Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°6 - Solutions

Limites et continuité

Série A

Le 26 février 2019 — Classe: 5A

.../5 1. Inventer le graphe possible d'une fonction dont les caractéristiques sont :

- $dom_f = \mathbb{R} \backslash \{-3, -1, 0, 3\}$
- $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 3$
- $f(-4) = 3$
- $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = 0,5$
- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -0,5$
- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0,5$
- $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Voici un exemple d'un tel graphe

.../8 2. On donne la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{ax} - \sqrt{a}}{x^3 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

où a est un paramètre réel.

Déterminer la (les) valeur(s) de a pour que $f(x)$ soit continue en $x = 1$

Pour que $f(x)$ soit continue, il faut que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$.

On a $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \dfrac{1}{a}$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{0}{0}$ (F.I.).

En levant l'indétermination, on a successivement :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{ax} - \sqrt{a}}{x^3 - 1} \frac{\sqrt{ax} + \sqrt{a}}{\sqrt{ax} + \sqrt{a}} &= \lim_{x \to 1^+} \frac{ax - a}{(\sqrt{ax} + \sqrt{a})(x-1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{a}{(\sqrt{ax} + \sqrt{a})(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{a}{6\sqrt{a}} \\ &= \frac{\sqrt{a}}{6} \end{aligned}$$

Il faut donc imposer que : $\dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{a}}{6}$ ou $a = \sqrt[3]{36}$

3. Calculer les limites suivantes

.../4 (a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{2 - 3x}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{2 - 3x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ (F.I.).

En levant l'indétermination, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{2 - 3x} &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-3x} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-3x} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{-3x} \end{aligned}$$

Dès lors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\dfrac{1}{3}$

.../6 (b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-b^2x^2 + bx(1 - 2b) - b(b-1)}{x^2 + 4x + 3}$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-b^2x^2 + bx(1 - 2b) - b(b-1)}{x^2 + 4x + 3} = \dfrac{0}{0}$ (F.I.).

En levant l'indétermination, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1} \frac{-b^2x^2 + bx(1 - 2b) - b(b-1)}{x^2 + 4x + 3} &\overset{\Delta^*}{=} \lim_{x \to -1} \frac{-b(x+1)(bx + b - 1)}{(x+1)(x+3)} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{-b(bx + b - 1)}{x + 3} \\ &= \frac{b}{2} \end{aligned}$$

.../7 (c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\sqrt{9x^2 - 3x - 2} - 3x + 1\right]$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$ (F.I.).

En levant l'indétermination, on a :

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{9x^2 - 3x - 2} - (3x - 1)\right] \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{9x^2 - 3x - 2} - (3x - 1)\right]\left[\sqrt{9x^2 - 3x - 2} + (3x - 1)\right]}{\left[\sqrt{9x^2 - 3x - 2} + (3x - 1)\right]} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{(9x^2 - 3x - 2 - (3x - 1)^2)}{\left[\sqrt{9x^2 - 3x - 2} + (3x - 1)\right]} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 3}{\left[\sqrt{9x^2 - 3x - 2} + (3x - 1)\right]} \\
&= \frac{\infty}{\infty} \text{ (F.I.)} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{9x^2} + 3x} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

* : Le calcul de Δ donne $\Delta = b^2(1 - 2b)^2 - 4b^2 b(b - 1) = b^2 + 4b^4 - 4b^3 - 4b^4 + 4b^3 = b^2$.

et $x_{1,2} = \dfrac{-b(1 - 2b) \pm b}{-2b^2} = \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ \\ \dfrac{-b + 1}{b} \end{array} \right.$

