Applications de la dérivée : Solutions

1. Trouver les extremums des fonctions suivantes et en étudier les variations :

   (a) $f(x) = x^3 - 3x$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$
		$(-1, 2)$		$(1, -2)$	

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{\sqrt{x-1}}$

Déterminer les coordonnées de ces extremums.

CE : $x > 1$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x-1} - \dfrac{x^2+2}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}$$

$$= \frac{4x(x-1) - (x^2+2)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x - x^2 - 2}{D}$$

$$= \frac{3x^2 - 4x - 2}{2(x-1)\sqrt{(x-1)}}$$

zéros

N : $\Delta = 16 + 24 = 40$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

D : $x = 1$

x		$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$		1		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$	
N	+	0	−		−	0	+
D	−		−	0	+		+
$f'(x)$	−	0	+	$\nexists$	−	0	+
$f(x)$					$\searrow$	m	$\nearrow$

$$\left(\frac{2+\sqrt{10}}{3}\ ;\ \frac{4\sqrt{30}\left(\sqrt{10}+78\right)}{9}\right)$$

2. Etudier les variations de la fonction $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3}$ et écrire l'équation de la tangente au graphique de $f(x)$ au point d'abscisse 2.

$$f'(x) = \frac{x^2-3-(x+2)2x}{(x^2-3)^2}$$

$$= \frac{x^2-3-2x^2-4x}{D}$$

$$= \frac{-x^2-4x-3}{D}$$

__zéros__ : N : $\Delta = 16-12 = 4 \qquad x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{-2} \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ -3 \end{array} \right.$

D : $x = \pm\sqrt{3}$

x		-3		$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$	
N	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
D	$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	↘	m	↗	AV.	↗	M	↘	AV	↘
		$(-3, -\frac{1}{6})$				$(-1, -\frac{1}{2})$			

$f(2) = 4$ et $f'(2) = -15$

$t \equiv y - 4 = -15(x-2)$

$\equiv y = -15x + 34$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

3. Calculer la valeur de a pour que la fonction $f(x) = x^2 + ax + 1$ ait un minimum en $x = 2$.

Il faut imposer que $f'(2) = 0$

$f'(x) = 2x + a$

$f'(2) = 0 \iff 2.2 + a = 0 \iff a = -4$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

4. On donne la fonction $f(x) = x^3 - 4ax + b$ où a et b sont des nombres réels. Déterminer a et b pour que $f(x)$ soit minimum en $x = 1$ et comprennent le point (1,-5).

Il faut imposer $f'(1) = 0$ et $f(1) = -5$

$f'(x) = 3x^2 - 4a$

$f'(1) = 0 \iff 3.1 - 4a = 0 \iff a = \frac{3}{4}$

$f(1) = -5 \iff 1 - 4.\frac{3}{4}.1 + b = -5$

$\iff 1 - 3 + b = -5$

$\iff b = -3$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

5. Trouver m et p pour que le graphique de $f(x) = \dfrac{x^2+mx+p}{2(x+1)}$ ait un minimum en $x=1$ et passe par le point $(0,1)$. m et p sont des nombres réels.

Il faut imposer $f'(1)=0$ et $f(0)=1$

$$f(0)=1 \iff \frac{p}{2}=1 \iff p=2$$

$$f'(x) = \frac{(2x+m)(x+1)-(x^2+mx+2)}{2(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2x+\cancel{mx}+m-x^2-\cancel{mx}-2}{D}$$

$$= \frac{x^2+2x+m-2}{2(x+1)^2}$$

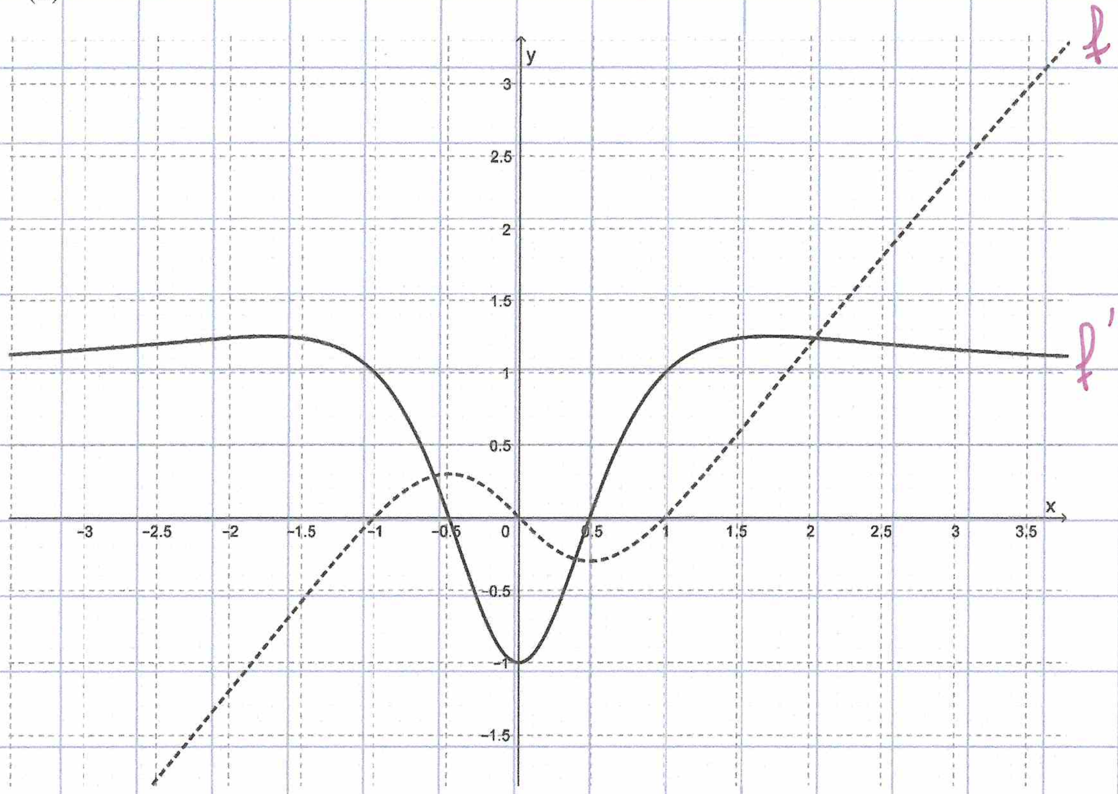
$$f'(1)=0 \iff \frac{1+2+m-2}{2.4}=0$$

$$\iff m=-1$$

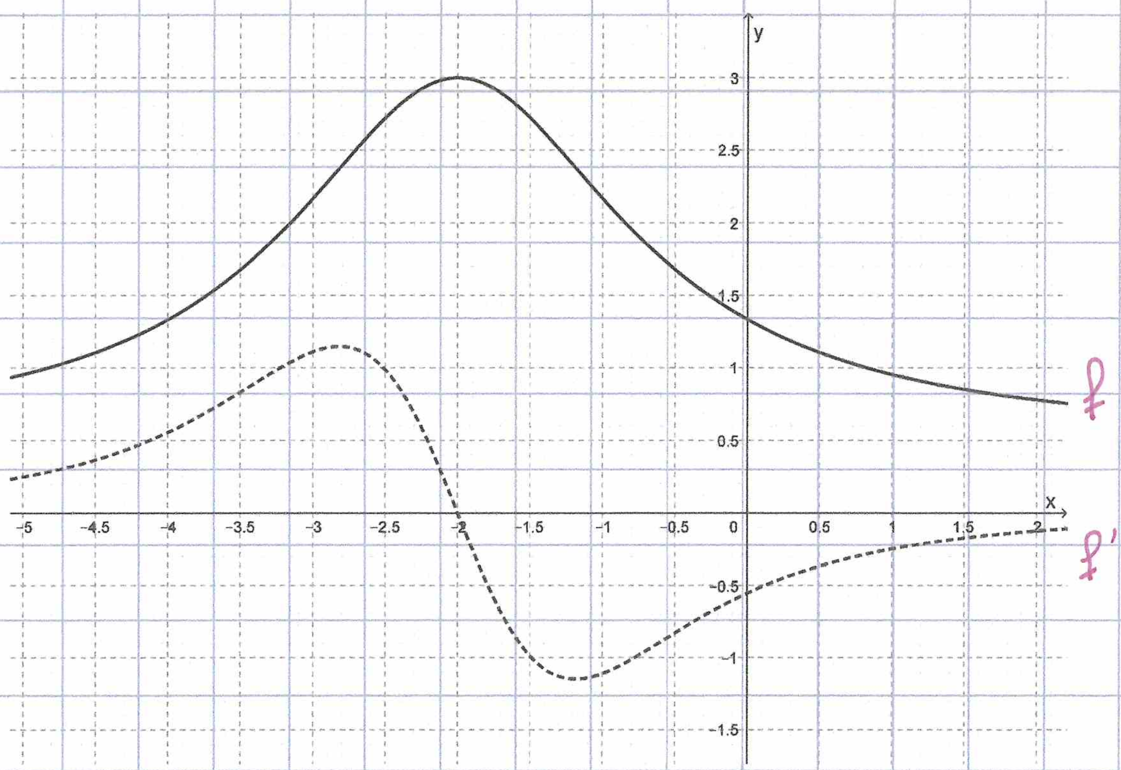
Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

6. Dans les graphes suivants, une courbe représente le graphe d'une fonction et l'autre, celui de sa dérivée première. On demande d'identifier chacun de ces graphes.

(a)

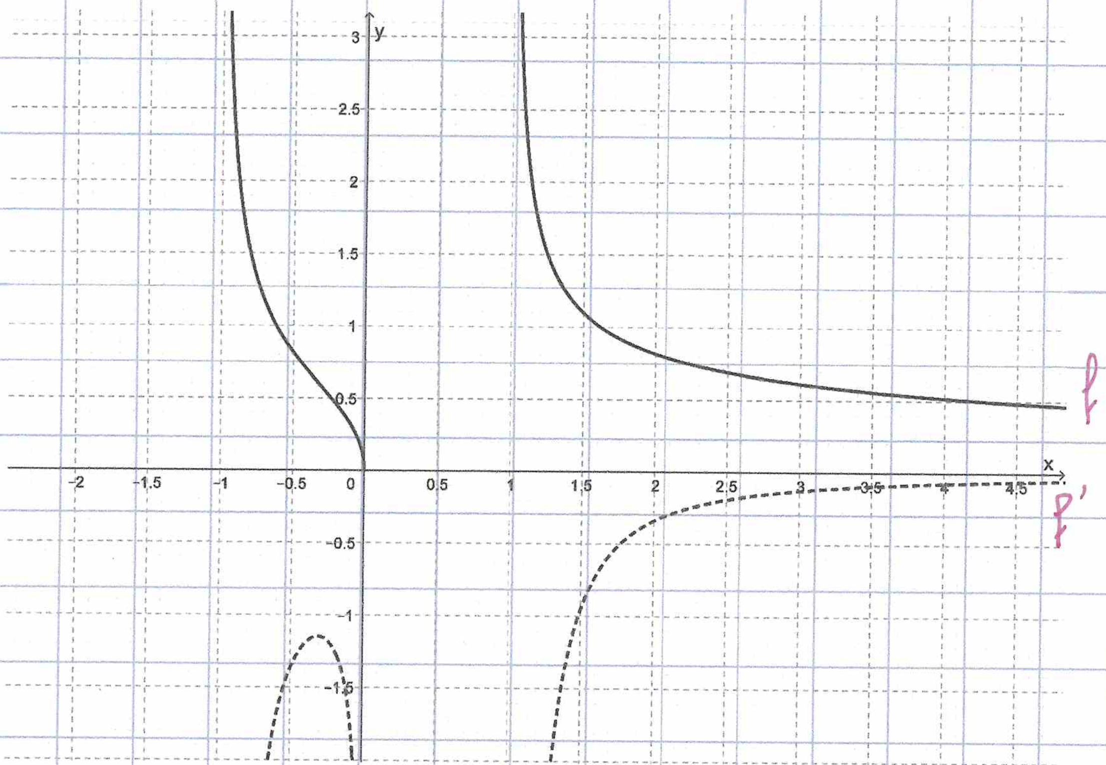


(b)

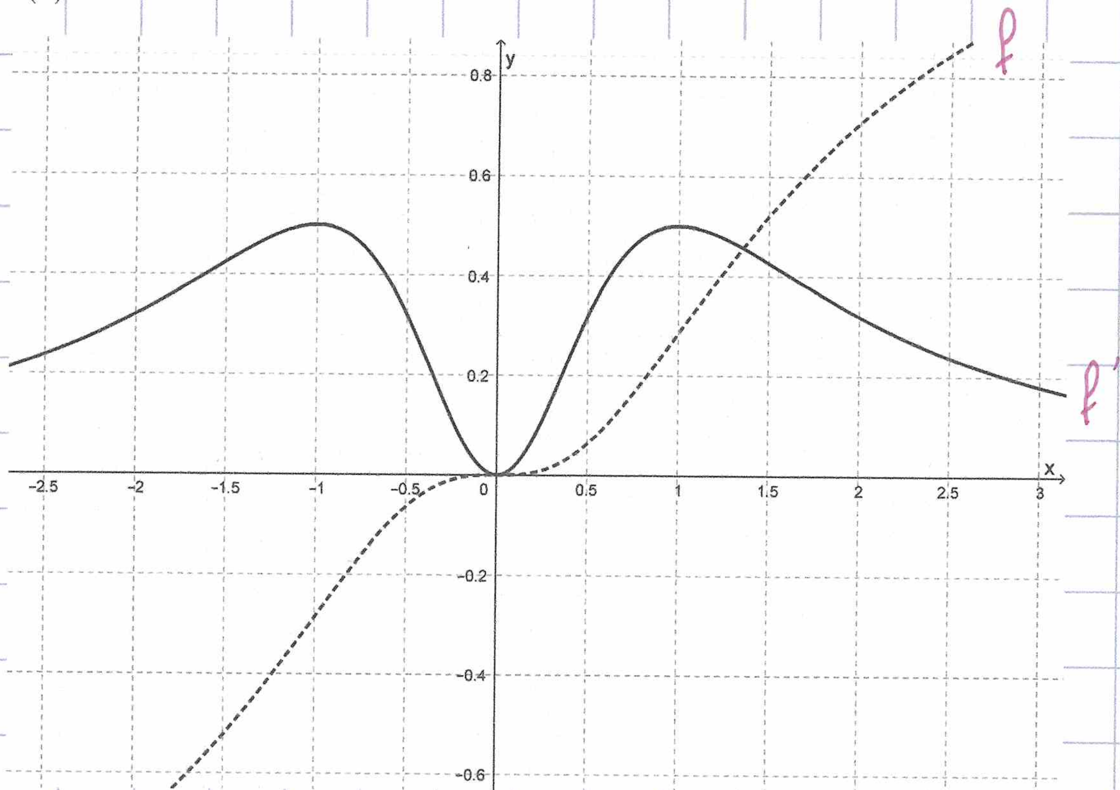


Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(c)

