Fonctions complexes : Solutions

1. Discuter le nombre des asymptotes au graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

- $a, b, c \neq 0$
  - $\Delta > 0$ $AV_1 \equiv x = x_1$ et $AV_2 \equiv x = x_2$
  - $\Delta = 0$ $AV \equiv x = -\frac{b}{2a}$
  - $\Delta < 0$ $\cancel{AV}$
- $a \neq 0$
  - $b \neq 0$ $c = 0$ $AV_1 \equiv x = 0$ et $AV_2 \equiv x = -\frac{b}{a}$
  - $b = 0$ $c \neq 0$
    - $ac < 0$ $AV \equiv x = \pm \frac{c}{a}$
    - $ac > 0$ $\cancel{AV}$
  - $b = 0$ $c = 0$ $AV \equiv x = 0$
- $a = 0$
  - $b \neq 0$ $c \neq 0$ $AV \equiv x = -\frac{c}{b}$
  - $b = 0$ $c \neq 0$ $\cancel{AV}$
  - $b \neq 0$ $c = 0$ $AV \equiv x = 0$

On a tjs une $AH \equiv y = 0$ sauf dans le cas $a = b = 0$ et $c \neq 0$

2. Soit la fonction $f(x) = ax + \dfrac{b}{(x+c)^2}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}_0$ Déterminer a, b et c pour que le graphe de $f(x)$

   – admette une asymptote parallèle à la droite $d \equiv y = x - 1$
   – admette l'asymptote d'équation $d' \equiv x = -1$
   – comprenne le point de coordonnées (0,4)

   Déterminer les caractéristiques du graphique de $f(x)$ pour les valeurs de a, b et c trouvées.

. AO du $f(x) \equiv y = ax \quad // \quad y = x - 1$

$\Rightarrow a = 1$

. AV $\equiv x = -1 \Leftrightarrow (-1+c)^2 = 0 \Leftrightarrow c = 1$

. $(0,4) \in f \Leftrightarrow \dfrac{b}{1^2} = 4 \Leftrightarrow b = 4$

$$f(x) = x + \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4 \cdot 2\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 7}{(x+1)^3}$$

	1	3	3	−7
1		1	4	7
	1	4	7	0

$$(x-1)(x^2+4x+7)$$

$\hookrightarrow \Delta < 0$

x		−1		1	
N	−		−	0	+
D	−	0	+		+
$f'(x)$	+	AV	−	0	+
	↗		↘	m	↗
				(1, 2)	

$$f''(x) = +8\,\frac{3\,\cancel{(x+1)}^{\cancel{2}}}{(x+1)^{\cancel{6}\,4}}$$

$$= \frac{24}{(x+1)^4} > 0$$

x		-1		1	
$f'(x)$	+	AV	−	0	+
$f''(x)$	+	AV	+		+
	↗	AV	↘	m (1,2)	↗

3. Donner l'expression analytique d'une fonction dont le graphe cartésien admet :
   - la droite d'équation $y = 5x - 6$ comme asymptote ;
   - la droite d'équation $x = 2$ comme asymptote.

$$f(x) = 5x - 6 + \frac{1}{x-2}$$

4. On donne la fonction définie par $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$.

   Déterminer, dans chacun des cas suivants pris séparément, un coefficient ou la relation qui existe entre les coefficients lorsque :
   (a) l'asymptote horizontale est la droite d'équation $y = 2$
   (b) l'asymptote horizontale est la droite d'équation $y = 0$
   (c) une des asymptotes verticales est la droite d'équation $x = 3$
   (d) les asymptotes verticales sont les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$
   (e) l'unique asymptote verticale est la droite d'équation $x = 1$
   (f) le graphique n'admet pas d'asymptote verticale

(a) $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = a \iff a = 2$

(b) $a = 0$

(c) $9 + 3p + q = 0$ et $p^2 - 4q > 0$

$\hookrightarrow q = -3p - 9 \Rightarrow p^2 + 12p + 36 > 0$

$\iff (p+6)^2 > 0 \iff p \neq -6$

(d) $\begin{cases} 4 + 2p + q = 0 \\ 16 + 4p + q = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 12 + 2p = 0 \\ (1) \end{cases} \iff \begin{cases} p = -6 \\ q = 8 \end{cases}$

(e) $x^2 + px + q = x^2 - 2x + 1 \iff \begin{cases} p = -2 \\ q = 1 \end{cases}$

(f) $\Delta < 0 \iff p^2 - 4q < 0$

5. On donne les fonctions $f_m(x) = \dfrac{m-x}{mx-1} (m \in \mathbb{R}_0)$

(a) Démontrer que les fonctions $f_m(x)$ comprennent deux points dont les coordonnées sont indépendantes de m ;

(b) Déterminer l'ensemble des points d'intersection des 2 asymptotes de chacun des graphiques ;

(a) $y = \dfrac{m-x}{mx-1}$

$\Leftrightarrow (mx-1)y = m-x$

$\Leftrightarrow mxy - y - m + x = 0$

$\Leftrightarrow m(xy-1) - (-x+y) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

$A : (1,1)$ et $B(-1,-1)$

(b) $AV \equiv x = \dfrac{1}{m}$ et $AH \equiv y = -\dfrac{1}{m}$

$\begin{cases} x = \dfrac{1}{m} \\ y = -\dfrac{1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{x} \\ y = -x \end{cases}$

Le lieu est la droite d'équation $y = -x$

6. On considère les fonctions $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ et $g_m(x) = m\frac{x-1}{x+1} (m \in \mathbb{R}_0)$. Soient F et G_m leurs graphiques respectifs.

