Nom, Prénom:

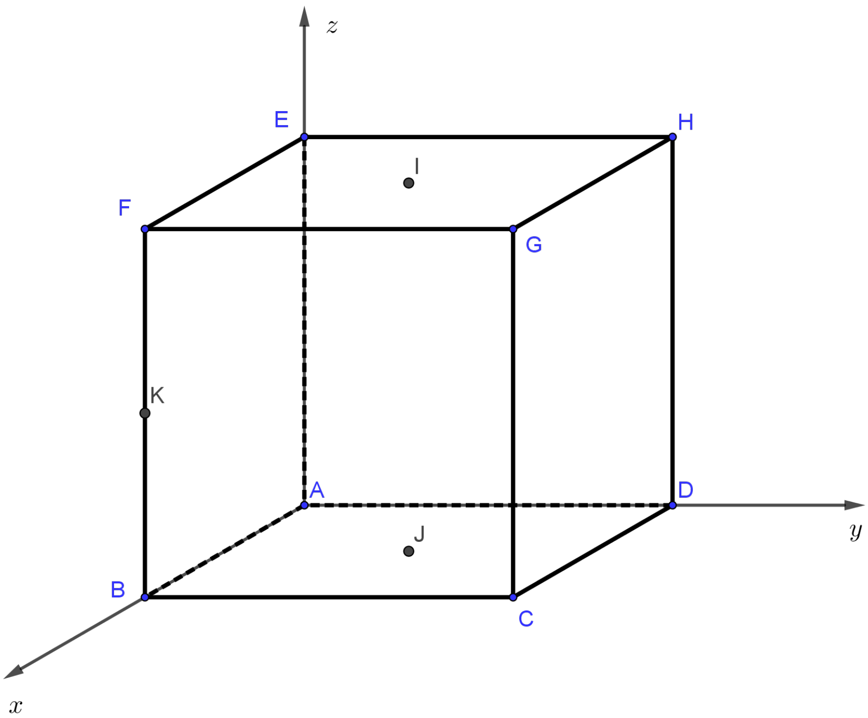
Devoir surveillé n°8 - Solutions

Calcul vectoriel dans l'espace

Série A

Le 4 avril 2019 | Classe: 5A

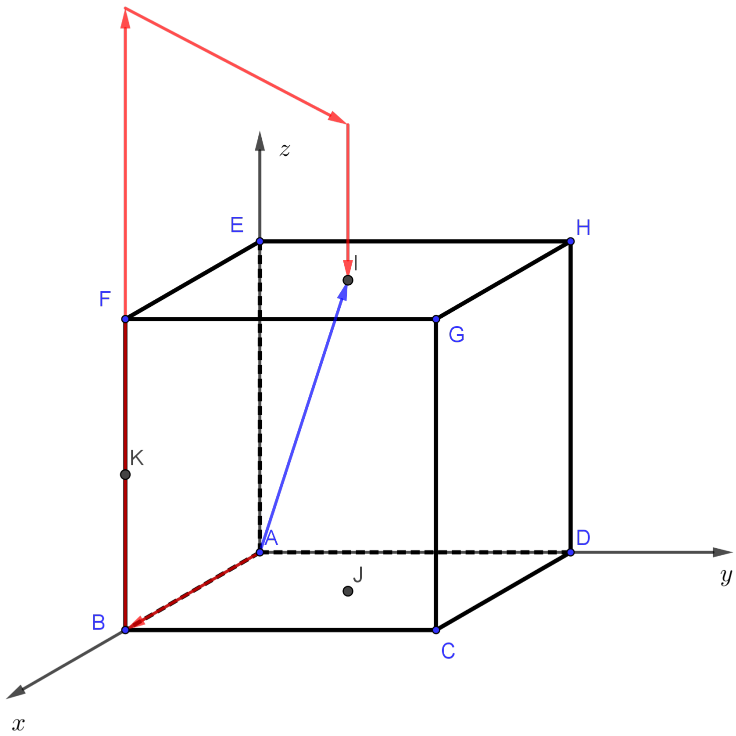
On donne le cube $ABCDEFGH$ de côté 2. Le point I est le milieu de $[EG]$, le point J le milieu de $[AC]$ et K le milieu de $[BF]$.
La situation est représentée à la figure suivante qui permettra de déterminer les coordonnées des points utilisés par la suite.



.../2 1. En utilisant les lettres données dans l'énoncé, déterminer un représentant du vecteur

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{BK}$$

Il s'agit du vecteur $\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{JG}$



.../4 2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont coplanaires.

On relève les coordonnées des points suivants :

- $A : (0, 0, 0)$
- $C : (2, 2, 0)$
- $E : (0, 0, 2)$
- $G : (2, 2, 2)$
- $I : (1, 1, 2)$
- $J : (1, 1, 0)$

Les composantes des vecteurs sont donc :

- $\overrightarrow{CG} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{EJ} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AI} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On constate que $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EJ}$.

