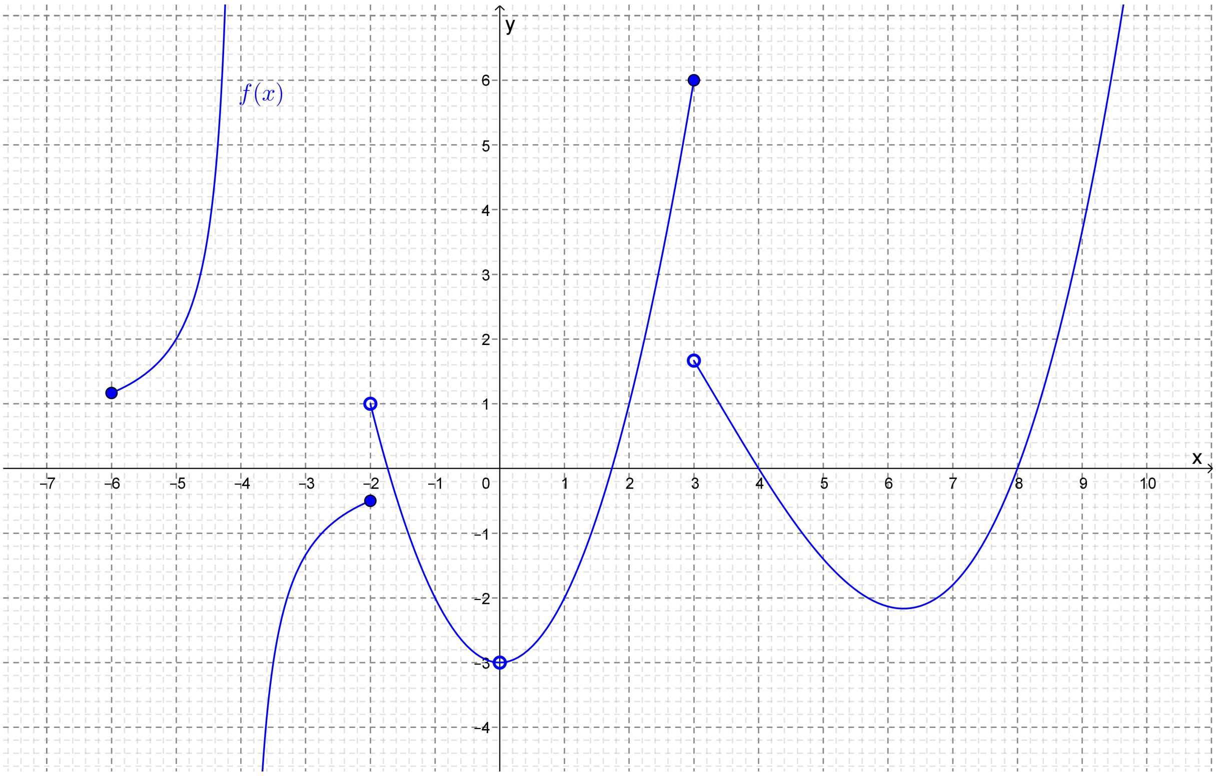
et

$$\lim_{x\to -\infty} \left[\sqrt{x^2-x}+x-1\right] = \infty - \infty \quad \text{F.I.}$$

En levant l'indétermination, on a successivement :

$$\lim_{x\to -\infty} \left[\sqrt{x^2-x}+x-1\right] = \lim_{x\to -\infty} \left[\sqrt{x^2-x}+x-1\right] \frac{\sqrt{x^2-x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-x}-(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-x-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-x}-(x-1)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-x-(x^2-2x+1)}{\sqrt{x^2-x}-(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x}-(x-1)} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x^2|-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{-x-x} = -\frac{1}{2}$$

.../5 2. On donne le graphe de la fonction $f(x)$ suivant :



Calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ dans les cas suivants

- $a = -6$
- $a = -4$
- $a = -2$
- $a = 0$
- $a = +\infty$

On lit sur le graphe

- $\lim\limits_{x \to -6^-} f(x) \nexists$
- $\lim\limits_{x \to -6^+} f(x) = 1,2$
- $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -0,5$
- $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -3$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -3$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°9 - Solutions

Limites

Série B

Le 17 avril 2025 Classe: 5AC

1. Calculer les limites suivantes

.../5 (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{x^2-x}+x+1\right]$

On a

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x}+x+1\right]=+\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-x}+x+1\right]=\infty-\infty \quad \text{F.I.}$$