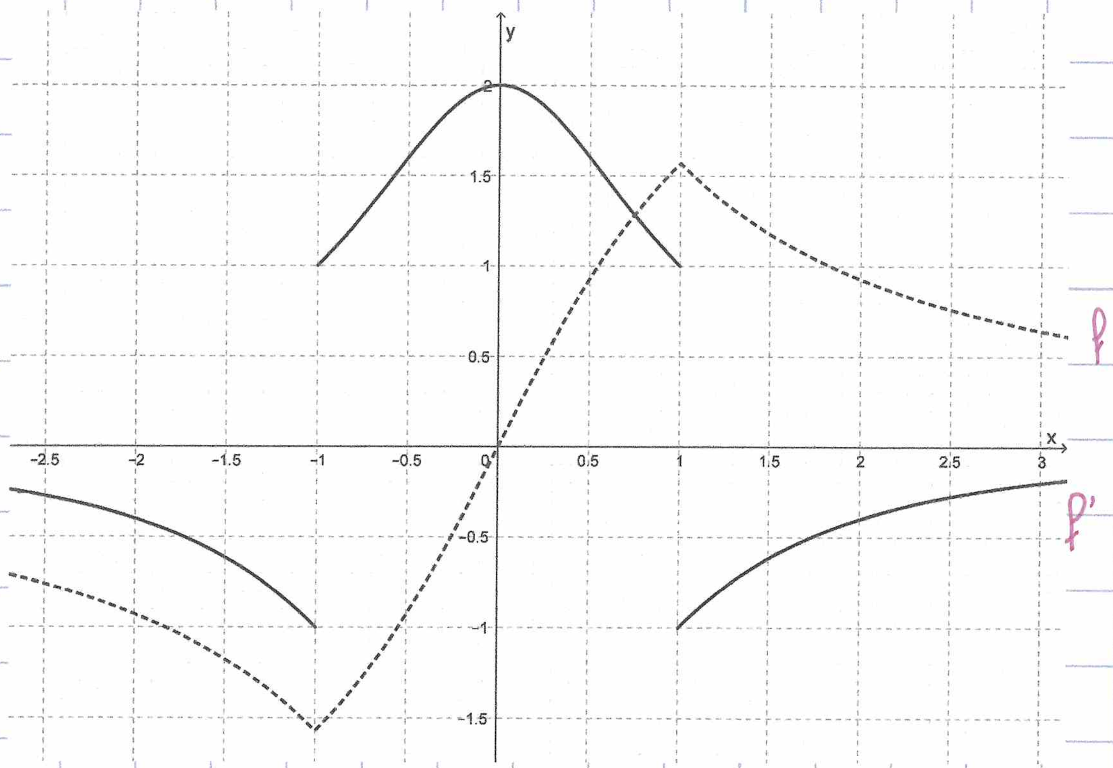


(d)

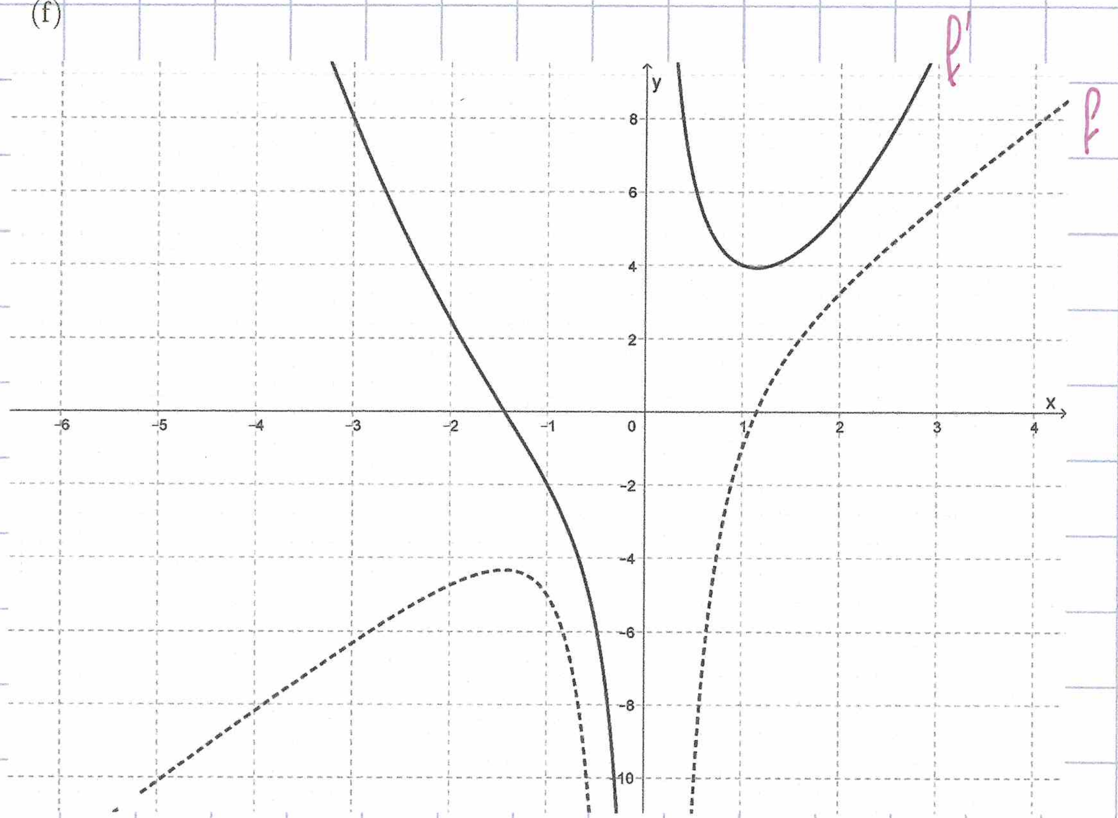


Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(e)



(f)

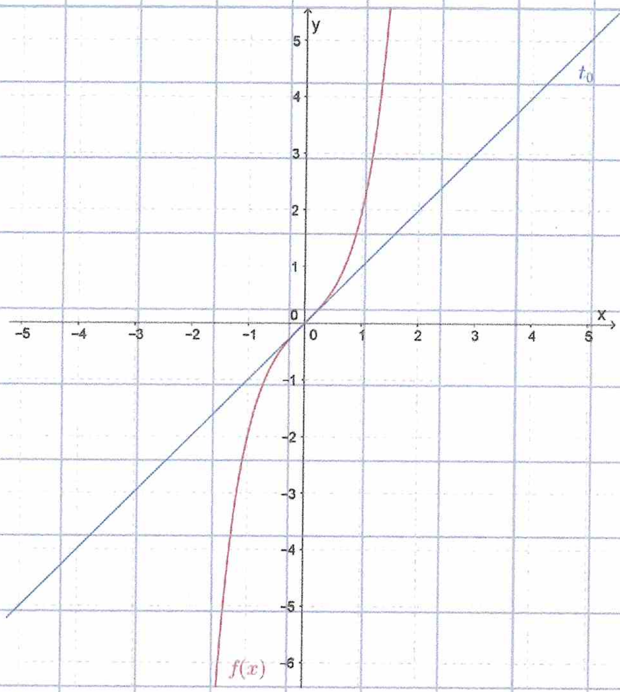


Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

7. On donne les tableaux de variations suivants. Après avoir complété le tableau en ayant fait apparaitre la variation et la concavité de la fonction, établir une ébauche de graphe pour chaque fonction ainsi décrite.

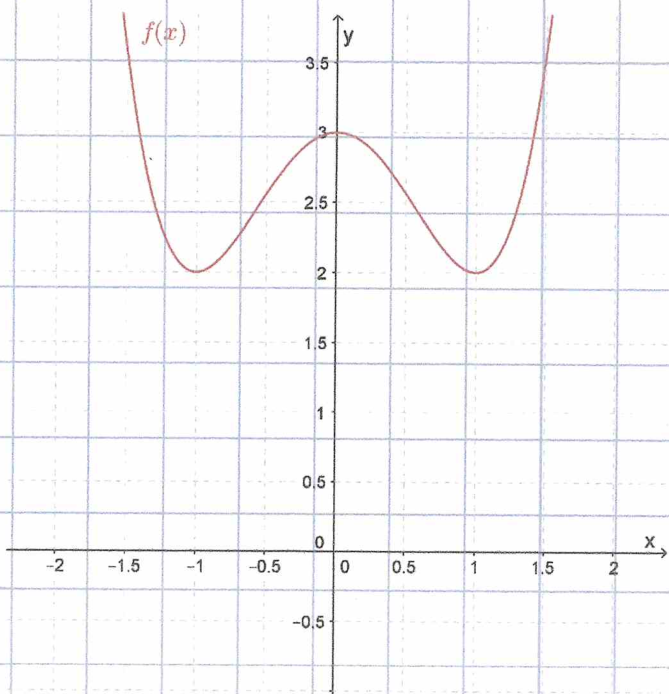
(a)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	1	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
		$\cap$		$\cap$	PI	$\cup$		$\cup$	



(b)

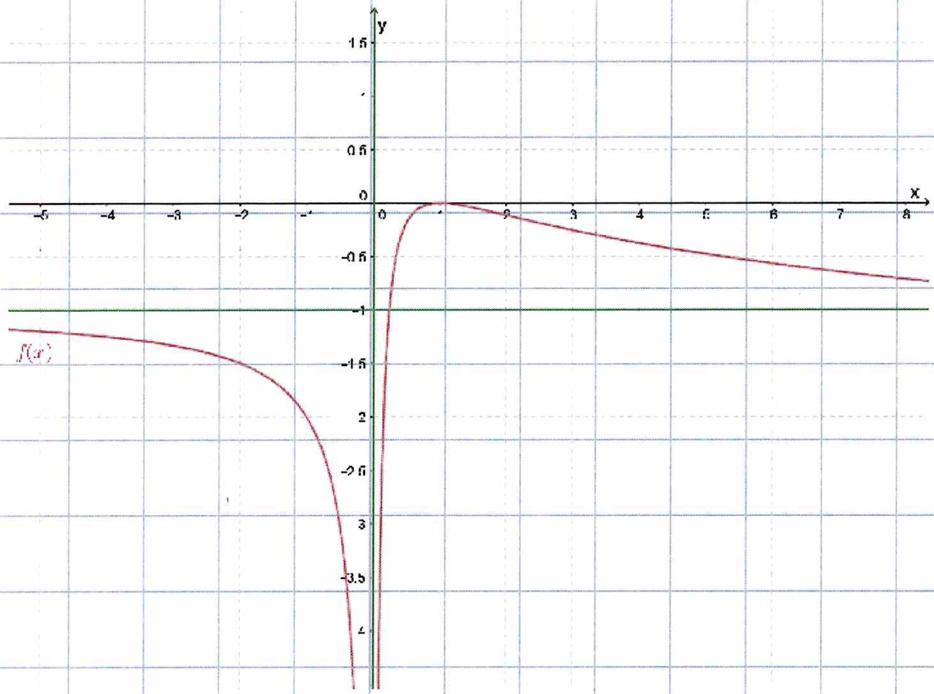
x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	2.6	$\nearrow$	3	$\searrow$	2.6	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
		$\cup$	m	$\cup$	PI	$\cap$	M	$\cap$	PI	$\cup$	m	$\cup$	



Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

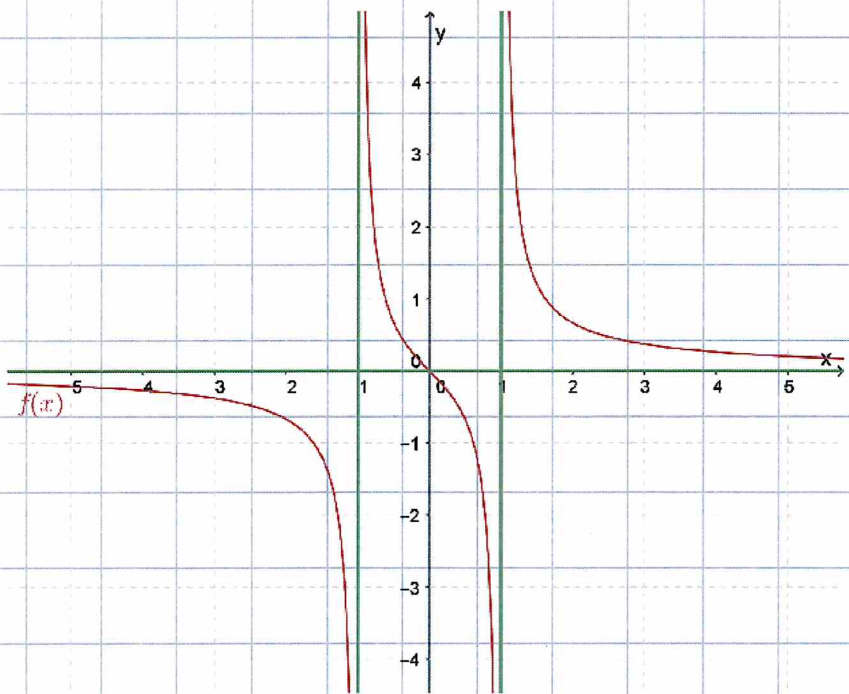
(c)

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$\vert$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty\vert-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{5}$	$\searrow$	-1
	$AH \equiv y=-1$	$\cap$	AV	$\cap$	M	$\cap$	PI	$\cup$	$AH \equiv y=-1$



(d)

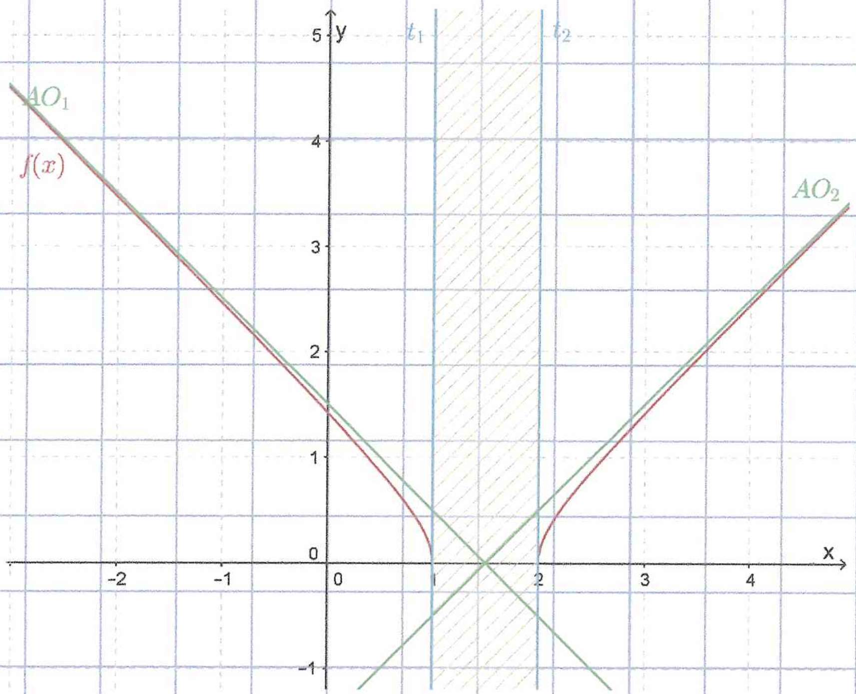
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\vert$	$-$	$-$	$-$	$\vert$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty\vert^{+\infty}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty\vert^{+\infty}$	$\searrow$	0
	$AH \equiv y=0$	$\cap$	AV	$\cup$	PI	$\cap$	AV	$\cup$	$AH \equiv y=0$



Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

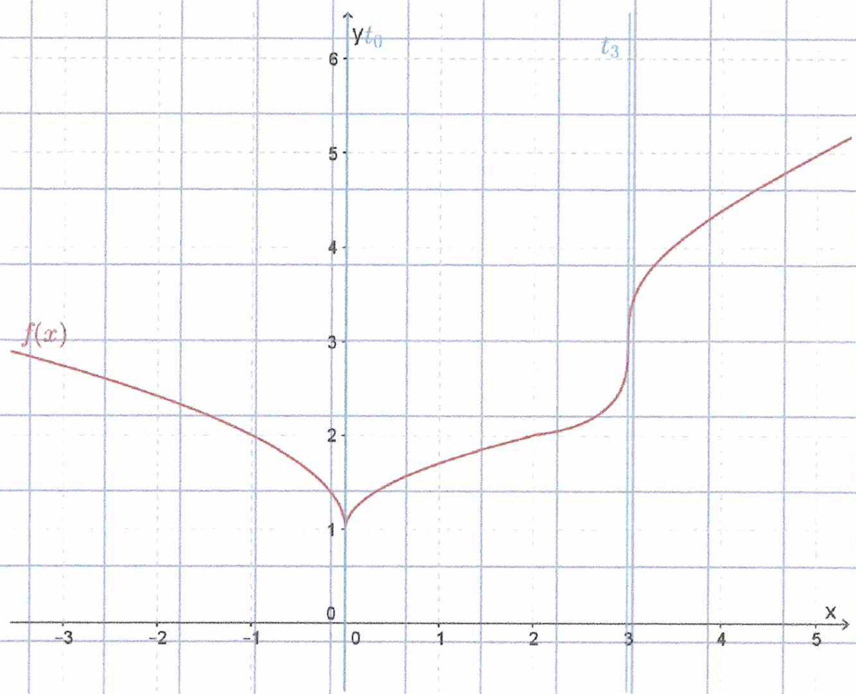
(e)

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$	//////////////	$+\infty$	$+$	
$f''(x)$		$-$		//////////////		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	//////////////	0	$\nearrow$	$+\infty$
	$AO \equiv y = -x + \frac{3}{2}$	$\cap$	TV		TV	$\cap$	$AO \equiv y = x - \frac{3}{2}$



(f)

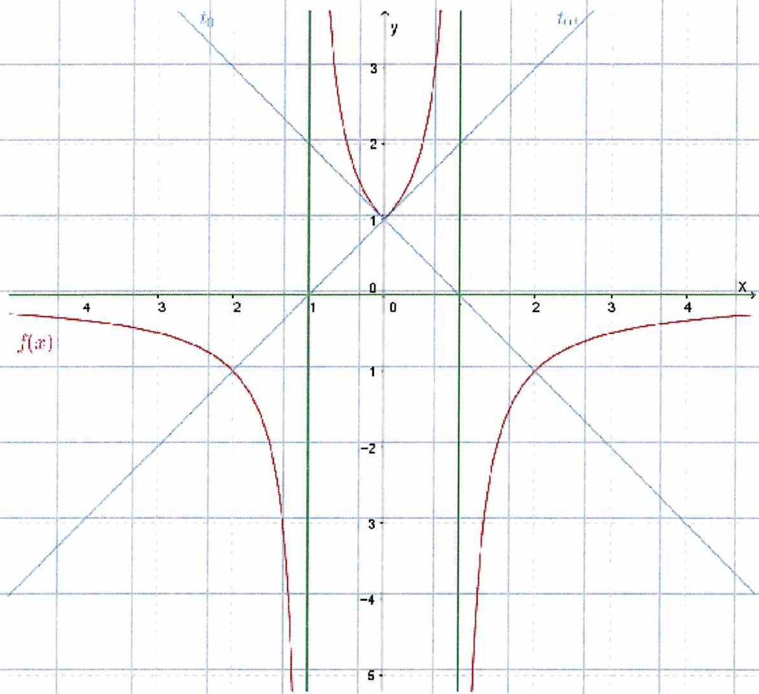
x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$ $+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+\infty$ $+\infty$	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
		$\cap$	PR	$\cap$	PI	$\cup$	$PI - TV$	$\cap$	



Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

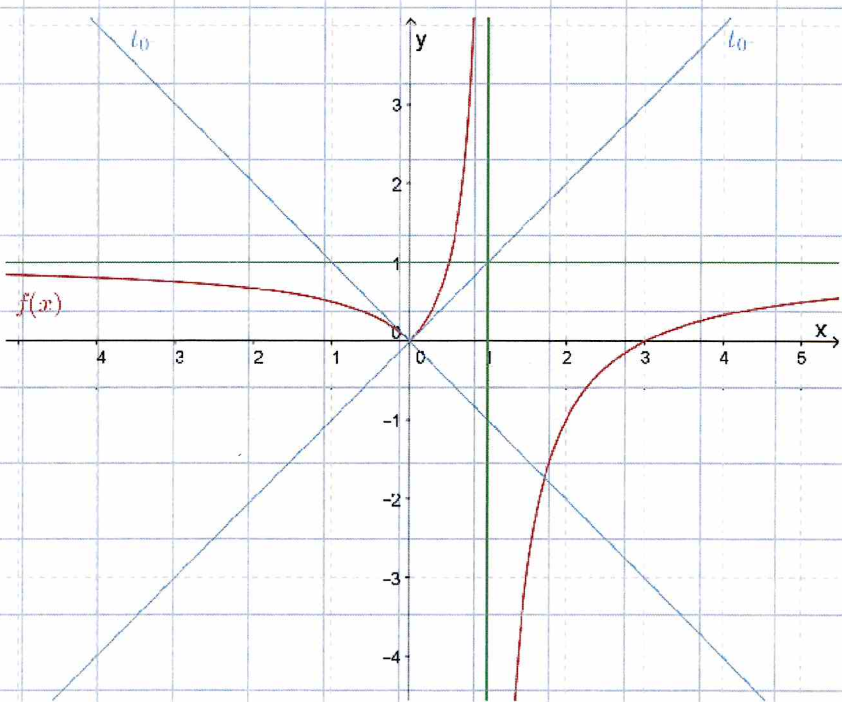
(g)

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	$\vert$	$-$	$-1\vert^{+1}$	$+$	$\vert$	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty\vert^{+\infty}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0
	$AH \equiv y = 0$	$\cap$		$\cap$	AV	$\cup$	PA	$\cup$	AV	$\cap$		$\cap$	$AH \equiv y = 0$



(h)

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-1\vert^{+1}$	$+$	$\vert$	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	1
	$AH \equiv y = 1$	$\cap$	PA	$\cup$	AV	$\cap$		$\cap$	$AH \equiv y = 1$



Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

7. (a) Etude de fonction complète : $f(x) = (x+2)^2(x-1)$

i. Domaine :
CE : Il n'y en a pas. Le domaine est donc $\mathbb{R}$

ii. Zéros :

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+2)^2(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Les zéros sont donc $x = -2$ et $x = 1$ (qui sont tous les deux dans le domaine de définition de la fonction).

iii. Intersection avec l'axe 0y : $f(0) = -4$.

iv. Parité : Les zéros n'étant pas symétriques par rapport à x=0, la fonction n'est donc ni paire ni impaire.

v. Signe : Le signe est résumé dans le tableau de signe suivant :

x		-2		1	
$(x+2)^2$	+	0	+		+
$(x-1)$	-		-	0	+
$f(x)$	-	0	-	0	+

vi. Asymptotes

A. Asymptote verticale : il n'y en a pas car aucun point n'est rejeté du domaine.

B. Il n'y a pas d'asymptote horizontale ni oblique car on est en présence d'une fonction rationnelle et le degré du numérateur et supérieur au degré du dénominateur de plus d'une unité.

vii. Dérivée première : On a successivement :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(x+2)^2(x-1)\right]' \\ &= 2(x+2)(x-1) + (x+2)^2 \\ &= (x+2)3x \end{aligned}$$

Le tableau de signe de la dérivée première est détaillé ci-dessous

x		-2		0	
$(x+2)$	-	0	+		+
$3x$	-		-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
	$\nearrow$	M (-2,0)	$\searrow$	m (0,-4)	$\nearrow$

Ce tableau est le ***tableau de variation de la fonction*** $f(x)$.

viii. Dérivée seconde : Lorsque que l'on redérive la fonction obtenue au point 7(e)vii, on obtient :

$$f''(x) = 6(x+1)$$

Le tableau de signe de la dérivée seconde est :

x		-1	
$(x+1)$	-	0	+
$f''(x)$	-	PI	+
	$\cap$	(-1,-2)	$\cup$

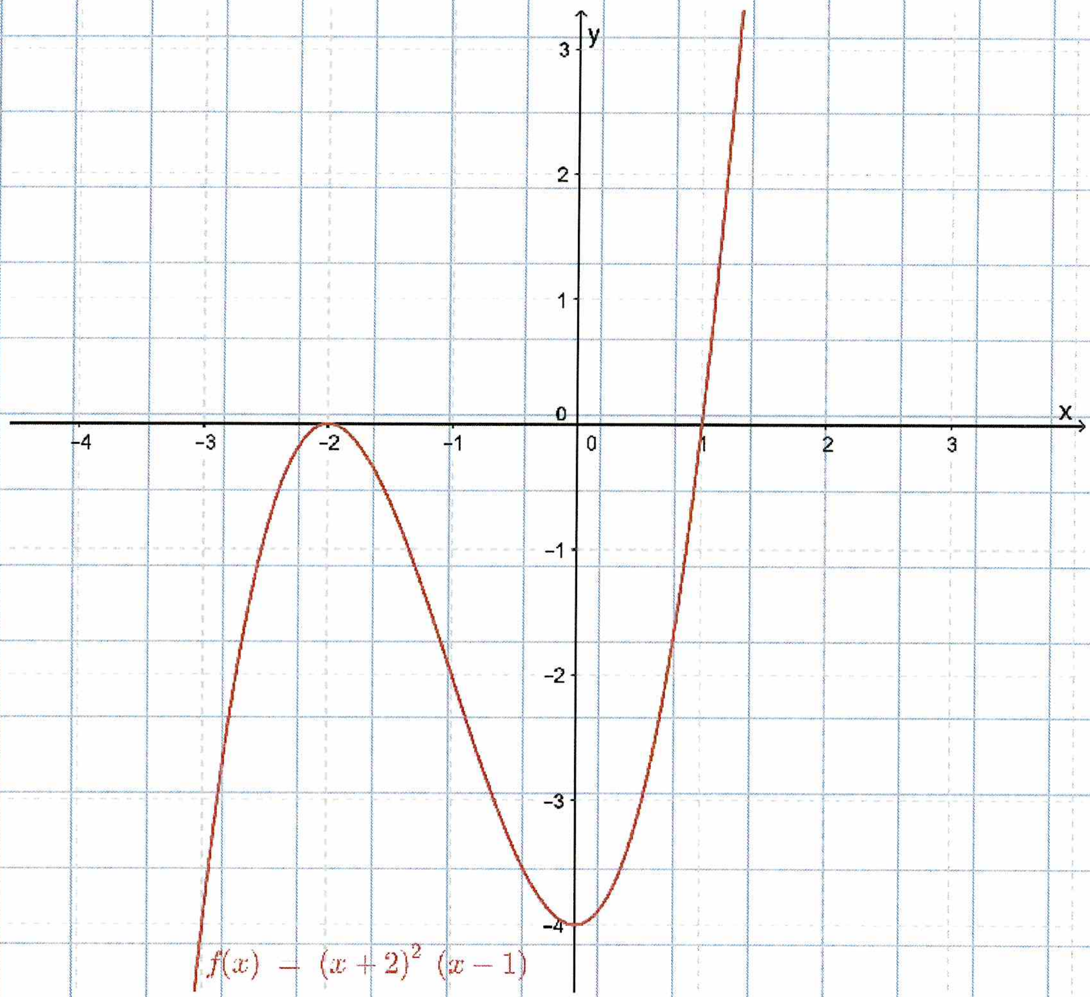
Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

ix. Tableau récapitulatif :

Le tableau récapitulatif du comportement de la fonction est présenté ci-dessous.

x		-2		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	-		-	0	$+$		$+$
$f''(x)$	-		-	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	PI	$\searrow$	m	$\nearrow$	0	$\nearrow$
	$\cap$		$\cap$		$\cup$		$\cup$		$\cup$

Le graphe de la fonction est le suivant [1]



1. Il ***doit*** être dessiné à l'aide de la calculatrice graphique ***avant de démarrer*** l'étude car tous les résultats des calculs peuvent y être vérifiés !!

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(b) Etude de fonction complète : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

i. Domaine :
CE : $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Le domaine est donc $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

ii. Zéros :

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \ & \frac{x^3}{x^2-1} = 0 \\ \Leftrightarrow \ & x = 0 \end{aligned}$$

Le zéro est donc $x = 0$ (qui est dans le domaine de définition de la fonction).

iii. Intersection avec l'axe 0y : $f(0) = 0$.

iv. Parité : $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \dfrac{-x^3}{x^2-1} = -f(x)$. La fonction est impaire.

v. Signe : Le signe est résumé dans le tableau de signe suivant :

x		-1		0		1	
x^3	-		-	0	+		+
x^2-1	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	-	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	+

vi. Asymptotes

A. Asymptote verticale : On a $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \dfrac{-1}{0} = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$.
Il y a donc deux AV :

$$\begin{cases} AV_1 \equiv x = -1 \\ AV_2 \equiv x = 1 \end{cases}$$

De plus, le tableau de signe de $f(x)$ permet de trouver

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

B. Il n'y a pas d'asymptote horizontale car on est en présence d'une fonction rationnelle et le degré du numérateur et supérieur au degré du dénominateur.

C. Asymptote oblique :la division euclidienne de numérateur par le dénominateur donne

$$f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$$

Lorsque x tend vers l'infini [2], le troisième terme $\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$ tend vers zéro car le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. Dès lors, on peut affirmer que si x tend vers l'infini la fonction tend vers la fonction $g(x) = x$ qui se représente graphiquement par une droite. On est en présence de la définition d'une asymptote [3].Dès lors, la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique de la fonction $f(x)$.

2. ce qui correspond à la situation d'une asymptote
3. "*droite de laquelle un courbe se rapproche indéfiniment sans jamais la toucher*"

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

vii. Dérivée première : On a successivement :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{x^3}{x^2-1}\right]' \\ &= \frac{3x^2(x^2-1)-x^3(2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^2\left(3x^2-3-2x^2\right)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^2\left(x^2-3\right)}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Le tableau de signe de la dérivée première est détaillé ci-dessous (on se contente de construire la partie du tableau correspondant à $x \geq 0$).

x	0		1		$\sqrt{3}$	
x^2	0	$+$		$+$		$+$
(x^2-3)		-		-	0	$+$
$(x^2-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	0	-	$\nexists$	-	0	$+$
	TH	$\searrow$		$\searrow$	m	$\nearrow$
	$(0,0)$				$\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$	

Comme la fonction est impaire, le tableau de signe de la dérivée première est symétrique par rapport à $x = 0$ (mêmes signes de part et d'autre de $x = 0$).