Pour s'en convaincre autrement, il faut trouver deux réels k_1 et k_2 tels que $\overrightarrow{CG} = k_1\overrightarrow{AI} + k_2\overrightarrow{EJ}$ ou résoudre le système :

$$\begin{cases} 0 = k_1 + k_2 \\ 0 = k_1 + k_2 \\ 2 = 2k_1 - 2k_2 \end{cases}$$

dont la solution est $k_1 = -k_2 = \dfrac{1}{2}$. Les vecteurs $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont donc coplanaires.

.../4 3. Déterminer les coordonnées du point P tels que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{GD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CE}$.

On trouve les coordonnées des points $B : (2,0,0)$ et $D : (0,2,0)$. On trouve successivement :

- $\overrightarrow{BP} : \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- $2\overrightarrow{AE} : 2.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $-\overrightarrow{GD} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CE} : \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} x-2 = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{4}{3} \\ z = \dfrac{22}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées de P sont donc $P : \left(\dfrac{8}{3}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{22}{3}\right)$

.../3 4. Déterminer les coordonnées du point Q tels que $GEBQ$ soit un parallélogramme.

$GEBQ$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{QB}$. En terme de composantes, il faut imposer

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ou $Q : (0,2,0)$.

.../4 5. Déterminer l'amplitude de l'angle $\widehat{EKJ}$.

Il s'agit de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{KE}$ et $\overrightarrow{KJ}$. Les coordonnées de K sont $K : (2,0,1)$. On a donc successivement :

$$\begin{cases} \overrightarrow{KE} : \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{KE}\right\| = \sqrt{5} \\ \overrightarrow{KJ} : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{KJ}\right\| = \sqrt{3} \\ \overrightarrow{KJ} \bullet \overrightarrow{KE} = 1 \end{cases}$$

et $\widehat{EKJ} = \cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{15}} \approx 1,31$

.../3 6. Démontrer que AK est perpendiculaire à IC

Les composantes de $\overrightarrow{AK}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et celle de $\overrightarrow{IC}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Le produit scalaire $\overrightarrow{AK} \bullet \overrightarrow{IC} = 2.1 + 0.1 + 1.(-2) = 0$. Les deux droites sont donc orthogonales.

Nom, Prénom:

