# Cours Teams

# Chapitre 16: Calcul vectoriel dans l'espace: le produit scalaire - Théorie

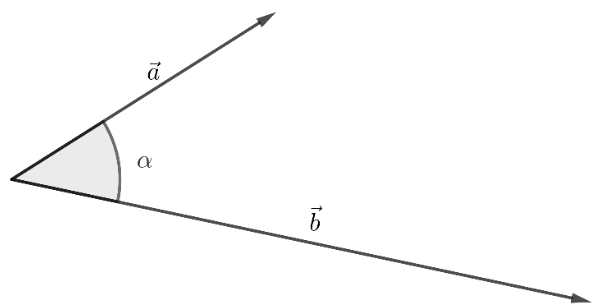
Références:

Cours de $5^{ème}$: chapitre 12 - paragraphe 16.7.

## 7. Produit scalaire

### 7.1. Définition

Soient deux vecteurs de même origine $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ faisant entre eux un angle α.



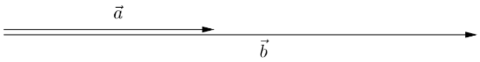

On définit le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ par:

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\alpha}$$

Contrairement aux autres opérations sur les vecteurs le produit scalaire donne un réel comme résultat (d'où son nom!).

# 7.2. Cas particuliers

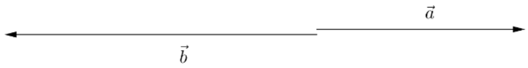
**Vecteurs alignés**




Dans ce cas, l'angle α entre les vecteurs vaut 0° et le produit scalaire vaut:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|$$

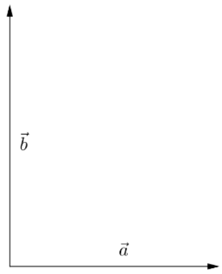
**Vecteurs opposés**




Dans ce cas, l'angle α entre les vecteurs vaut 180° et le produit scalaire vaut:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = -\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|$$

**Vecteurs perpendiculaires (orthogonaux)**




Dans ce cas, l'angle α entre les vecteurs vaut 90° et le produit scalaire vaut:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$$

**Norme d'un vecteur**

On a :

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = \|\vec{a}\|.\|\vec{a}\| = \|\vec{a}\|^2$$

et:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$$

# 7.3. Produit scalaire en repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, les vecteurs ont des composantes

$$\vec{a}\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} : \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ en fonctions des vecteurs de base:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = x_a.\overrightarrow{i} + y_a.\overrightarrow{j} + z_a.\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{b} = x_b.\overrightarrow{i} + y_b.\overrightarrow{j} + z_b.\overrightarrow{k} \end{cases}$$

Le produit scalaire s'écrit donc:

$$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = (x_a.\overrightarrow{i} + y_a.\overrightarrow{j} + z_a.\overrightarrow{k}).(x_b.\overrightarrow{i} + y_b.\overrightarrow{j} + z_b.\overrightarrow{k})$$

En effectuant la "multi-distributivité" et en tenant compte du fait que les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux et de longueurs (norme) unitaires, on obtient:

$$\boxed{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = x_a.x_b + y_a.y_b + z_a.z_b}$$

Dans un repère orthonormé, le produit scalaire de deux vecteurs est la somme des produits de leur composantes.

## 7.4. Applications

**Norme d'un vecteur**

Puisque $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$

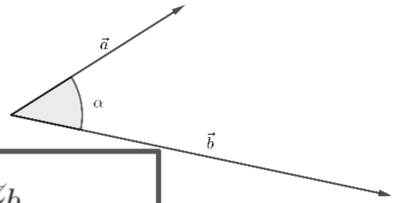
et que: $\vec{a} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$

la formule précédente permet d'obtenir $\|\vec{a}\| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$

**Angle entre deux vecteurs:**

On a vu deux expressions pour le produit scalaire:

- la définition: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|. \cos\alpha$
- l'expression du produit scalaire en repère orthonormé: $\vec{a} \bullet \vec{b} = x_a.x_b + y_a.y_b + z_a.z_b$




En isolant cos α entre ces deux relations, on obtient:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_a.x_b + y_a.y_b + z_a.z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}.\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}}$$

## Exemple

Soient deux vecteurs de même origine $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dont les composantes sont:

$$\vec{a} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} : \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire vaut:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 3.(-5) + (-1).4 + 2.1 = -17$$

La norme du vecteur $\vec{a}$ est:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

Nous adopterons la structure suivante pour calculer l'angle:

$$\vec{a} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} : \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{b}\| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{42}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 3.(-5) + (-1).4 + 2.1 = -17$$

Le cosinus de l'angle est le rapport entre le 3ème nombre et le produit des deux premiers:

$$\cos\alpha = \frac{-17}{\sqrt{14}.\sqrt{42}} \quad \text{et} \quad \alpha = \cos^{-1}\frac{-17}{\sqrt{14}.\sqrt{42}} \approx 2,348$$