Ce tableau est le ***tableau de variation de la fonction*** $f(x)$.

viii. Dérivée seconde : Lorsque que l'on redérive la fonction obtenue au point 8(e)vii, on obtient :

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

Le tableau de signe de la dérivée seconde est :

x	0		1	
x	0	$+$		$+$
$(x^2-1)^3$		-	0	$+$
$f''(x)$	PI	-	$\nexists$	$+$
	$(0,0)$	$\cap$		$\cup$

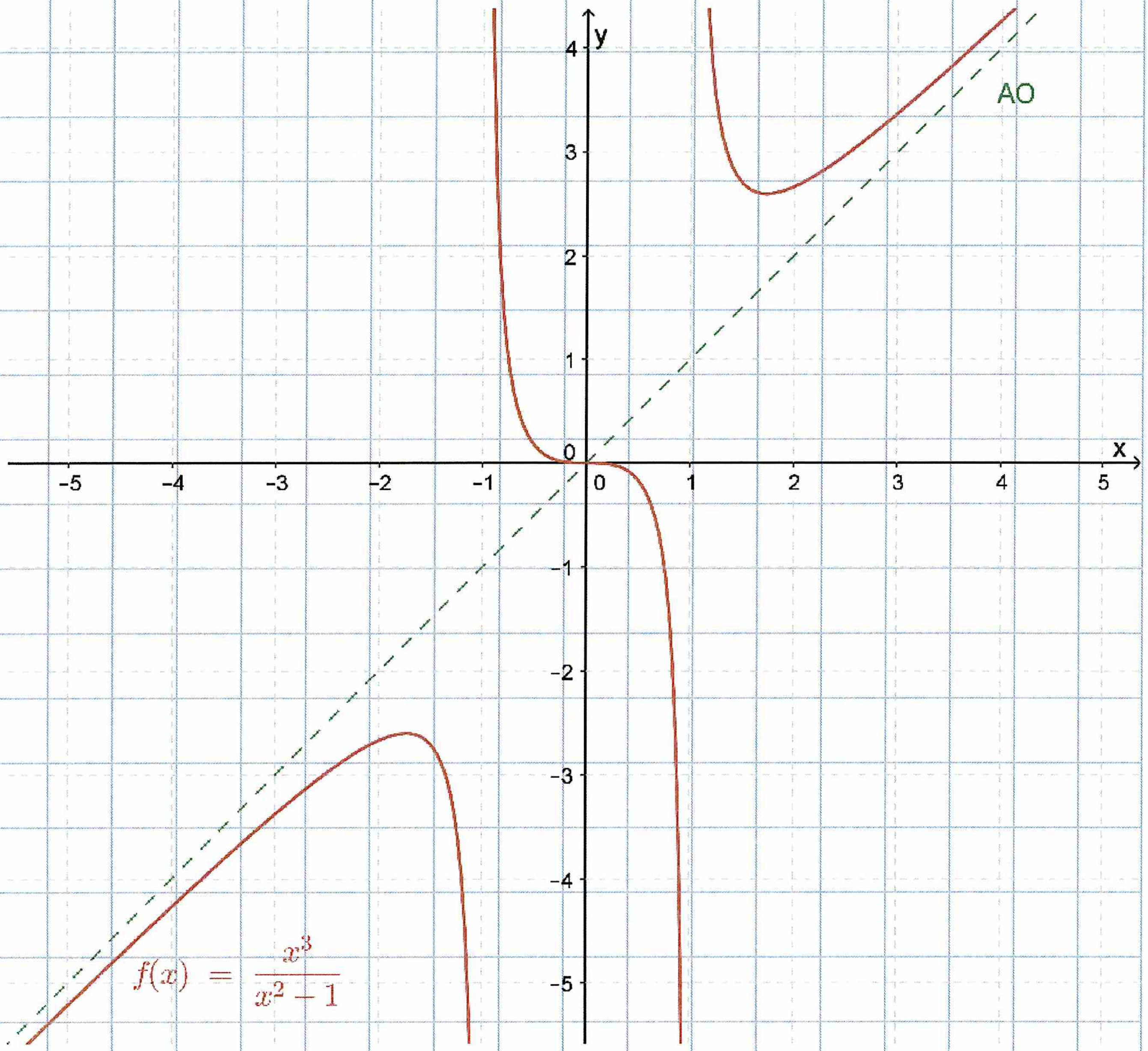
Comme la fonction est impaire, le tableau de signe de la dérivée seconde est symétrique par rapport à $x = 0$ (signes opposés de part et d'autre de $x = 0$).

ix. Tableau récapitulatif :
Le tableau récapitulatif du comportement de la fonction est présenté ci-dessous.

x	0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	0	-	$\nexists$	-	0	$+$
$f''(x)$	0	-	$\nexists$	$+$		$+$
$f(x)$	TH / PI	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	m	$\nearrow$
	$(0,0)$	$\cap$		$\cup$		$\cup$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

Le graphe de la fonction est le suivant [4]



4. Il ***doit*** être dessiné à l'aide de la calculatrice graphique ***avant de démarrer*** l'étude car tous les résultats des calculs peuvent y être vérifiés !!

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(c) Etude de fonction complète : $f(x) = |x+2|\sqrt{1-x}$

i. Domaine :
CE : $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Le domaine est donc $-\infty, 1]$

ii. Zéros :

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Lse zéros sont donc $x = -2$ et $x = 1$ (qui sont dans le domaine de définition de la fonction).

iii. Intersection avec l'axe 0y : $f(0) = 2$.

iv. Parité : Vu le domaine et les zéros, la fonction n'est ni paire ni impaire.

v. Signe : La fonction est toujours positive (en raison de la présence de la valeur absolue et de la racine)

vi. Asymptotes

A. Il n'y a aucun point rejeté du domaine, donc pas d'asymptote verticale

B. Il n'y a pas d'asymptote horizontale[3] car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

C. Il n'y a pas d'asymptote oblique car $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

vii. Dérivée première : Le calcul de la dérivée première est complexe en raison de la présence de la valeur absolue. En effet, la fonction étudiée est en réalité composée de deux fonctions :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (-x-2)\sqrt{1-x} & \text{si } x \leq -2 \\ (x+2)\sqrt{1-x} & \text{si } x > -2 \end{array} \right.$$

Si $x \leq -2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-x-2)'\sqrt{1-x} + (-x-2)(\sqrt{1-x})' \\ &= -\sqrt{1-x} + (-x-2)\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{-2(1-x) - (-x-2)}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{3x}{2\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

De même, si $x > -2$:

$$f'(x) = \frac{-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

3. Le calcul en $+\infty$ est inutile puisqu'il n'appartient pas au domaine de définition

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

Le tableau de signe de la dérivée première est détaillé ci-dessous.

x		-2		0		1
$-3x$			$+$	0	-	
$3x$	-					
$\sqrt{1-x}$	$+$		$+$		$+$	0
$f'(x)$	-		$+$	0	-	$\nexists$
$f(x)$	$\searrow$	P.A. (-2,0)	$\nearrow$	M (0,2)	$\searrow$	TV (-1,0)

Ce tableau est le ***tableau de variation de la fonction*** $f(x)$.

viii. Dérivée seconde : Lorsque que l'on redérive la fonction obtenue au point 8(e)vii, on obtient :

$$f''(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{-3(x-2)}{4\sqrt{(1-x)^3}}\right] & \text{si } x \leq -2 \\[2ex] \left[\dfrac{3(x-2)}{4\sqrt{(1-x)^3}}\right] & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Le tableau de signe de la dérivée seconde est :

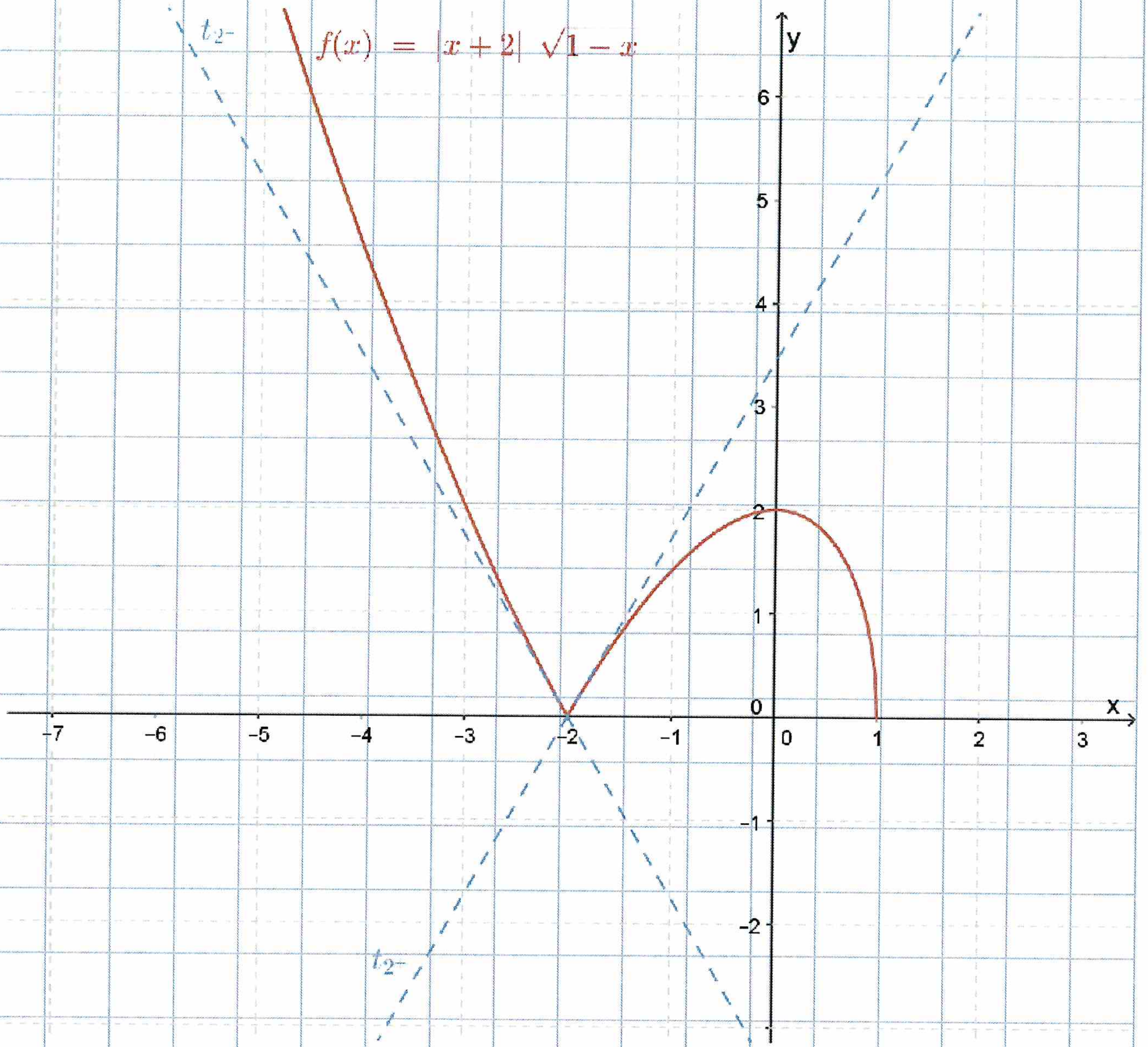
x		-2		1
$-3(x-2)$	$+$			
$3(x-2)$			-	
$\sqrt{(1-x)^3}$	$+$		$+$	0
$f''(x)$	$+$		-	$\nexists$
$f(x)$	$\cup$	P.A. (-2,0)	$\cap$	

ix. Tableau récapitulatif :
Le tableau récapitulatif du comportement de la fonction est présenté ci-dessous.

x		-2		0		1
$f'(x)$	-		$+$	0	-	$\nexists$
$f''(x)$	$+$				$+$	$\nexists$
$f(x)$	$\searrow$ $\cup$	P.A. (-2,0)	$\nearrow$ $\cap$	M (0,2)	$\searrow$ $\cap$	TV (-1,0)

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

Le graphe de la fonction est le suivant [7]



7. Il ***doit*** être dessiné à l'aide de la calculatrice graphique ***avant de démarrer*** l'étude car tous les résultats des calculs peuvent y être vérifiés !!

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(d) Etude de fonction complète : $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

i. Domaine :
CE : $x^2 - 5x + 4 \geq 0$. Le domaine est donc $-\infty, 1] \cup [4, +\infty$

ii. Zéros :

$$f(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Lse zéros sont donc $x = 1$ et $x = 4$ (qui sont dans le domaine de définition de la fonction).

iii. Intersection avec l'axe 0y : $f(0) = 2$.

iv. Parité : Vu le domaine et les zéros, la fonction n'est ni paire ni impaire.

v. Signe : La fonction est toujours positive (en raison de la présence de la racine)

vi. Asymptotes

A. Il n'y a aucun point rejeté du domaine, donc pas d'asymptote verticale

B. Il n'y a pas d'asymptote horizontale car $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

C. On a $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ $(F.I.)$
En levant l'indétermination, on obtient $m = \pm 1$.
De plus, comme $p = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$, on trouve $p = \mp\dfrac{5}{2}$. On a donc deux asymptotes obliques :

$$\begin{cases} AO_g \equiv y = -x + \dfrac{5}{2} \\ AO_d \equiv y = x - \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

vii. Dérivée première :Le calcul de la dérivée donne :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\sqrt{x^2 - 5x + 4}\right]' \\ &= \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{2\sqrt{x^2 - 5x + 4}} \\ &= \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 4}} \end{aligned}$$

Cette fonction s'annule en $x = \dfrac{5}{2}$ qui est en dehors du domaine de $f(x)$.

$f'(x)$ est négative si $x < \dfrac{5}{2}$ et positive après.

viii. Dérivée seconde : Lorsque que l'on redérive la fonction obtenue au point 8(e)vii, on obtient :

$$f''(x) == \frac{-9}{4\sqrt{(x^2 - 5x + 4)^3}}$$

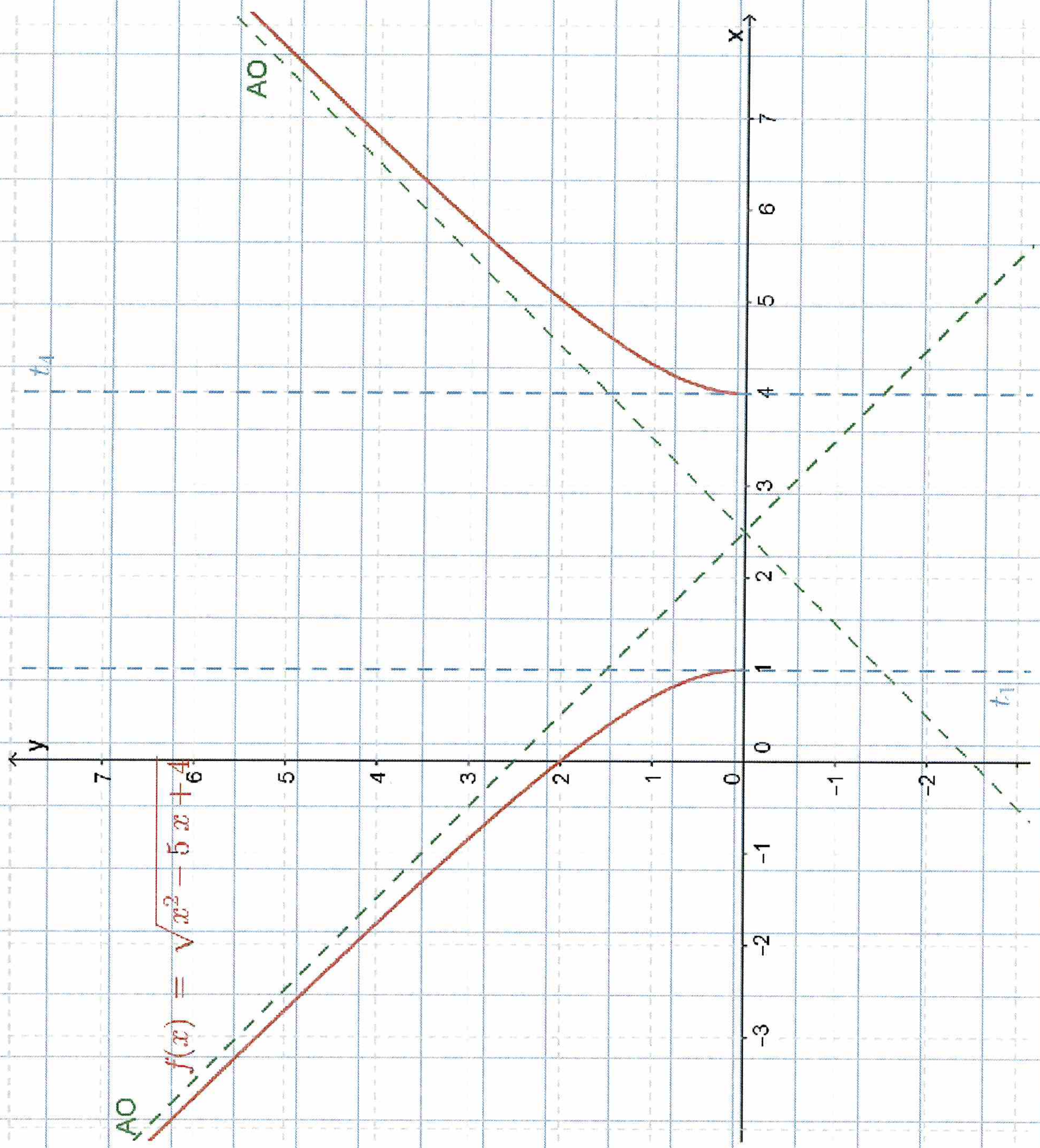
qui est toujours négative.

ix. Tableau récapitulatif :
Le tableau récapitulatif du comportement de la fonction est présenté ci-dessous.

x		1		4	
$f'(x)$	-	$\nexists$		$\nexists$	+
$f''(x)$	-	$\nexists$		$\nexists$	-
$f(x)$	$\searrow$ $\cap$	0 TV		0 TV	$\nearrow$ $\cup$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

Le graphe de la fonction est le suivant [8]



8. Il ***doit*** être dessiné à l'aide de la calculatrice graphique ***avant de démarrer*** l'étude car tous les résultats des calculs peuvent y être vérifiés!!