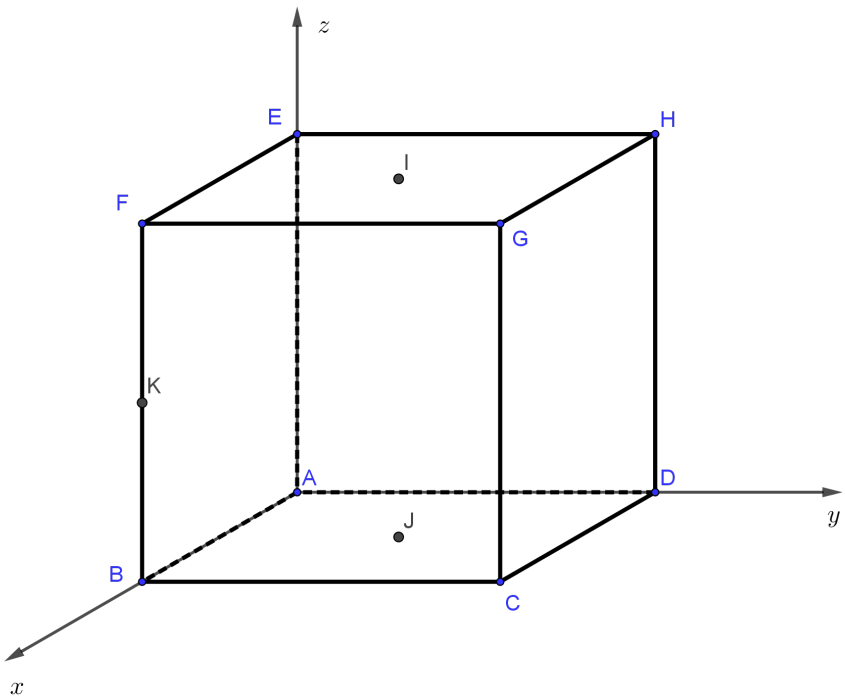
Devoir surveillé n°8 - Solutions

Calcul vectoriel dans l'espace

Série B

Le 4 avril 2019 | Classe: 5A

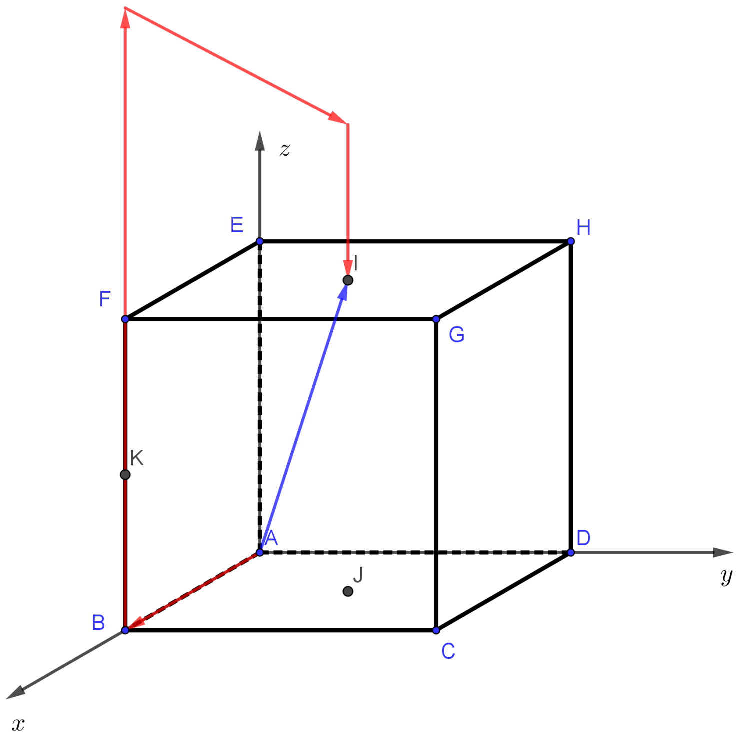
On donne le cube $ABCDEFGH$ de côté 2. Le point I est le milieu de $[HF]$, le point J le milieu de $[BD]$ et K le milieu de $[BF]$.
La situation est représentée à la figure suivante qui permettra de déterminer les coordonnées des points utilisés par la suite.



.../2 1. En utilisant les lettres données dans l'énoncé, déterminer un représentant du vecteur

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{KF}$$

Il s'agit du vecteur $\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{JG}$



.../4 2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{GJ}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont coplanaires.

On relève les coordonnées des points suivants :
- $A : (0, 0, 0)$
- $C : (2, 2, 0)$
- $E : (0, 0, 2)$
- $G : (2, 2, 2)$
- $I : (1, 1, 2)$
- $J : (1, 1, 0)$

Les composantes des vecteurs sont donc :
- $\overrightarrow{AE} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{GJ} : \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{CI} : \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On constate que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GJ}$.

Pour s'en convaincre autrement, il faut trouver deux réels k_1 et k_2 tels que $\overrightarrow{AE} = k_1\overrightarrow{CI} + k_2\overrightarrow{GJ}$ ou résoudre le système :

$$\begin{cases} 0 = -k_1 - k_2 \\ 0 = -k_1 - k_2 \\ 2 = -2k_1 + 2k_2 \end{cases}$$

dont la solution est $k_1 = -k_2 = \frac{1}{2}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{GJ}$ sont donc coplanaires.

.../4 3. Déterminer les coordonnées du point P tels que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{DH} - \overrightarrow{FA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$.

On trouve les coordonnées des points $B : (2,0,0)$, $D : (0,2,0)$, $H : (0,2,2)$ et $F : (2,0,2)$. On trouve successivement :

- $\overrightarrow{BP} : \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- $2\overrightarrow{DH} : 2.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $-\overrightarrow{FA} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\frac{2}{3}\overrightarrow{CE} : \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} x-2 = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = \frac{22}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées de P sont donc $P : \left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{22}{3}\right)$

.../3 4. Déterminer les coordonnées du point Q tels que $HFDQ$ soit un parallélogramme.

$HFDQ$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{QD}$. En terme de composantes, il faut imposer

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}$$

ou $Q : (2,0,0)$.

.../4 5. Déterminer l'amplitude de l'angle $\widehat{CKI}$.

Il s'agit de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KI}$. Les coordonnées de K sont $K : (2,0,1)$. On a donc successivement :

$$\begin{cases} \overrightarrow{KC} : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{KC}\right\| = \sqrt{5} \\ \overrightarrow{KI} : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{KI}\right\| = \sqrt{3} \\ \overrightarrow{KC} \bullet \overrightarrow{KI} = 1 \end{cases}$$

et $\widehat{CKI} = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{15}} \approx 1,31$

.../3 6. Démontrer que CK est perpendiculaire à GJ

Les composantes de $\overrightarrow{CK}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et celle de $\overrightarrow{GJ}$: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Le produit scalaire $\overrightarrow{CK} \bullet \overrightarrow{GJ} = -1.0 + (-2).(-1) + 1.(-2) = 0$. Les deux droites sont donc orthogonales.