Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°10 - Solutions

Inéquations trigonométriques

Série A

Le 9 mai 2019 Classe: 5A

Résoudre :

.../6 1. $\sin 2x + 2\cos x < 0$

L'inéquation s'écrit $2\sin x\cos x + 2\cos x < 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x + 1) < 0 \Leftrightarrow 2\cos x < 0$ (puisque $\sin x + 1$ est toujours positif !).

La solution est donc : $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

.../7 2. $\tan x - \cot x < \tan\frac{\pi}{4}$

L'inéquation s'écrit $\tan x - \frac{1}{\tan x} < 1 \Leftrightarrow \frac{\tan^2 x - \tan x - 1}{\tan x} < 0.$

Si on pose $y = \tan x$, on doit résoudre l'inéquation $\frac{y^2 - y - 1}{y} < 0$ dont le tableau de signe est :

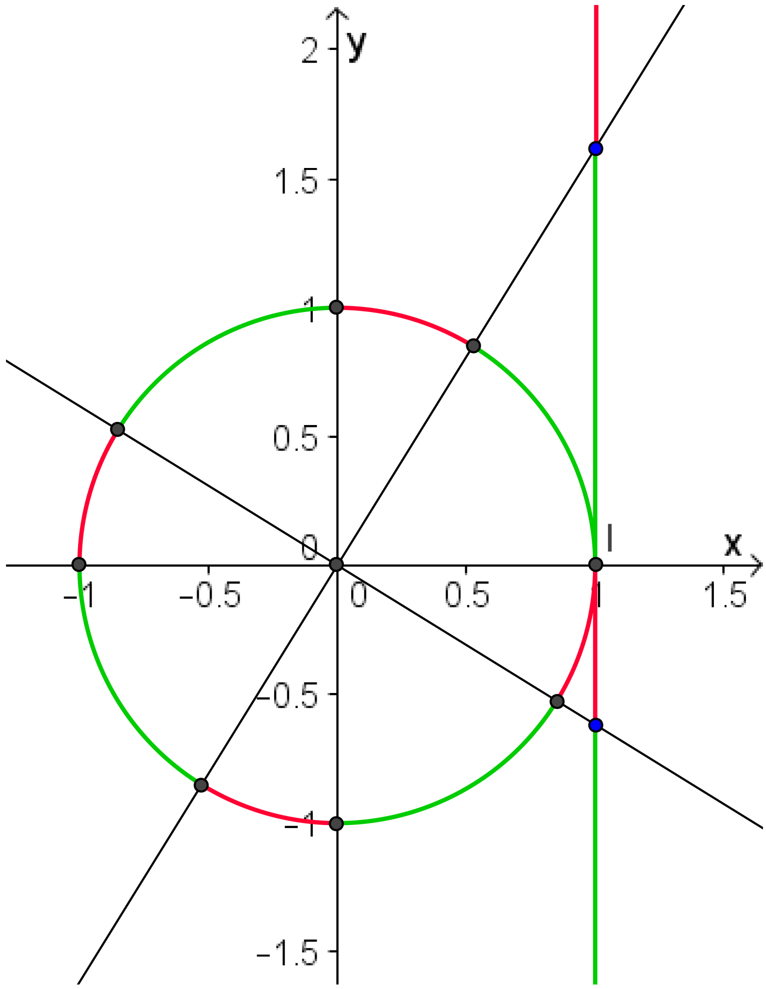
y		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
$y^2 - y - 1$	+	0	-		-	0	+
y	-		-	0	+		+
In	-	0	+	$\nexists$	-	0	+

dont la solution est

$$y \in -\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left[\cup\right]0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left[\right.$$

ou, à l'aide du cercle trigonométrique ci-dessous :

$$x \in \left]0; 1,017\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; 2,588\right[+ k\pi$$



.../7 3. $\sin 3x \geq \sin x$

L'inéquation s'écrit, à l'aide des formules de Simpson :
$\sin 3x - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x \sin x \geq 0$.
Les zéros de cette expression sont :

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \end{cases}$$

Le tableau de signe est donc :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$\cos 2x$		$+$	0	-	0	$+$		$+$	0	-	0	$+$	
$\sin x$	0	$+$		$+$		$+$	0	-		-		-	0
$In(x)$	0	$+$	0	-	0	$+$	0	-	0	$+$	0	-	0

et la solution est :

$$S : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$$

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°10 - Solutions

Inéquations trigonométriques

Série B

Le 9 mai 2019 Classe: 5A

Résoudre :

.../6 1. $2\cos x - \sin 2x < 0$

L'inéquation s'écrit $2\cos x - 2\sin x\cos x < 0 \Leftrightarrow 2\cos x(1-\sin x) < 0 \Leftrightarrow 2\cos x < 0$ (puisque $1-\sin x$ est toujours positif !).

