Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°13 - Solutions

Les asymptotes

Le 28 avril 2022 Classe: 5B - C

.../10 1. On donne la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x - 1$. Déterminer les équations des asymptotes de $f(x)$.

- $dom_f = \mathbb{R}$. Il n'y a donc pas d'AV.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$ F.I.

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+1}-(x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]}{\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2-2x-1}{\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\left[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right]} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\left[\sqrt{x^2}+x\right]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{[|x|+x]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{[x+x]} = -1$$

Il y a donc une $AH_d \equiv y = -1$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Il n'y a donc pas d'$AH_g$. Cherchons l'AO.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|-x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-x}{x} = -2$$

$$p = \lim_{x\to-\infty} [f(x)+2x] = \lim_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2+1}+x-1\right] = \infty - \infty \text{ F.I.}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+1}+(x-1)\right]\left[\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right]}{\left[\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2+2x-1}{\left[\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right]}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\left[\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right]} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\left[\sqrt{x^2}-x\right]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{[|x|-x]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{[-x-x]} = -1$$

Il y a donc une $AO_g \equiv y = -2x - 1$.

.../10 2. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{-3x^2 + 10x - 3}$

.../5 (a) Déterminer l'équation des asymptotes de $g(x)$.

- $dom_f = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{1}{3}, 3 \right\}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} f(x) = \pm\infty$. Il y a donc une AV$\equiv x = \frac{1}{3}$.

  Par contre, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} f(x) = -\frac{7}{8}$. Il n'y a donc pas d'AV en $x = 3$.

- $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

  $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{-3x^2} = -\frac{2}{3}$$

  Il y a donc une AH$_d \equiv y = -\frac{2}{3}$.

.../5 (b) Etudier la position relative de la courbe par rapport aux asymptotes.

Pour l'asymptote verticale, il faut étudier le signe de la fonction autour de $x = \frac{1}{3}$.
Le tableau de signe de cette fonction est :

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		3	
$N(x)$	+	0	-		-	0	+
$D(x)$	-		-	0	+	0	-
$f(x)$	-	0	+	AV	-	$-\frac{7}{8}$	-

On a donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^+} f(x) = -\infty$.
Pour l'asymptote horizontale, on calcul la distance enter la courbe et l'asymptote par :

$$d(x) = f(x) - y_{AH} \Leftrightarrow d(x) = \frac{5}{3(1 - 3x)}$$

Le tableau de signe de cette fonction est :

x		$\frac{1}{3}$	
$d(x)$	+	AV	-

La courbe est au-dessus de l'asymptote en $-\infty$ et en dessous en $-\infty$.