Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°2 - Solutions

Rappels de 4$^{\text{ème}}$: le second degré

Série A

Le 30 septembre 2021 Classe: 5B

1. On donne la droite $d \equiv y = x + 2$ et la parabole $P \equiv y = x^2 - 3(p+1) - px$ où p est une paramètre réel.

.../2 (a) Montrer que si $p = 1$, la parabole P coupe la droite d sur l'axe Ox (c'est-à-dire en un point d'ordonnée nulle) ;
La parabole coupe la droite sur l'axe Ox si $x = -2$ (car $y = 0$). En remplaçant dans l'équation de la parabole, on a :

$$0 = 4 - 3p - 3 + 2p \Leftrightarrow p = 1$$

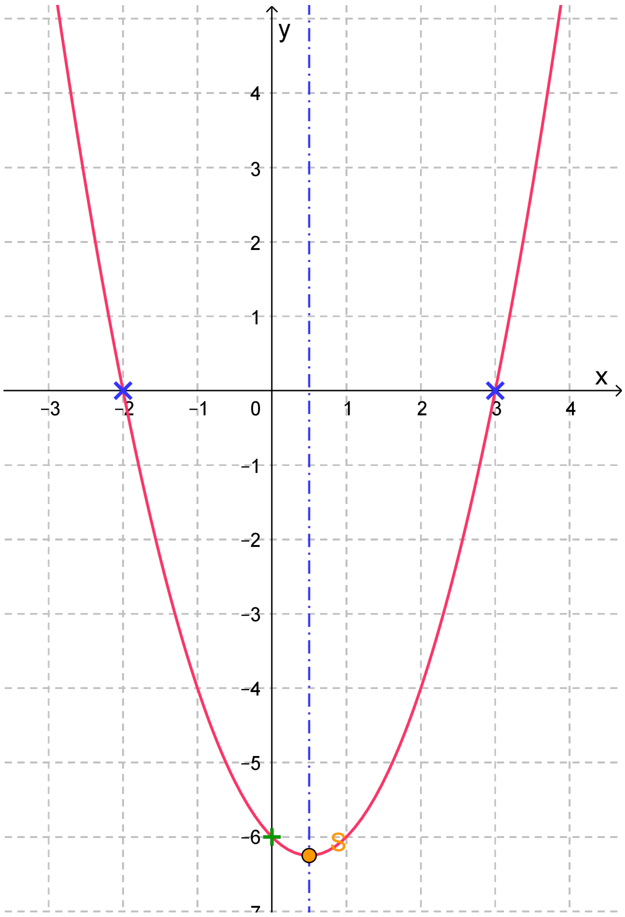
.../2 (b) Trouver les coordonnées de l'autre point d'intersection entre la droite et la parabole ;
Si $p = 1$ l'équation de la parabole est : $P \equiv y = x^2 - x - 6$. En résolvant le système :

$$\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

on trouve les solutions $S = \{(-2; 0); (4; 6)\}$

.../3 (c) Dessiner la parabole après avoir déterminé ses caractéristiques.
L'équation de la parabole est $P \equiv y = x^2 - x - 6$

- $S\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$
- $AS \equiv x = \frac{1}{2}$
- Intersection avec Ox : $(-2; 0)$ et $(3; 0)$
- Intersection avec Oy : $(0; -6)$
- $a > 0$, le sommet est un minimum (la concavité de la courbe est dirigée vers le haut).



.../5 (d) Pour quelle(s) valeur(s) de p, la parabole P est-elle tangente à le droite d.

On résoud le système

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 - 3(p+1) - px \\ y = x + 2 \end{array} \right.$$

et on exprime que ce système n'admet qu'une solution. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 - 3(p+1) - px \\ y = x + 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2 = x^2 - 3(p+1) - px \\ y = x + 2 \end{array} \right.$$

La première équation est une équation du second degré dont le Δ doit être nul (pour que le système n'ait qu'une solution). On a :

$$x^2 - (p+1)x - 3p - 5 = 0$$

En annulant le Δ de cette équation, on trouve :

$$p = -7 \pm 2\sqrt{7}$$

.../8 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{x-5}{3x+1} - \dfrac{2x}{x+2} < -3$

$$\frac{x-5}{3x+1} - \frac{2x}{x+2} < -3$$

$$\frac{(x-5)\cdot(x+2) - 2x\cdot(3x+1) + 3\cdot(x+2)\cdot(3x+1)}{(x+2)\cdot(3x+1)} < 0$$

$$\frac{x^2-5x+2x-10-(6x^2+2x)+3\cdot(3x^2+x+6x+2)}{(x+2)\cdot(3x+1)} < 0$$

$$\frac{4x^2+16x-4}{(x+2)\cdot(3x+1)} < 0$$

$$\frac{x^2+4x-1}{(x+2)\cdot(3x+1)} < 0$$

$$x^2+4x-1=0 \quad \Delta = 16+4=20$$

$$x = \frac{-4\pm 2\sqrt{5}}{2} \left\langle \begin{array}{l} -2-\sqrt{5} \\ -2+\sqrt{5} \end{array} \right.$$

x		$-2-\sqrt{5}$		-2		$-\frac{1}{3}$		$-2+\sqrt{5}$	
N	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
D	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
Q	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$$S = \left]-2-\sqrt{5}, -2\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, -2+\sqrt{5}\right[$$