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°6 - Solutions

Limites et continuité

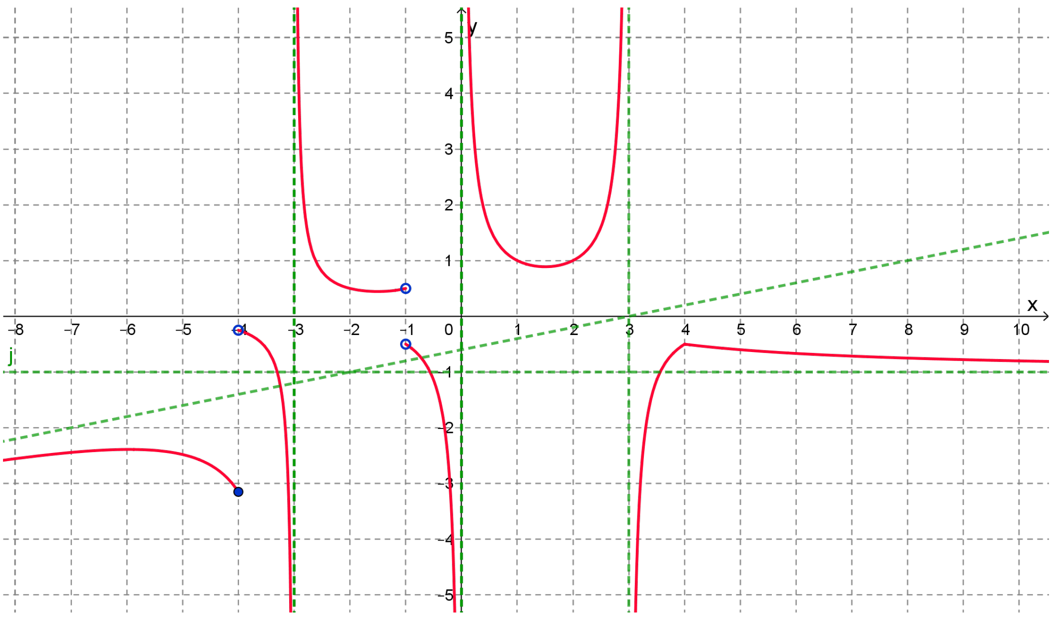
Série B

Le 26 février 2019 Classe: 5A

.../3 1. Inventer le graphe possible d'une fonction dont les caractéristiques sont :

- $dom_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0, 3\}$
- $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = -3$
- $f(-4) = -3$
- $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = -0,5$
- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 0,5$
- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -0,5$
- $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

Voici un exemple d'un tel graphe



.../8 2. On donne la fonction

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{-ax}-\sqrt{a}}{x^3+1} & \text{si } x<-1\\ \dfrac{1}{a} \quad \text{si } x\geq -1\end{cases}$$

où a est un paramètre réel.
Déterminer la (les) valeur(s) de a pour que $f(x)$ soit continue en $x=-1$.
Pour que $f(x)$ soit continue, il faut que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$.
On a $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)=\dfrac{1}{a}$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\dfrac{0}{0}$ (F.I.).
En levant l'indétermination, on a successivement :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{-ax}-\sqrt{a}}{x^3+1}\frac{\sqrt{-ax}+\sqrt{a}}{\sqrt{-ax}+\sqrt{a}} &= \lim_{x\to -1^+}\frac{-ax-a}{\left(\sqrt{-ax}+\sqrt{a}\right)(x+1)(x^2-x+1)}\\ &= \lim_{x\to -1^+}\frac{-a}{\left(\sqrt{-ax}+\sqrt{a}\right)(x^2-x+1)}\\ &= \frac{-a}{6\sqrt{a}}\\ &= \frac{-\sqrt{a}}{6}\end{aligned}$$

Il faut donc imposer que : $\dfrac{1}{a}=-\dfrac{\sqrt{a}}{6}$ ou $a=\sqrt[3]{36}$

3. Calculer les limites suivantes

.../7 (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{4x^2+x+1}-2x+1\right]$
On a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty-\infty$ (F.I.).
En levant l'indétermination, on a :

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x+1}-(2x-1)\right]\\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{4x^2+x+1}-(2x-1)\right]\left[\sqrt{4x^2+x+1}+(2x-1)\right]}{\left[\sqrt{4x^2+x+1}+(2x-1)\right]}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{[4x^2+x+1-(2x-1)^2]}{\left[\sqrt{4x^2+x+1}+(2x-1)\right]}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\left[\sqrt{4x^2+x+1}+(2x-1)\right]}\\ &=\frac{\infty}{\infty}\text{ (F.I.)}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt{4x^2}+2x}\\ &=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

.../4 (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-5}}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-5}}=\dfrac{\infty}{\infty}$ (F.I.).
En levant l'indétermination, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-5}} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{|x|}\end{aligned}$$

Dès lors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

.../6 (c) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-k^2x^2 + kx(1-4k) - 2k(2k-1)}{x^2+6x+8}$ $(k \in \mathbb{R}_0^+)$

$\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-k^2x^2 + kx(1-4k) - 2k(2k-1)}{x^2+6x+8} = \dfrac{0}{0}$ (F.I.).

En levant l'indétermination, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2} \frac{-k^2x^2 + kx(1-4k) - 2k(2k-1)}{x^2+6x+8} &\overset{\Delta^*}{=} \lim_{x\to-2} \frac{-k(x+2)(kx+2k-1)}{(x+2)(x+4)} \\ &= \lim_{x\to-2} \frac{-k(kx+2k-1)}{x+4} \\ &= \frac{k}{2}\end{aligned}$$

* : Le calcul de Δ donne $\Delta = k^2(1-4k)^2 - 8k^2k(2k-1) = k^2 + 16k^4 - 8k^3 - 16k^4 + 8k^3 = k^2$.

et $x_{1,2} = \dfrac{-k(1-4k) \pm k}{-2k^2} = \left\langle \begin{array}{l} -2 \\ \\ \dfrac{-2k+1}{k} \end{array}\right.$