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(e) Etude de fonction complète : $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} - |x|$

i. Domaine :
CE : $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Le domaine est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

ii. Zéros : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+1} - |x| = 0$ Il faut résoudre une équation aux valeurs absolues. En décomposant la fonction en deux parties, on a :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x(x+1)}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - x(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

ou

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont donc $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 0$.

iii. Intersection avec l'axe 0y : $f(0) = 0$.

iv. Parité : Vu le domaine et les zéros, la fonction n'est ni paire ni impaire.

v. Signe : Il faut étudier séparément le signe des deux "*sous-fonctions*". Le signe est résumé dans le tableau de signe suivant dans le cas où $x < 0$:

x		-1		$-\frac{1}{2}$	
$2x^2 + x$	+		+	0	-
$x+1$	-	0	+		+
$f(x)$	-	$\nexists$	+	0	-

Remarquons que si $x \geq 0$, la fonction est toujours négative.

vi. Asymptotes

A. Asymptote verticale : On a $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$. Il y a donc une $AV \equiv x = -1$. De plus, le tableau de signe de $f(x)$ permet de trouver

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = + - \infty \end{cases}$$

B. Asymptote horizontale : En se basant sur la décomposition de la fonction en "sous-fonctions", on peut calculer :

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + x}{x+1} = -\infty & \text{si } x < 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On a donc une $AH_d \equiv y = -1$

C. Asymptote oblique : Vu la présence de l'AH en $+\infty$, on ne doit calculer une éventuelle AO qu'en $-\infty$. La division euclidienne de $\dfrac{2x^2 + x}{x+1}$ donne $2x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$. L'explication donnée dans le cadre de la fonction n°1 permet de conclure que $AO_g \equiv y = 2x - 1$.

vii. Dérivée première : On a successivement :

$$f'(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{2x^2 + x}{x+1}\right]' & \text{si } x < 0 \\ \left[\dfrac{-x}{x+1}\right]' & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

vii. Dérivée première : On a successivement :

$$f'(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{2x^2+x}{x+1}\right]' & \text{si } x < 0 \\ \left[\dfrac{-x}{x+1}\right]' & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et, après simplification :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+4x+1}{(x+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{(x+1)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Le tableau de signe de la dérivée première si $x < 0$ est :

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$		-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}-1$	
$2x^2+4x+1$	+	0	-		-	0	+
$(x+1)^2$	+		+	0	+		+
$f'(x)$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
	$\nearrow$	M $*^1$	$\searrow$		$\searrow$	m $*^2$	$\nearrow$

$*^1$ $M : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1, -2\sqrt{2}-3\right)$

$*^2$ $m : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1, 2\sqrt{2}-3\right)$

De plus, si $x \geq 0$, la dérivée première est toujours négative et, dès lors, $f(x)$ toujours décroissante.
Remarquons que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On a donc un point anguleux en $x = 0$.

viii. Dérivée seconde : Lorsque que l'on redérive la fonction obtenue au point 7(e)vii, on obtient :

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

Le tableau de signe de la dérivée seconde est :

x		-1	
$(x+1)^3$	-	0	+
$f''(x)$	-	$\nexists$	+
	$\cap$		$\cup$

ix. Tableau récapitulatif :
Le tableau récapitulatif du comportement de la fonction est présenté ci-dessous.

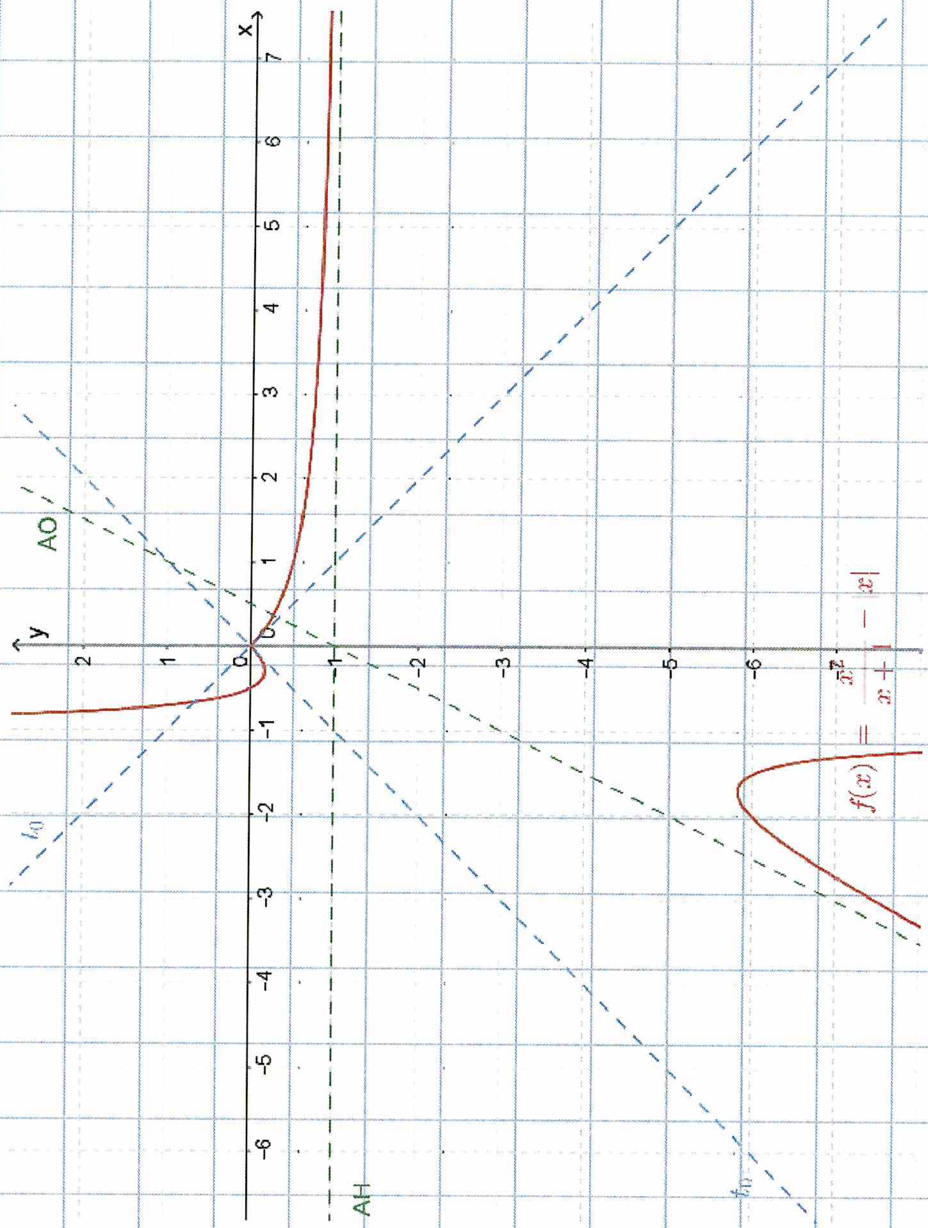
x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$		-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}-1$		0	
$f'(x)$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+		-
$f''(x)$	-		-	$\nexists$	+		+		+
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	m	$\nearrow$	PA	$\searrow$
	$\cap$	$*^1$	$\cap$		$\cup$	$*^2$	$\cup$	(0,0)	$\cup$

$*^1$ $M : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1, -2\sqrt{2}-3\right)$

$*^2$ $m : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1, 2\sqrt{2}-3\right)$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

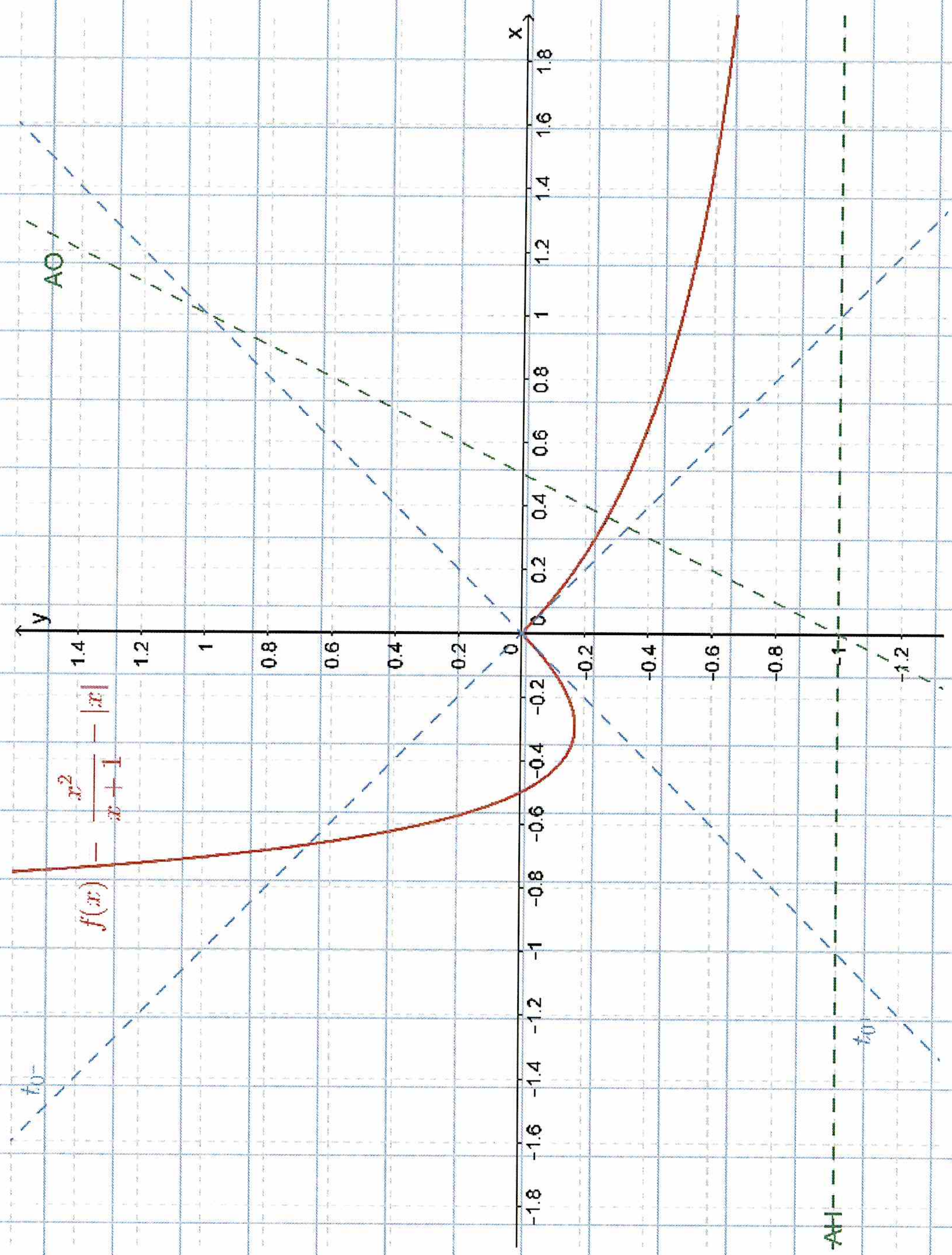
Le graphe de la fonction est le suivant [9]



9. Il ***doit*** être dessiné à l'aide de la calculatrice graphique ***avant de démarrer*** l'étude car tous les résultats des calculs peuvent y être vérifiés !!

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

... et un zoom sur le point anguleux



Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal. Déterminez a, b, c pour que $(\mathcal{C})$ ait les propriétés suivantes :
– $(\mathcal{C})$ passe par le point $A(0;5)$
– la tangente à $(\mathcal{C})$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses ;
– la tangente à $(\mathcal{C})$ au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3.
Etudier les variations de la fonction f ainsi obtenue.

