Logique mathématique : Solutions

1. Soit p la proposition "X estime Y" et q la proposition "Y estime X". Ecrire en utilisant les connecteurs logiques les phrases suivantes :

   (a) X déteste Y ;

   $\neg p$

   (b) X estime Y mais Y ne lui rend pas son estime ;

   $p \wedge \neg q$

   (c) X et Y s'estiment ;

   $p \wedge q$

   (d) X et Y se détestent ;

   $\neg p \wedge \neg q$

   (e) Y est estimé par X mais X est détesté par Y ;

   $p \wedge \neg q$

   (f) X et Y ne se détestent ni l'un ni l'autre.

   $\neg\neg p \wedge \neg\neg q = p \wedge q$

2. Montrer, à l'aide des tables de Boole que les propositions suivantes ont même valeur de vérité

   (a) $(p \wedge q) \wedge r$ et $p \wedge (q \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

(b) $p \vee (q \wedge r)$ et $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

p	q	r	A $p \vee q$	B $p \vee r$	$A \wedge B$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

3. Pour chacune des formules suivantes :

   (a) construire sa table de vérité ;

   (b) indiquer s'il s'agit d'une tautologie, d'une contradiction ou ni l'une ni l'autre :

      i. $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \wedge q)$

			A		B	
p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$A \vee B$
0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0

ii. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

				A	B	C	D	
p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow D$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

iii. $(p \wedge q) \vee (\neg(p \wedge r) \vee q \Rightarrow r)$;

			C		A	B	D	
p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$\neg(p \wedge r)$	$A \vee q$	$B \Rightarrow r$	$C \vee D$
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1

iv. $(x \vee y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee (((u \vee x) \Rightarrow u) \Leftrightarrow (y \vee z)))$.

					D		A	B	C	E	
x	y	z	u	$X \vee y$	$x \vee y \vee z$	$u \vee x$	$(u \vee x \Rightarrow u)$	$y \vee z$	$A \Leftrightarrow B$	$x \vee C$	$E \Leftrightarrow D$
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

4. On considère les énoncés suivants :
   - (A) *"Si Pierre est rentré chez lui, alors Jean est allé au cinéma."*
   - (B) *"Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui."*
   - (C) *"Si Jean est allé au cinéma, alors Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui."*
   - (D) *"Marie n'est pas à la bibliothèque et Jean est allé au cinéma."*
   - (E) *"Pierre est rentré chez lui."*

   Formaliser cette famille d'énoncés en calcul propositionnel. On notera (A), (B), (C), (D) et (E) les cinq formules obtenues.
   Montrer que l'on peut déduire (E) des prémisses (A), (B), (C), (D)

P : Pierre est rentré chez lui
J : Jean est allé au cinéma
M : Marie est à la bibliothèque

A : $P \Rightarrow J$
B : $M \vee P$
C : $J \Rightarrow (M \vee P)$
D : $\neg M \wedge J$
E : P

P	J	M	A	B	C	$\neg M$	D	$A \wedge B \wedge C \wedge D$	$X \Rightarrow E$
1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1

5. Brown, Jones et Smith sont prévenus de fraude fiscale. Ils prêtent serment de la manière suivante :
   - BROWN : "*Jones est coupable et Smith est innocent.*" (I)
   - JONES : "*Si Brown est coupable alors Smith aussi.*" (II)
   - SMITH : "*Je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable.*" (III)

   Soient B, J et S les énoncés ~~ń~~ Brown est innocent ~~ż~~, ~~ń~~ Jones est innocent~~ż~~ et ~~ń~~ Smith est innocent ~~ż~~.

   (a) Exprimer le témoignage de chacun des suspects dans le symbolisme logique.

   (b) Calculer les valeurs de vérités des trois formules obtenues.

   (c) Les témoignages des trois suspects sont-ils compatibles ?

   (d) Le témoignage de l'un des suspects découle-t-il de celui d'un autre suspect ? Si oui, desquels deux témoignages s'agit-il ?

   (e) En supposant que tous sont innocents, lequel aurait commis un faux serment ?

a) J : Jones est innocent
B : Brown est innocent
S : Smith est innocent

B : I : $\neg J \wedge S$
J : II : $\neg B \Rightarrow \neg S$
S : III : $S \wedge (\neg J \vee \neg B)$

b) cf annexe

c) Il n'y a aucun lien entre les tables de vérité de I, II et III

d) cf annexe

e) Si $J = B = S = 1$, I et III sont faux
$\Rightarrow$ Brown et Smith ont fait un faux serment.