En levant l'indétermination, on a successivement :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-x}+x+1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-x}+x+1\right]\frac{\sqrt{x^2-x}-(x+1)}{\sqrt{x^2-x}-(x+1)}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2-x}-(x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2-x}-(x+1)}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x-1}{\sqrt{x^2-x}-(x+1)}=\frac{\infty}{\infty}\quad \text{F.I.}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{|x^2|-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{-x-x}=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

.../5 (b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{3x^2-5x-2}$

On a successivement :

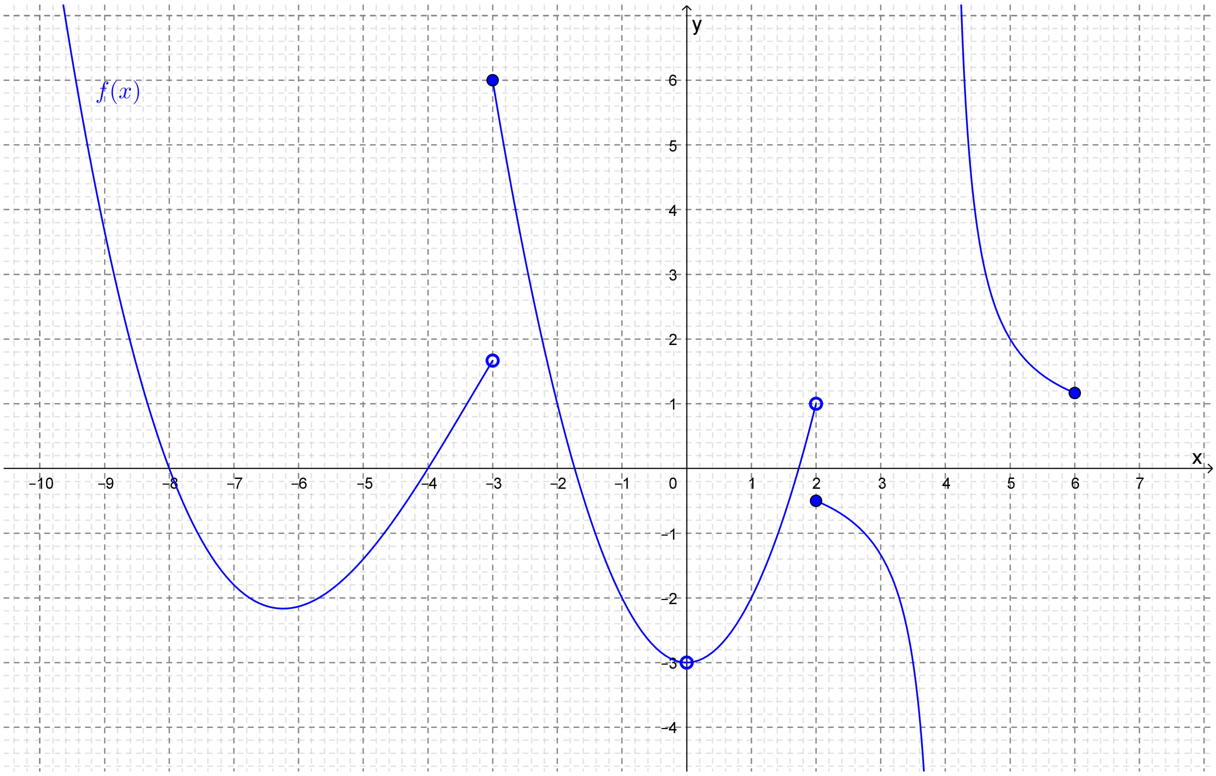
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{3x^2-5x-2}=\frac{0}{0}\quad \text{F.I.}\\
&\stackrel{\Delta}{=}\lim_{x\to2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(3x+1)}=\frac{4}{7}
\end{aligned}$$

.../5 (c) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^3-27}$

On a successivement :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^3-27}=\frac{0}{0}\quad \text{F.I.}\\
&=\lim_{x\to3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^3-27}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\right]=\lim_{x\to3}\frac{x+1-4}{(x-3)(x^2+3x+9)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\\
&=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x^2+3x+9)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\\
&=\frac{1}{108}
\end{aligned}$$

.../5 2. On donne le graphe de la fonction $f(x)$ suivant :



Calculer $\lim_{x \to a} f(x)$ dans les cas suivants

- $a = -\infty$
- $a = 0$
- $a = 2$
- $a = 4$
- $a = 6$

On lit sur le graphe

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -3$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -3$
- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -0,5$
- $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 6^-} f(x) = 1,2$
- $\lim_{x \to 6^+} f(x) \nexists$