On a : $f(0) = 5$, $f'(0) = 0$ et $f'(1) = -3$

- $f(0) = 5 \iff \dfrac{c}{-2} = 5 \iff c = -10$

- $$f'(x) = \frac{(2ax+b)(x-2)-(ax^2+bx+c)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2ax^2 + \cancel{bx} - 4ax - 2b - ax^2 - \cancel{bx} - c}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{ax^2 - 4ax - (2b+c)}{(x-2)^2}$$

$f'(0) = 0 \iff -2b - c = 0 \iff b = -\dfrac{c}{2}$

$\iff b = +5$

$f'(1) = -3 \iff \dfrac{a - 4a - (2b+c)}{1} = -3$

$\iff -3a = -3 \iff a = 1$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

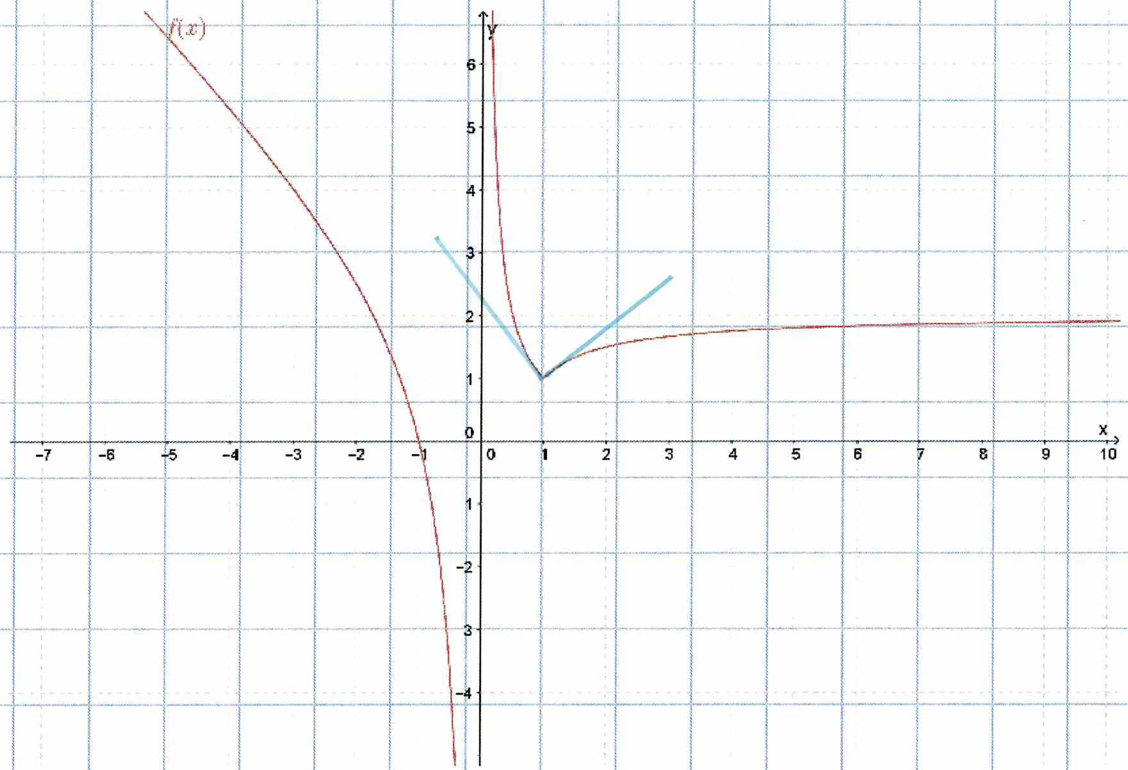
$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 10}{x - 2}$$

et $$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

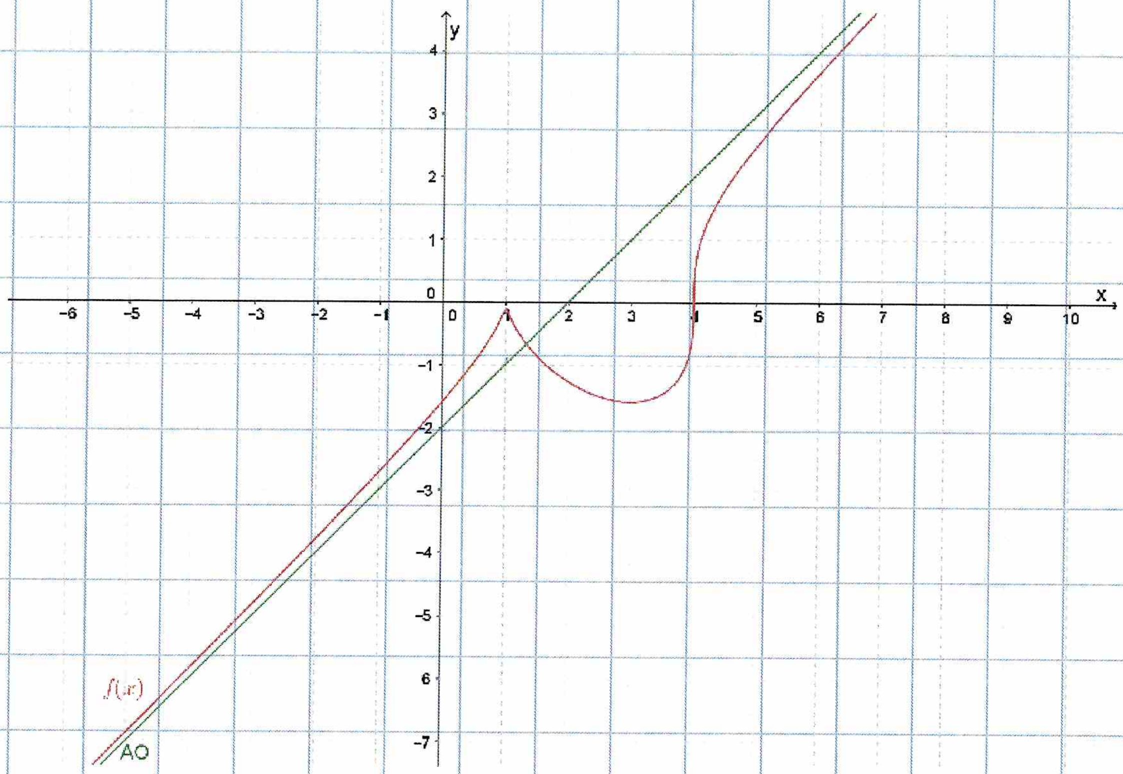
x		0		2		4	
N	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
D	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	M $(0,5)$	$\searrow$		$\searrow$	m $(4,13)$	$\nearrow$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

9. On donne les graphes des fonctions suivants. Pour chacun, établir le tableau récapitulatif du comportement de la fonction.



x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	$\|$	$-$	$-a \mid b$	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	AV	$+$	PA $(1,1)$	$+$	2



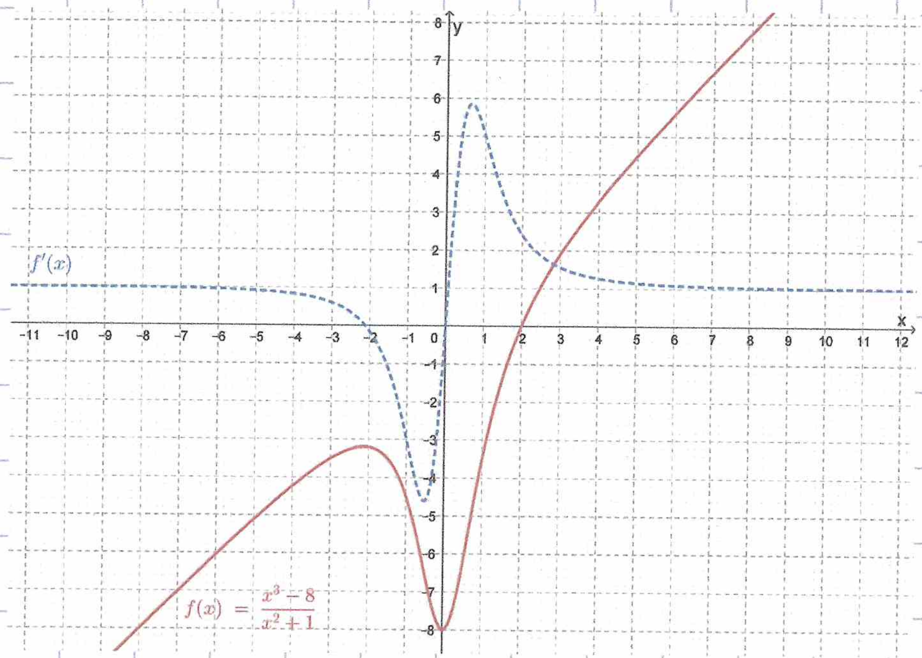
x	$-\infty$			1			3			4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty$	$\|$	$-\infty$	$-$	0	$+$		$+\infty$	$+$	
$f''(x)$		$+$				$+$		$+$		0	$-$	
$f(x)$	AO: $y=x-2$	$-$		PR $(1,0)$		$-$	m $(3;-1,5)$	$-$		PI TV $(4,0)$	$+$	AO: $y=x-2$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

11. On donne les graphes de la dérivée d'une fonction $f(x)$ suivants. Pour chacun de ces graphes, établir un tableau récapitulatif possible du comportement de la fonction. Donner une ébauche de la fonction

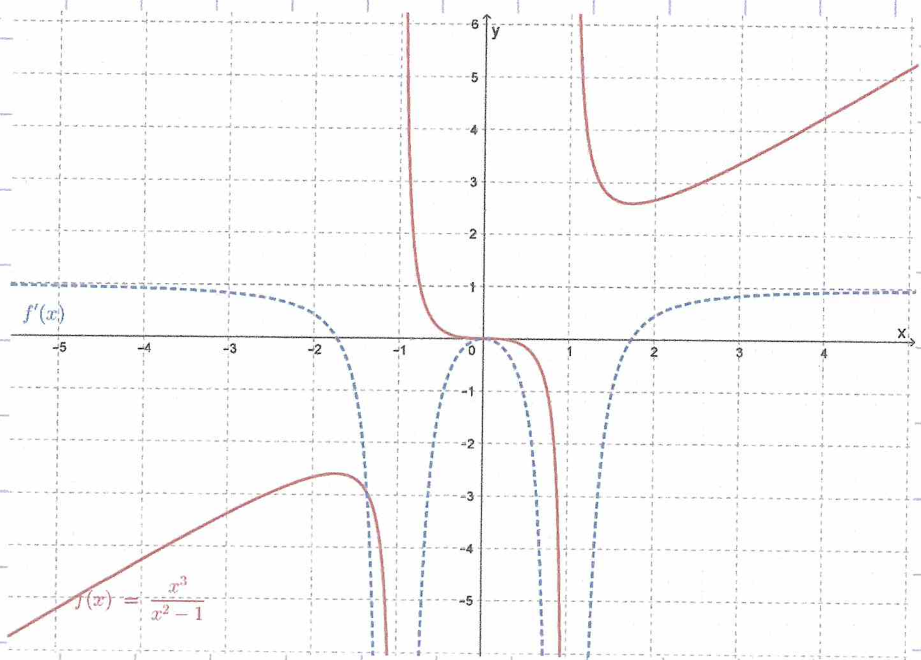
(a)

x		-2		$-\frac{1}{2}$		0		0,6	
$f'(x)$	+	0	-	m	-	0	+	M	+
$f''(x)$	-		-	0	+		+	0	-
$f(x)$	↗	M	↘	PI	↘	m	↗	PI	↗
	∩		∩		∪		∪		∩



(b)

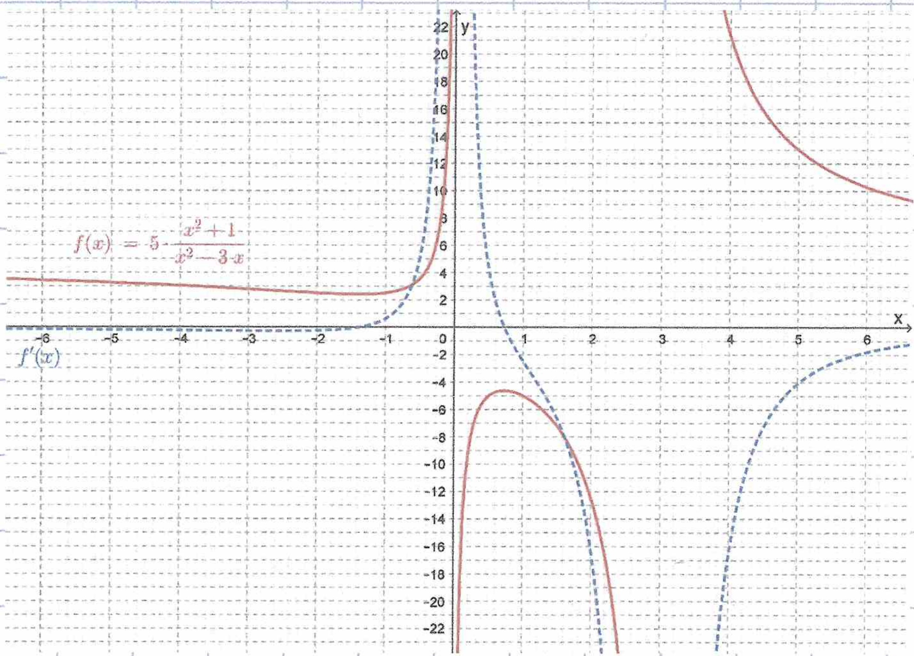
x		-1,7		-1		0		1		1,7	
$f'(x)$	+	0	-	∄	-	M/0	-	∄	-	0	+
$f''(x)$	-		-	∄	+	0	-	∄	+		+
$f(x)$	↗	M	↘	∄	↘	PI	↘	∄	↘	m	↗
	∩		∩		∪	TH	∩		∪		∪



Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

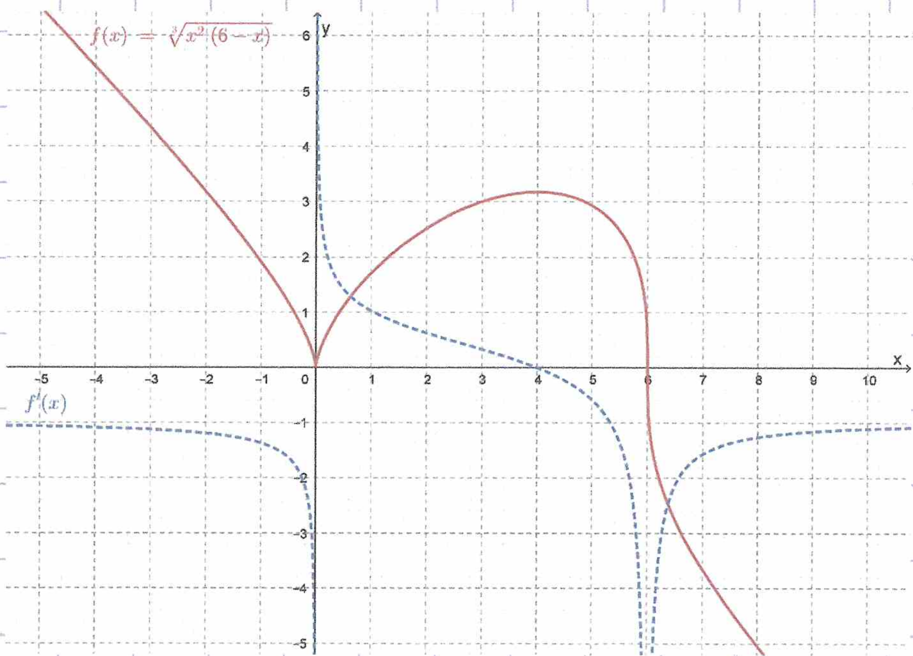
(c)

x		-2,5		-1,4		0		0,8		3	
$f'(x)$	-	m	-	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	-	$\nexists$	-
$f''(x)$	-	0	$+$		$+$	$\nexists$	-		-	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	PI	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$
	$\cap$		$\cup$		$\cup$		$\cap$		$\cap$		$\cup$



(d)

