# Nom, Prénom:

## Devoir surveillé n°1 - Solutions

## Inéquation irrationnelle

## Série A

Le 22 octobre 2018 — Classe: 5A (M8)

On cherche à résoudre l'inéquation irrationnelle suivante :

$$\sqrt{\frac{1-x}{x+2}} \geq \frac{x-1}{x+1}$$

.../2 1. Etablir les conditions d'existence de cette inéquation.

La CE est $\dfrac{1-x}{x+2} \geq 0$. Le tableau de signe de cette inéquation est :

| $x$ | | -2 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | + | | + | 0 | - |
| $x+2$ | - | 0 | + | | + |
| $E(x)$ | - | $\nexists$ | + | 0 | - |

On a donc $x \in \left]-2, 1\right] \setminus \{-1\}$.

.../2 2. Etudier le signe de

$$\frac{x-1}{x+1}$$

Le tableau de signe de cette expression est :

| $x$ | | -1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | - | | - | 0 | + |
| $x+1$ | - | 0 | + | | + |
| $E(x)$ | + | $\nexists$ | - | 0 | + |

.../16 3. Sur base de cette étude de signe, résoudre l'inéquation proposée.

(a) Si $x \in \left]-2, -1\right[$, le second membre est positif et élever l'inéquation au carré ne change pas le sens de l'inégalité. On a successivement

$$\frac{1-x}{x+2} \geq \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{1-x}{x+2} - \frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x+2} + \frac{(1-x)(x-1)}{(x+1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow (1-x)\left[\frac{1}{x+2} + \frac{(x-1)}{(x+1)^2}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left[\frac{x^2+2x+1+x^2+x-2}{(x+2)(x+1)^2}\right] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)(2x^2+3x-1)}{(x+2)(x+1)^2} \geq 0$$

Le tableau de signe de cette expression donne :

| $x$ | | -2 | | $\frac{-3-\sqrt{17}}{4}$ | | -1 | | $\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | + | | + | | + | | + | | + | 0 | - |
| $2x^2+3x-1$ | + | | + | 0 | - | | - | 0 | + | | + |
| $x+2$ | - | 0 | + | | + | | + | | + | | + |
| $(x+1)^2$ | + | | + | | + | 0 | + | | + | | + |
| $E(x)$ | - | $\nexists$ | + | 0 | - | $\nexists$ | - | 0 | + | 0 | - |

Si l'on ne garde que les solutions comprises entre -2 et -1, on a :

$$S_1 : \left]-2, \frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right]$$

(b) Si $x \in ]-1, 1]$, le second membre est négatif et élever l'inéquation au carré change le sens de l'inégalité. L'inéquation devient

$$\frac{(1-x)(2x^2+3x-1)}{(x+2)(x+1)^2} \leq 0$$

D'après le tableau de signe du point précédent, les solutions à considérer entre -1 et 1 sont :

$$S_2 : \left]-1, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right]$$

La solution finale est $S : S_1 \cup S_2$

# Nom, Prénom:

## Devoir surveillé n°1 - Solutions

## Inéquation irrationnelle

## Série B

Le 22 octobre 2018 — Classe: 5A (M8)

On cherche à résoudre l'inéquation irrationnelle suivante :

$$\frac{x-1}{x-3} \leq \sqrt{\frac{x-1}{4-x}}$$

Les développements sont similaires à ceux de la série A.

1. Etablir les conditions d'existence de cette inéquation.
   $x \in [1, 4[ \setminus \{3\}$
2. Etudier le signe de
   $$\frac{x-1}{x-3}$$
   Le tableau de signe est :

| $x$ | | $1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | - | 0 | + | | + |
| $x-3$ | - | | - | 0 | + |
| $E(x)$ | + | 0 | - | $\nexists$ | + |

3. Sur base de cette étude de signe, résoudre l'inéquation proposée.
   Si $x \in [1, 3[$, l'inéquation simplifiée est
   $$\frac{(x-1)(-2x^2+11x-13)}{(x-3)^2(4-x)} \geq 0$$
   Le tableau de signe est :

| $x$ | | $1$ | | $\frac{11-\sqrt{17}}{4}$ | | $3$ | | $\frac{11+\sqrt{17}}{4}$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | - | 0 | + | | + | | + | | + | | + |
| $-2x^2+11x-13$ | - | | - | 0 | + | | + | 0 | - | | - |
| $(x-3)^2$ | + | | + | | + | 0 | + | | + | | + |
| $4-x$ | + | | + | | + | | + | | + | 0 | - |
| $E(x)$ | + | 0 | - | 0 | + | $\nexists$ | + | 0 | - | $\nexists$ | + |

   et la solution globale est $S$ : $\left[\frac{11-\sqrt{17}}{4}, 3\right[ \cup \left[\frac{11+\sqrt{17}}{4}, 4\right[$