Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°7 - Solutions

Les asymptotes

Série A

Le 18 mars 2019 | Classe: 5A

.../8 1. On donne la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x - 1$. Déterminer les équations des asymptotes de $f(x)$.

- $dom_f = \mathbb{R}$. Il n'y a donc pas d'AV.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$ F.I.

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+1}-(x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]}{\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2-2x-1}{\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\left[\sqrt{x^2}+x\right]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{[|x|+x]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{[x+x]} = -1$$

Il y a donc une $\text{AH}_d \equiv y = -1$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Il n'y a donc pas d'$\text{AH}_g$. Cherchons l'AO.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|-x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-x}{x} = -2$$

$$p = \lim_{x\to-\infty} [f(x)+2x] = \lim_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2+1}+x-1\right] = \infty - \infty \quad \text{F.I.}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+1}+(x-1)\right]\left[\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right]}{\left[\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2+2x-1}{\left[\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right]}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\left[\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right]} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\left[\sqrt{x^2}-x\right]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{[|x|-x]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{[-x-x]} = -1$$

Il y a donc une $\text{AO}_g \equiv y = -2x - 1$.

2. On donne la fonction $g(x) = \dfrac{x^2}{x-1} - |x|$.

.../6 (a) Déterminer l'équation des asymptotes de $g(x)$.

- $dom_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{0} - 1 = \pm\infty$. Il y a donc une AV$\equiv x = 1$.
-
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$
Il y a donc une AH$_d \equiv y = 1$
-
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} + x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x} = -\infty$$
Il n'y a donc pas d'AH$_g$. Cherchons l'AO. La division euclidienne permet d'écrire la fonction sous la forme
$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}$$
Comme $\dfrac{1}{x-1}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$, la fonction tend vers la droite d'équation $y = 2x+1$ qui est donc l'AO de la fonction. On a donc AO$_g \equiv y = 2x+1$.

.../6 (b) Etudier la position relative de la courbe par rapport aux asymptotes.

Pour l'asymptote verticale, il faut étudier le signe de la fonction autour de $x = 1$. Puisque x est positif, la fonction s'écrit
$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$
Le tableau de signe de cette fonction est :

x	0		1	
x	0	+		+
$x-1$		-	0	+
$f(x)$	0	-	$-\infty \| +\infty$	+

On a donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

Pour l'asymptote horizontale, on calcul la distance enter la courbe et l'asymptote par :
$$d(x) = \frac{x}{x-1} - 1 \Leftrightarrow d(x) = \frac{1}{x-1}$$
qui est positive (puisque x est positif). La courbe est donc située au-dessus de l'asymptote.

Dans l'écriture de la fonction sous la forme
$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}$$
le terme $\dfrac{1}{x-1}$ représente la distance entre la courbe et l'asymptote. Comme x est négatif, cette distance est négative et la fonction est située sous l'asymptote oblique.

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°7 - Solutions

Les asymptotes

Série B

Le 18 mars 2019 | Classe: 5A

1. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} + |x|$.

.../6 (a) Déterminer l'équation des asymptotes de $f(x)$.

- $dom_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \dfrac{1}{0} + 1 = \pm\infty$. Il y a donc une AV$\equiv x = -1$.
- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{x+1} + x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$
  $$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x} = +\infty$$
  Il n'y a donc pas d'AH$_d$. Cherchons l'AO. La division euclidienne permet d'écrire la fonction sous la forme
  $$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$$
  Comme $\dfrac{1}{x+1}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction tend vers la droite d'équation $y = 2x-1$ qui est donc l'AO de la fonction. On a donc AO$_d \equiv y = 2x - 1$.
- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2}{x+1} - x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$
  $$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -1$$
  Il y a donc une AH$_g \equiv y = -1$

.../6 (b) Etudier la position relative de la courbe par rapport aux asymptotes.

Pour l'asymptote verticale, il faut étudier le signe de la fonction autour de $x = -1$. Puisque x est négatif, la fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{-x}{x+1}$$

Le tableau de signe de cette fonction est :

x		-1		0
$-x$	$+$		$+$	0
$x+1$	-	0	$+$	
$f(x)$	-	$_{-\infty}\|^{+\infty}$	$+$	0

On a donc $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.

Dans l'écriture de la fonction sous la forme

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

le terme $\dfrac{1}{x+1}$ représente la distance entre la courbe et l'asymptote. Comme x est positif, cette distance est positive et la fonction est située au-dessus de l'asymptote oblique.

Pour l'asymptote horizontale, on calcul la distance enter la courbe et l'asymptote par :

$$d(x) = \frac{-x}{x+1} + 1 \Leftrightarrow d(x) = \frac{1}{x-1}$$

qui est négative (puisque x est négatif). La courbe est donc située sous l'asymptote.

.../8 2. On donne la fonction $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x - 1$. Déterminer les équations des asymptotes de $g(x)$.

Voir série A, question 1