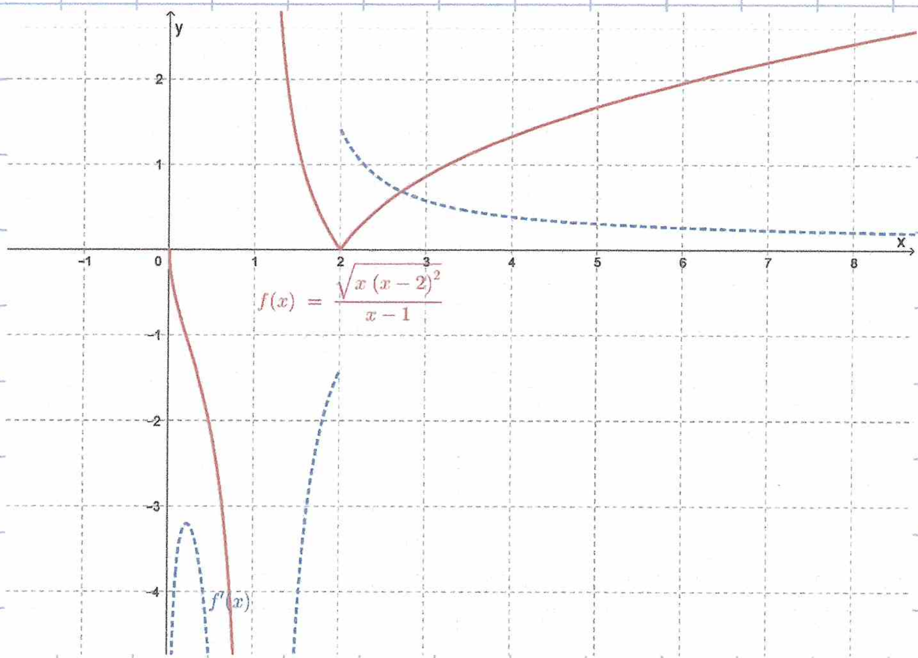
x		0		4		6	
$f'(x)$	-	$-\infty\vert^{+\infty}$	$+$	0	-	$-\infty\vert-\infty$	-
$f''(x)$	-	$\nexists$	-		-	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	TV	$\searrow$
	$\cap$	PR	$\cap$		$\cap$		$\cup$



Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(e)

x	0		$0{,}3$		1		2	
$f'(x)$	$-\infty$	-	M	-	$\nexists$	-	$-1{,}4\big\|^{1{,}4}$	$+$
$f''(x)$		$+$	0	-	$\nexists$	$+$	?	-
$f(x)$	0	$\searrow$	PI	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	PA	$\nearrow$
	TV	$\cup$		$\cap$		$\cup$		$\cap$



Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

~~11~~ 12. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{(2x-2)^2}{2x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal

(a) Déterminer la limite de $f(x)$ en $\dfrac{1}{2}$. Quelle conséquence graphique en tire-t-on pour $\mathcal{C}$?

$$\lim_{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{0} = \pm\infty \Rightarrow AV \equiv x = \frac{1}{2}$$

(b) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x-1}$ sur le domaine de définition.

div euclidienne

$$\begin{array}{rl|l} & 4x^2 - 8x + 4 & 2x-1 \\ -(& 4x^2 - 2x) & \overline{2x-3} \\ \hline & -6x + 4 & \\ -(& -6x + 3) & \\ \hline & 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{(2x-2)^2}{2x-1} = 2x - 3 + \frac{1}{2x-1}$$

$$\Rightarrow a = 2,\ b = -3 \text{ et } c = 1$$

méth des coef. ind.

$$f(x) = \frac{(ax+b)(2x-1)+c}{\cancel{2x-1}} = \frac{\overset{(4x^2-8x+4)}{(2x-2)^2}}{\cancel{2x-1}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ 2b - a = -8 \\ -b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(c) En déduire le comportement de la fonction en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{\pm\infty} f(x) = \lim_{\pm\infty} \left[2x - 3 + \frac{1}{2x-1} \right]$$

$$= \pm\infty - 3 + 0$$

$$= \pm\infty$$

(d) En déduire que la droite $d \equiv y = 2x - 3$ est une asymptote oblique de $\mathcal{C}$. Etudier la position relative de d et $\mathcal{C}$.

Vu l'écriture de $f(x)$, si x tend vers $\pm\infty$, $\frac{1}{2x-1}$ tend vers 0 et $f(x)$ tend vers $2x-3$ qui est une droite. C'est la déf. d'une A.O.

$d(x) = \frac{1}{2x-1}$

x		$\frac{1}{2}$	
$d(x)$	$-$	0	$+$
	$f(x)$ ss AO		$f(x)$ au-dessus AO

(e) Utiliser la forme trouvée en 11b pour calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$. Dresser le tableau de variation de $f(x)$.

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(2x-1)^2}$$

$$= 2\,\frac{4x^2-4x+1-1}{(2x-1)^2}$$

$$= 8\,\frac{x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

x		0		$\frac{1}{2}$		1	
N	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
D	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	A.V.	$\searrow$	m	$\nearrow$
		$(0,-4)$				$(1,0)$	

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(f) Ecrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

$f(2) = \frac{4}{3}$ et $f'(2) = \frac{16}{9}$

$t \equiv y - \frac{4}{3} = \frac{16}{9}(x - 2)$

$\equiv y = \frac{16}{9}x - \frac{20}{9}$

$\equiv 9y - 16x + 20 = 0$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

12. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 11}{x-2}$

(a) Calculer la limite de $f(x) - (2x-3)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$. Conclure.

$$f(x) - (2x-3) = \frac{(2x^2 - 7x + 11) - (2x-3)(x-2)}{x-2}$$

$$= \frac{2x^2 - 7x + 11 - 2x^2 + 7x - 6}{(x-2)}$$

$$= \frac{5}{x-2}$$

$$\lim_{\pm\infty} [f(x) - (2x-3)] = 0$$

$\rightarrow$ la fct $f(x)$ tend vers $2x-3$ qui est une A.O.

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(b) Etudier la variation de $f(x)$ et dresser son tableau de variation

$$f'(x) = \frac{(4x-7)(x-2) - (2x^2-7x+11)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 15x + 14 - 2x^2 + 7x - 11}{D}$$

$$= \frac{2x^2 - 8x + 3}{(x-2)^2}$$

Zéros : N : $\Delta = 64 - 24 = 40$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$$

x		$\frac{4-\sqrt{10}}{2}$		2		$\frac{4+\sqrt{10}}{2}$	
N	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
D	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
	$\nearrow$	M	$\searrow$		$\searrow$	m	$\nearrow$

$\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}, 1-2\sqrt{10}\right)$ $\qquad$ $\left(\frac{4+\sqrt{10}}{2}, 1+2\sqrt{10}\right)$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(c) Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 3.

$f(3) = 8$ et $f'(3) = -3$

$t \equiv y - 8 = -3(x - 3)$

$\equiv y = -3x + 17$

(d) Donner les abscisses des points où la courbe admet une tangente horizontale.

TH $\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(e) La courbe admet-elle une tangente parallèle à la droite d'équation $d \equiv y - 2x = 0$. Si oui en quelle(s) abscisse(s) ?

$? \; x \mid f'(x) = 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 3 = 2(x-2)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{2x^2} - \cancel{8x} + 3 = 2(\cancel{x^2} - \cancel{4x} + 4)$

$\Leftrightarrow 3 = 8 \Rightarrow$ imp $\Rightarrow$ il n'y en a pas

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

13. ~~14.~~ Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}$$

et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$

(a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et préciser les domaines de définition de $f'(x)$ et $f''(x)$.

$$f'(x) = \left\{\left[(x+2)(x-1)^2\right]^{1/3}\right\}'$$

$$= \frac{1}{3}\left[\quad\right]^{-\frac{2}{3}}\left[(x-1)^2 + 2(x+2)(x-1)\right]$$

$$= \frac{(x-1)(x-1+2x+4)}{3\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)^4}}$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}(\cancel{3}x+\cancel{3})}{\cancel{3}\cancel{(x-1)}\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)}}$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)}}$$

$\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$$f''(x) = \frac{\sqrt[3]{\quad} - (x+1)\cdot\frac{1}{3}\left[(x+2)^2(x-1)\right]^{-\frac{2}{3}} \ldots (*)}{\sqrt[3]{(x+2)^4(x-1)^2}}$$

$(*) = 2(x+2)(x-1) + (x+2)^2 = (x+2)(2x-2+x+2)$

$= 3x(x+2)$

$$f''(x) = \frac{\dfrac{\cancel{3}(x+2)^{\cancel{2}}(x-1) - (x+1)(\cancel{3}x)\cancel{(x+2)}}{\cancel{3}\sqrt[3]{(x+2)^4(x-1)^2}}}{\cancel{(x+2)}\sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}}$$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

$$= \frac{3(x+2)(x-1) - 3x(x+1)}{3\sqrt[3]{(x+2)^5(x-1)^4}}$$

$$= \frac{\cancel{3x^2} + \cancel{6x} - \cancel{3x} - 6 - \cancel{3x^2} - \cancel{3x}}{3(x+2)(x-1)\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt[3]{(x+2)^5(x-1)^4}}$$

dom f'': $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

(b) Déterminer une équation cartésienne

i. de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1

$f(-1) = \sqrt[3]{4}$, $f'(-1) = 0$

$t \equiv y - \sqrt[3]{4} = 0 \iff t \equiv y = \sqrt[3]{4}$

ii. des asymptotes (éventuelles) de $\mathcal{C}$

dom f : $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ AV $\not$

$\underline{\text{AH}}$: $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty \rightarrow$ AH $\not$

$\underline{\text{AO}}$: $m = \lim\limits_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ FI

$= \lim\limits_{\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x} = 1$

$p = \lim\limits_{\pm\infty} [f(x) - x] = \infty - \infty$ FI

$= \lim\limits_{\pm\infty} \frac{(\sqrt[3]{\ldots} - x)(\sqrt[3]{\ldots}^2 + x\sqrt[3]{\ldots} + x^2)}{\sqrt[3]{\ldots}^2 + x\sqrt[3]{\ldots} + x^2}$

$= \lim\limits_{\pm\infty} \frac{\cancel{x^3} - 3x + 2 - \cancel{x^3}}{D} = \frac{\infty}{\infty}$ FI

$= \lim\limits_{\pm\infty} \frac{-3x}{\sqrt[3]{x^3}^2 + x\sqrt[3]{x^3} + x^2} = \lim\limits_{\pm\infty} \frac{-\cancel{3}x}{\cancel{3}x^2} = 0$

$\Rightarrow$ AO $\equiv y = x$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(c) Établir le tableau récapitulatif du comportement de f.

TS $f'(x)$

x		-2		-1		1	
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\sqrt[3]{(x+2)^2}$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$\sqrt[3]{(x-1)}$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

TS $f''(x)$

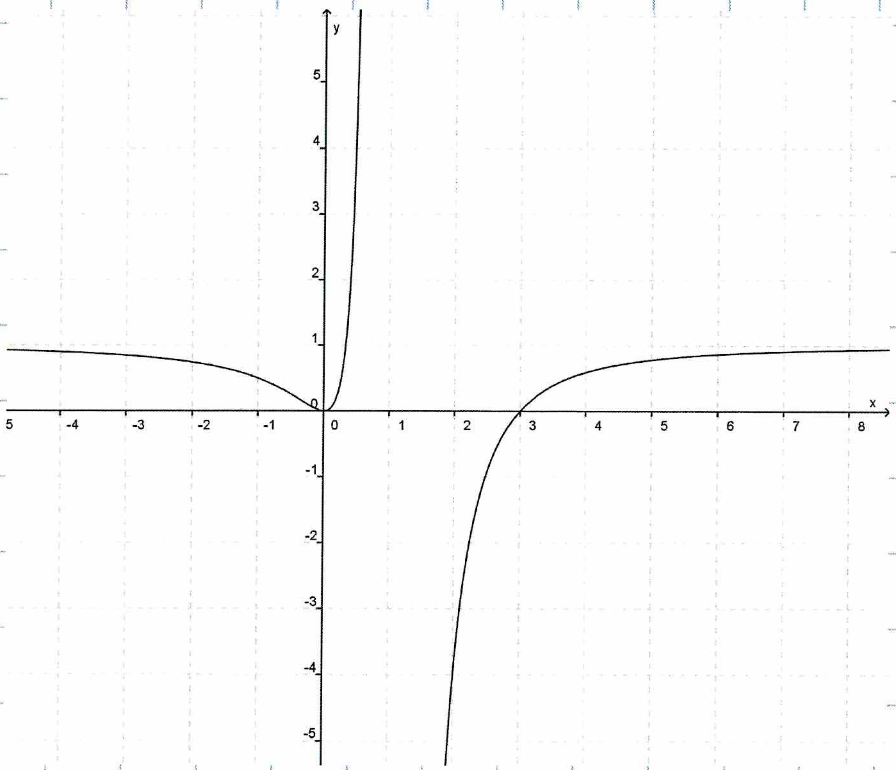
		-2		1	
-2	$-$		$-$		$-$
$\sqrt[3]{(x+2)^5}$	$-$	0	$+$		$+$
$\sqrt[3]{(x-1)^4}$	$+$		$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$-$

Tableau récapitulatif

x		-2		-1		1	
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
$f''(x)$	$+$	$\nexists$	$-$		$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	TV	$\nearrow$	$(-1, \sqrt[3]{4})$	$\searrow$	RR	$\nearrow$
	$\cup$	$(-2, 0)$	$\cap$	$\sqcap$	$\cap$	$(1, 0)$	$\cap$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

14. ~~13.~~ On donne la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ et le graphe de sa dérivée $f'(x)$.



(a) Etablir l'équation des asymptotes de $f(x)$.

dom f : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\lim\limits_{1} f(x) = +\infty \Rightarrow AV \equiv x = 1$

AH : $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{\pm\infty} x = \pm\infty$ ~~AH~~

AO :

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -x^3 + 2x^2 - x & x + 2 \\ \hline 2x^2 - x & \\ -2x^2 + 4x - 2 & \\ \hline 3x - 2 & \end{array}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

$\rightarrow AO \equiv y = x + 2$

(car $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{3x-2}{(x-1)^2} = 0$)

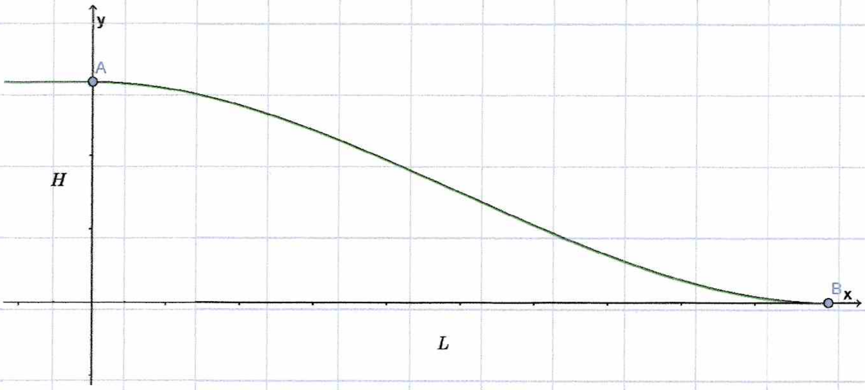
Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

(b) Sur base du graphe de $f'(x)$ (et sans la calculer explicitment,), établir le tableau ***récapitulatif*** en le justifiant.

x		0		1		3	
$f'(x)$	+	0	+	$\nexists$	−	0	+
$f''(x)$	−	0	+	$\nexists$	+		+
$f(x)$	↗	PI	↗	AV	↘	m	↗
	$\cap$	TH $(0,0)$	$\cup$		$\cup$	$\left(3, \frac{27}{4}\right)$	$\cup$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

15. On veut installer une rampe permettant à des chariots de franchir une marche de hauteur H.



Pour éviter les secousses, on demande que le profil $y = f(x)$ de cette rampe (qui s'étend de A à B) ait une tangente horizontale aux points A et B. Existe-t-il une fonction de type $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ satisfaisant à ces contraintes ? Si oui, calculer les coefficients a, b, c, d en fonction de H et L.