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°2 - Solutions

Rappels de 4ème : le second degré

Série B

Le 30 septembre 2021 Classe: 5B

.../8 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{2x}{x+2} - \dfrac{x-5}{3x+1} > 3$

$$\frac{2x}{x+2} - \frac{x-5}{3x+1} > 3$$

$$\frac{2x\cdot(3x+1)-(x-5)\cdot(x+2)-3\cdot(x+2)\cdot(3x+1)}{(x+2)\cdot(3x+1)} > 0$$

$$\frac{6x^2+2x-(x^2-5x+2x-10)-3\cdot(3x^2+x+6x+2)}{(x+2)\cdot(3x+1)} > 0$$

$$\frac{-4x^2-16x+4}{(x+2)\cdot(3x+1)} > 0$$

$$\frac{-x^2-4x+1}{(x+2)\cdot(3x+1)} > 0$$

$$-x^2-4x+1=0 \quad \Delta = 16+4=20$$

$$x = \frac{4\pm 2\sqrt{5}}{-2} \left\langle \begin{array}{l} -2-\sqrt{5} \\ -2+\sqrt{5} \end{array} \right.$$

x		$-2-\sqrt{5}$		-2		$-\frac{1}{3}$		$-2+\sqrt{5}$	
N	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
D	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
Q	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

$$S = \left]-2-\sqrt{5}, -2\right] \cup \left]-\frac{1}{3}, -2+\sqrt{5}\right]$$

2. On donne la droite $d \equiv y = 3 - x$ et la parabole $P \equiv y = x^2 - 2(2p+1) + (p-2)x$ où p est une paramètre réel.

.../2 (a) Montrer que si $p = 1$, la parabole P coupe la droite d sur l'axe Ox (c'est-à-dire en un point d'ordonnée nulle) ;
La parabole coupe la droite sur l'axe Ox si $x = 3$ (car $y = 0$). En remplaçant dans l'équation de la parabole, on a :

$$0 = 9 - 4p - 2 + 3p - 6 \Leftrightarrow p = 1$$

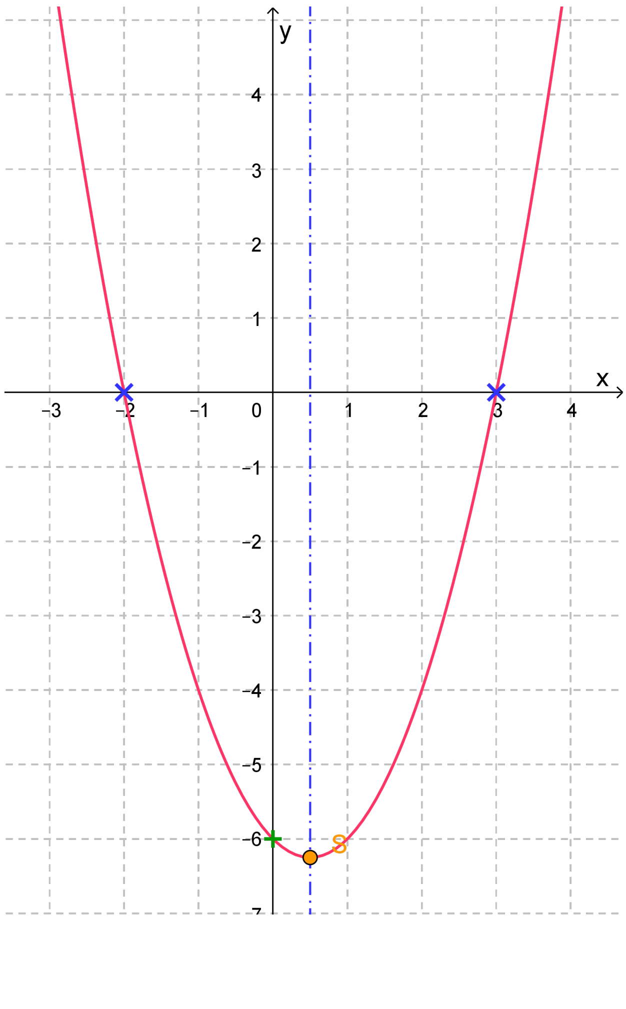
.../2 (b) Trouver les coordonnées de l'autre point d'intersection entre la droite et la parabole ;
Si $p = 1$ l'équation de la parabole est : $P \equiv y = x^2 - x - 6$. En résolvant le système :

$$\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ y = 3 - x \end{cases}$$

on trouve les solutions $S = (-3; 6); (3; 0)$

.../3 (c) Dessiner la parabole après avoir déterminé ses caractéristiques.
L'équation de la parabole est $P \equiv y = x^2 - x - 6$

- $S\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$
- $AS \equiv x = \frac{1}{2}$
- Intersection avec Ox : $(-2; 0)$ et $(3; 0)$
- Intersection avec Oy : $(0; -6)$
- $a > 0$, le sommet est un minimum (la concavité de la courbe est dirigée vers le haut).



.../5 (d) Pour quelle(s) valeur(s) de p, la parabole P est-elle tangente à le droite d.

On résoud le système

$$\begin{cases} y = x^2 - 2(2p+1) + (p-2)x \\ y = 3 - x \end{cases}$$

et on exprime que ce système n'admet qu'une solution. On a

$$\begin{cases} y = x^2 - 2(2p+1) + (p-2)x \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2(2p+1) + (p-2)x = 3 - x \\ y = 3 - x \end{cases}$$

. La première équation est une équation du second degré dont le Δ doit être nul (pour que le système n'ait qu'une solution). On a :

$$x^2 + (p-1)x - 4p - 5 = 0$$

En annulant le Δ de cette équation, on trouve :

$$p = -7 \pm 2\sqrt{7}$$