La solution est donc : $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

.../7 2. $\cot x - \tan x < \tan\frac{\pi}{4}$

L'inéquation s'écrit $\frac{1}{\tan x} - \tan x < 1 \Leftrightarrow \frac{-\tan^2 x - \tan x + 1}{\tan x} < 0$.

Si on pose $y = \tan x$, on doit résoudre l'inéquation $\frac{-y^2 - y + 1}{y} < 0$ dont le tableau de signe est :

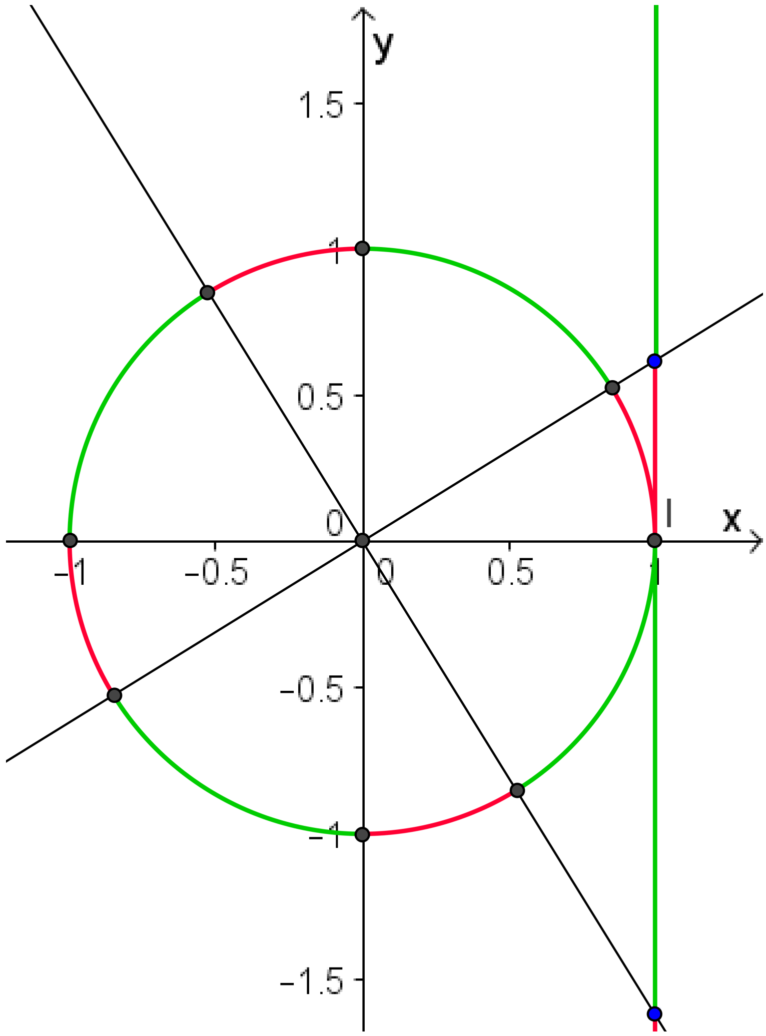
y		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	
$y^2 - y - 1$	-	0	+		+	0	-
y	-		-	0	+		+
In	+	0	-	$\nexists$	+	0	-

dont la solution est

$$y \in \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right.$$

ou, à l'aide du cercle trigonométrique ci-dessous :

$$x \in \left]0,554; \frac{\pi}{2}\right[\cup]2,125; \pi[+ k\pi$$



.../7 3. $\sin x \geq \sin 3x$

L'inéquation s'écrit, à l'aide des formules de Simpson :
$\sin x - \sin 3x \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x \sin(-x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x \sin x \leq 0$.
Les zéros de cette expression sont :

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \end{cases}$$

Le tableau de signe est donc :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$\cos 2x$		+	0	-	0	+		+	0	-	0	+	
$\sin x$	0	+		+		+	0	-		-		-	0
$In(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0

et la solution est :

$$S : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$