B	J	S	$\neg B$	$\neg J$	$\neg S$	I	II	$\neg J \vee \neg B$	III
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0

I	II	III	I $\Rightarrow$ II	I $\Rightarrow$ III	II $\Rightarrow$ III	II $\Rightarrow$ I	III $\Rightarrow$ I	III $\Rightarrow$ II
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1

$\Uparrow$

Le témoignage de Smith
découle de celui de Brown

6. Soit le raisonnement suivant :
"Quand il fait soleil, je mets mes lunettes ou je ne sors pas.
Je ne reste à la maison que sans lunette et par temps gris.
Donc,, si je mets mes lunettes c'est qu'il fait gris."
ne $l \Rightarrow$

(a) Formaliser ce raisonnement en utilisant les variables suivantes :
   - s : il fait soleil
   - l : je mets mes lunettes
   - m : je reste à la maison

(b) Montrer que le raisonnement suivant est valide en utilisant les tables de vérité.

a) I : $s \Rightarrow (l \vee m)$

II : $m \Rightarrow (\neg l \vee \neg s)$

III : $\neg l \Rightarrow \neg s$

b) $(\mathrm{I} \wedge \mathrm{II}) \Rightarrow \mathrm{III}$ est une tautologie

s	l	m	$l \vee m$	I	$\neg l \wedge \neg s$	II	III	$\mathrm{I} \wedge \mathrm{II}$	$\mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{III}$
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

76. Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

(a) f est la fonction nulle (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$$

(b) Le dénominateur D de f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

$$\exists x \in \mathbb{R} \,/\, D(x) = 0$$

(c) f est l'identité de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire la fonction qui, à chaque réel, associe lui-même).

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x$$

(d) Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$.

$$\exists x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = x$$

(e) f est croissante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

(f) L'équation $\sin x = x$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.

$$\exists! x \in \mathbb{R} \,/\, \sin x = x$$

(g) Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, M est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R si et seulement si la distance de M à Ω vaut R.

$$\forall M \in \mathcal{P} : M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |\Omega M| = R$$

8.7. Etudier la signification française et la valeur de vérité des propositions suivantes et les nier :

(a) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z} : x \leq y$
(b) $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : x \leq y$
(c) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N} : x \leq y$
(d) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{N} : x \leq y$

a) Quels que soient le naturel x et l'entier y, $x \leq y$

faux : contre-exemple $3 \leq -4$ est faux

b) Il existe un naturel x et un entier y tel que $x \leq y$

vrai : $3 \leq 6$

c) Quel que soit l'entier x, il existe un naturel tel que $x \leq y$

vrai : $-3 \leq 5$

d) Il existe un entier x tel que, quel que soit le naturel y : $x \leq y$

vrai : $-3 \leq 5$

9. Soit n un nombre entier. Démontrer par contraposition que si n^2 est impair alors n est impair.

La contraposée de cette proposition est : si n est pair alors n^2 est pair

__Dem__ : Si n est pair $\Rightarrow n = 2k$

$$\Leftrightarrow n^2 = 4k^2$$
$$= 2(2k^2)$$

$\Rightarrow n^2$ est pair

10. Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnelle.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux (*)

$\Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ est pair (1)

<u>Lemme</u> : Le carré d'un nombre impair est impair

$n = 2k+1$ est impair

$n^2 = (2k+1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2+2k) + 1$ est impair

Par contraposé, si n^2 est pair donc n est pair

(1) $\Rightarrow p$ est pair $\Rightarrow p = 2k$

$\Leftrightarrow p^2 = 4k^2$

$\Leftrightarrow 2q^2 = 4k^2$

$\Leftrightarrow q^2 = 2k^2$

$\Leftrightarrow q^2$ est pair

$\Leftrightarrow q$ est pair

$\Rightarrow p$ et q sont non premiers entre eux ce qui est contraire à l'hypothèse (*)

~~10~~ 11. Démontrer par récurrence que

(a) $1+3+5+..+(2n-1)=n^2$

si $n=1$ $\quad 1=1^2$ OK

$n=2$ $\quad 1+3=2^2$ OK

On suppose l'expression vraie pour n, ce qui signifie

$n^2 = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$

On va vérifier qu'elle est vraie pour $n+1$

càd

$$\underbrace{1+3+5+\ldots(2n-1)}_{n^2}+(2n+1)=(n+1)^2$$

$\Leftrightarrow n^2+2n+1=(n+1)^2$ OK

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2$$

. $n = 1 \qquad 1^2 = \dfrac{1.(2)(3)}{6}$ ok

. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est vraie

$$\Rightarrow \underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \text{II}$$

$$\Leftrightarrow (n+1)\ \frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} = \text{II}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + n + 6n + 6\right) = \text{II}$$

$$\hookrightarrow 2n^2 + 7n + 6 \stackrel{\Delta}{=} (2n+3)(n+2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6} = \text{II} \qquad (\text{ok})$$

(c) ~~(d)~~ $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

$$n=1 \qquad \frac{1}{1.2}=\frac{1}{1+1} \qquad \text{OK}$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \qquad \text{est vraie}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{n(n+1)}}_{\frac{n}{n+1}}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)}=\frac{n+1}{n+2} \qquad \text{OK}$$