Il faut imposer : $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(L) = 0 \\ f(0) = H \\ f(L) = 0 \end{cases}$

Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

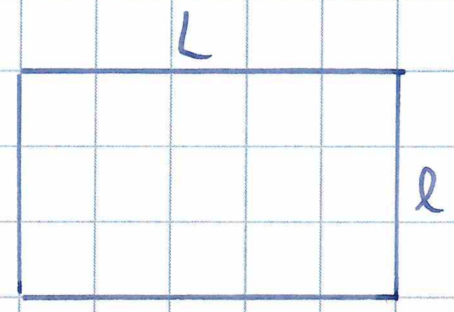
$\Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 3aL^{\cancel{2}} + 2b\cancel{L} = 0 \\ d = H \\ aL^3 + bL^2 + cL + d = 0 \quad (*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = H \\ b = -\dfrac{3aL}{2} \\ (*) \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow aL^3 - \dfrac{3aL}{2}L^2 + H = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{aL^3}{2} + H = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2H}{L^3} \\ b = -\dfrac{3H}{L^2} \\ c = 0 \\ d = H \end{cases}$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

15. Quelles doivent être les dimensions d'un rectangle de périmètre 64 mètres pour que son aire soit maximale.



$A = L \cdot l$

$P = 2L + 2l = 64$

$\Leftrightarrow l = 32 - L$

$\Rightarrow A = (32 - L) \cdot L$

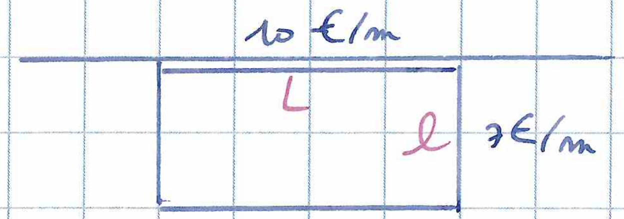
$A'(L) = 0 \Leftrightarrow -L + 32 - L = 0 \Leftrightarrow -2L + 32 = 0$

$\Leftrightarrow L = 16 \Rightarrow l = 16$

L		16	
$A'(L)$	+	0	−
$A(L)$	↗	M	↘
		(16, 256)	

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

16. Un fermier désire clôturer une superficie rectangulaire de 8000 m^2 bordant une autoroute. La clôture de long de l'autoroute lui coûte 10€ par mètre alors que celle des autres côtés coûte 7€ par mètre. Trouver le coût minimal des travaux.



$$A = L \cdot l = 8000$$
$$\Rightarrow l = \frac{8000}{L}$$

$$C = 10L + 2l\,7 + L \cdot 7$$
$$= 17L + 14l$$
$$= 17L + \frac{14 \cdot 8000}{L}$$

$$C'(L) = 17 - \frac{14 \cdot 8000}{L^2} = \frac{17L^2 - 112000}{L^2}$$

$$C'(L) = 0 \iff L^2 = \frac{14 \cdot 8000}{17}$$

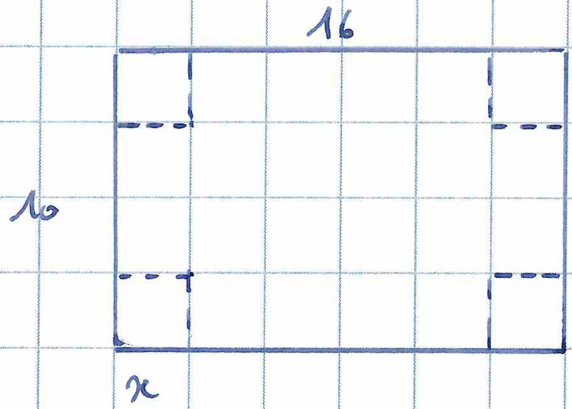
$$\iff L \simeq 81{,}17 \text{ m}$$
$$\iff l \simeq 98{,}6 \text{ m}$$

L		$-81{,}17$		0		$81{,}17$	
$C'(L)$	$+$	0		$-$		0	$+$
$C(L)$	$\nearrow$	$\sqcap$		$\searrow$		m	$\nearrow$

$(81{,}17 \,;\, 1577{,}87)$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

17. Une compagnie fabrique des boîtes avec des pièces de carton de 16cm par 10cm (en coupant des carrés à chaque coin et en relevant les côtés). Quelles sont les dimensions de la boite de volume maximal pouvant être obtenue ? Calculer ce volume maximal.



$V = (16-2x)(10-2x) \cdot x$

$V'(x) = 0$

$\Leftrightarrow -2(10-2x)x + (16-2x)(-2) \cdot x + (16-2x)(10-2x) = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 4x^2 - 32x + 4x^2 - 52x + 160 = 0$

$\Leftrightarrow 12x^2 - 104x + 160 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 26x + 40 = 0$

$\Delta = 676 - 480 = 196$

$x_{1,2} = \dfrac{26 \pm 14}{6}$ $\begin{cases} \frac{20}{3} & (\text{imp car} > 5) \\ 2 & ✓ \end{cases}$

x		2		$\frac{20}{3}$	
V'	$+$	0	$-$	0	$+$
V	$\nearrow$	M $(2, 144)$	$\searrow$		$\nearrow$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

18. On donne un cercle de rayon r = 1. Parmi les triangles isocèles inscrits dans ce cercle, quels sont ceux dont l'aire est maximale ? Dans ce cas que vaut l'angle au sommet ?

Dessin : voir page suivante

$x = |OH|$

$A = \frac{B.H}{2} = \frac{2|HC|.|AH|}{2} = |HC|.|AH|$

$|HC| = \sqrt{1-x^2}$ et $|AH| = (1+x)$

$A = (1+x)\sqrt{1-x^2}$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} + (1+x)\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1-x^2-x(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$\Leftrightarrow 1-x^2-x-x^2 = 0$

$\Leftrightarrow -2x^2-x+1 = 0$

$\Delta = 9 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{-4} \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

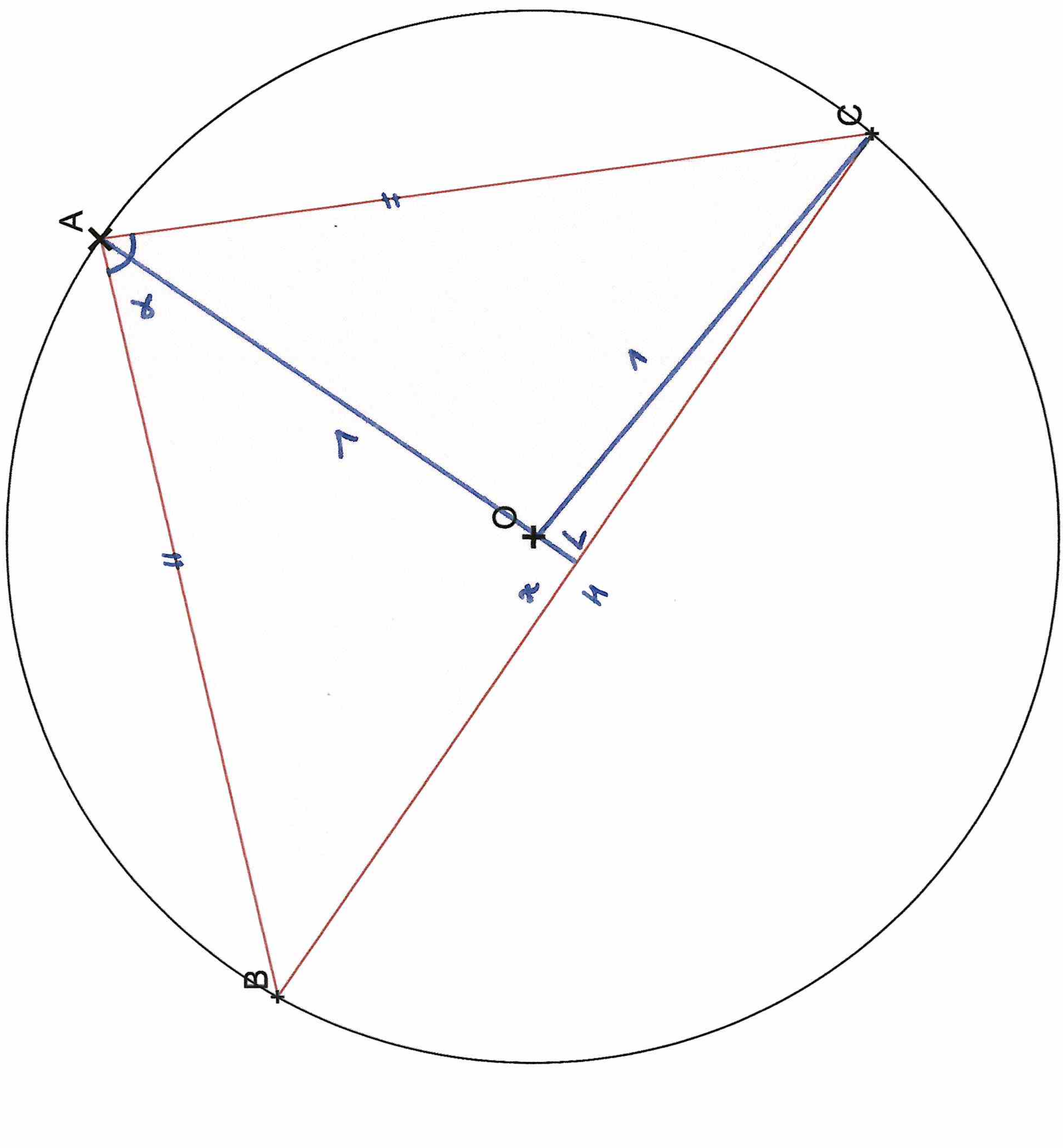
x		-1		$\frac{1}{2}$	
A'	$-$	0	$+$	0	$-$
A	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\cap$	$\searrow$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

<u>Angle au sommet</u> $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{|HC|}{|AH|} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ le Δ est équilatéral

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/


A
B
C
O
H

19. Considérons une tente en forme de cône circulaire droit, dont le rayon de base est R, et dont la hauteur vaut h (on ne considère pas de tapis de sol). On impose un volume V de la tente. Quel rapport $\frac{h}{R}$ faut-il choisir pour que l'aire du tissu utilisé soit minimale ? Calculer R et h dans le cas où V = 2 m^3

Dessin : page suivante

$$A = \frac{1}{2}(R^2+h^2)\cdot\alpha \qquad \left(A = \frac{1}{2} r^2\alpha\right)$$

$$\text{et} \quad 2\pi R = \sqrt{h^2+R^2}\cdot\alpha \iff \alpha = \frac{2\pi R}{\sqrt{h^2+R^2}}$$

$$\Rightarrow A = \pi R\sqrt{h^2+R^2}$$

$$\text{De plus : } V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \iff h = \frac{3V}{\pi R^2}$$

$$\iff A = \pi R\sqrt{\frac{9V^2}{\pi^2R^4}+R^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9V^2}{R^2}+\pi^2R^4}$$

$$A'(R) = 0 \iff \frac{-\frac{18V^2}{R^3}+4\pi^2R^3}{2\sqrt{\quad}} = 0$$

$$\iff -18V^2+4\pi^2R^6 = 0 \quad (1)$$

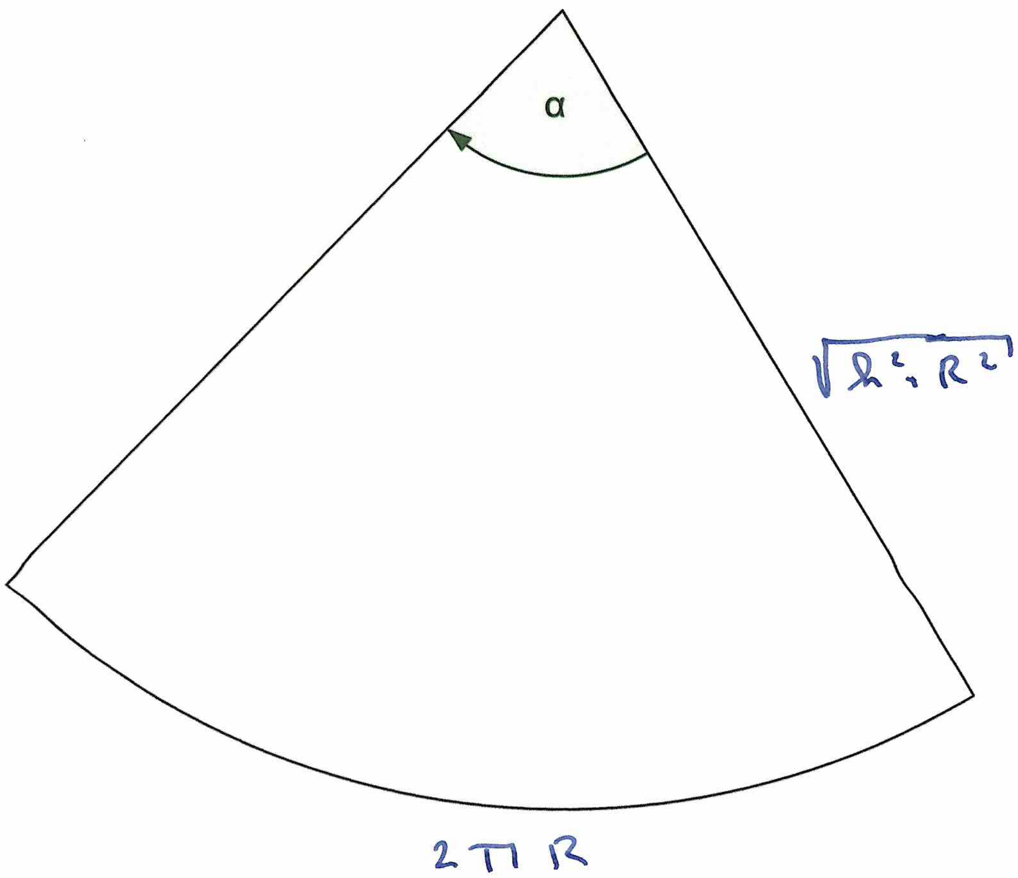
$$\text{On cherche } \frac{h}{R} \Rightarrow \cancel{4}^{\,2}\,\cancel{\pi^2}\,R^{\cancel{6}\,2} - \cancel{18}^{\,2}\,\frac{\cancel{\pi^2}\,\cancel{R^4}\,h^2}{\cancel{27}_{\,3}} = 0$$

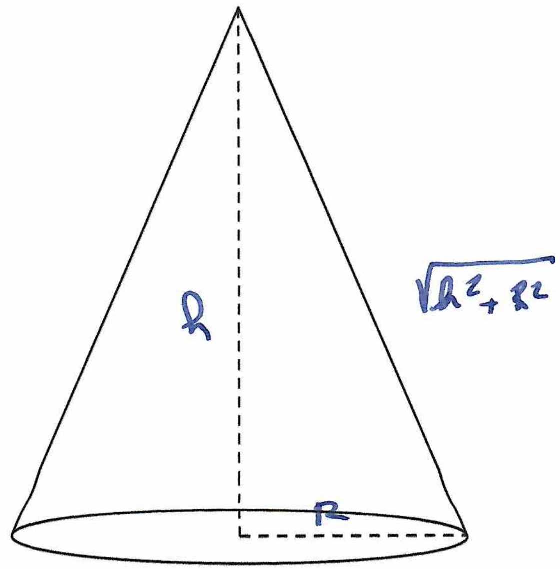
$$\iff 2R^2-h^2 = 0$$

$$\iff \frac{h}{R} = \sqrt{2}$$

$$\text{Si } V=2 \rightarrow (1) : \; R = \sqrt[6]{\frac{18}{\pi^2}} \quad \text{et} \quad h = \frac{6}{\sqrt[3]{18\pi}}$$

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/


α
$\sqrt{h^2+R^2}$
$2\pi R$


h
R
$\sqrt{h^2+R^2}$