(a) Pour quelles valeurs de m, F et G_m se coupent-elles en deux points distincts A et B ?

(b) Calculer les coordonnées de A et B en fonction de m ;

(c) Etablir l'équation de AB et vérifier qu'elle passe par un point fixe.

(a) $f \cap g_m \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = m\frac{x-1}{x+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = m(x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - mx^2 + 2mx - m = 0$

$\Leftrightarrow x^2(1-m) + 2(1+m)x + (1-m) = 0$

$\Delta = 4(1+m)^2 - 4(1-m)^2$

$= 4(\cancel{m^2} + 2m + 1) - 4(\cancel{m^2} - 2m + 1)$

$= 16m$

2 pts $\Leftrightarrow 4\sqrt{m} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

(b) $x_{1,2} = \frac{-2(1+m) \pm 4\sqrt{m}}{2(1-m)} = \frac{-(1+m) \pm 2\sqrt{m}}{1-m}$ (*)

$y_{1,2} = \frac{\frac{-(1+m) \pm 2\sqrt{m}}{1-m} + 1}{\frac{-(1+m) \pm 2\sqrt{m}}{1-m} - 1} = \frac{-(1+m) \pm 2\sqrt{m} + 1 - m}{-(1+m) \pm 2\sqrt{m} - 1 + m}$

$= \frac{-2m \pm 2\sqrt{m}}{-2 \pm 2\sqrt{m}} = \frac{m \pm \sqrt{m}}{1 \pm \sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m}(\sqrt{m} \pm 1)}{1 \pm \sqrt{m}}$

$= \pm\sqrt{m}$

(*) $\frac{(1 \pm \sqrt{m})^2}{m-1} = \frac{(1 \pm \sqrt{m})^2}{(\sqrt{m}+1)(\sqrt{m}-1)}$ $\begin{cases} \frac{\sqrt{m}-1}{\sqrt{m}+1} \\ \frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1} \end{cases}$

$A : \left(\frac{\sqrt{m}-1}{\sqrt{m}+1} , -\sqrt{m} \right)$ et $B : \left(\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1} , \sqrt{m} \right)$

c) $AB \equiv y - \sqrt{m} = \dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{m}}{\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1} - \frac{\sqrt{m}-1}{\sqrt{m}+1}} \left(x - \frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1} \right)$

$$= \frac{2\sqrt{m}(m-1)}{\cancel{m^2}+2\sqrt{m}\cancel{+1}\cancel{-m^2}+2\sqrt{m}\cancel{-1}} \left(\quad \right)$$

$$= \frac{m-1}{2} \left(x - \frac{\cdots}{\cdots} \right)$$

$$\equiv y - \frac{m-1}{2} x - \sqrt{m} + \frac{m-1}{2} \frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1} = 0$$

$$\equiv y - \frac{m-1}{2} x + \frac{-2m+2\sqrt{m}+m\sqrt{m}+m-\sqrt{m}-1}{2(\sqrt{m}-1)} = 0$$

$$\equiv 2y - (m-1)x + \frac{m\sqrt{m}+\sqrt{m}-m-1}{\sqrt{m}-1} = 0$$

$$\equiv 2y - (m-1)x + \frac{\sqrt{m}(m+1)-(m+1)}{\sqrt{m}-1} = 0$$

$$\equiv 2y - (m-1)x + (m+1) = 0$$

Pt fixe $\rightarrow (2y+x+1) - m(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ $\qquad P(1,-1)$

7. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x(2-x)}$
Quel est l'ensemble des milieux des segments découpés par F sur des droites parallèles à Ox ?

$$\begin{cases} y = \dfrac{(x+1)^2}{x(2-x)} \\ y = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = k(2x - x^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + kx^2 - 2kx = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(1+k) + 2(1-k)x + 1 = 0$$

$$\Delta = 4(k^2 - 2k + 1) - 4(1+k)$$
$$= 4k^2 - 8k + 4 - 4 - 4k$$
$$= 4k^2 - 12k$$
$$= 4k(k-3)$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{-\cancel{2}(1-k) \pm \cancel{2}\sqrt{k(k-3)}}{\cancel{2}(1+k)} \\ y_{1,2} = k \end{cases}$$

milieu $\rightarrow \left(\dfrac{-2(1-k)}{2(1+k)}, \dfrac{2k}{2} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+k}{1+k} \\ y = k \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+y}{1+y} \quad \Leftrightarrow x + xy + 1 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1-x}{-1+x}$$

$$= \frac{x+1}{1-x}$$

8. Soit m, réel, un paramaètre non nul. Soit $\mathcal{C}_m$ les courbes d'équation :

$$y = \frac{x}{m} + 3 - \frac{2}{m} + \frac{1-2m}{mx}$$

Démontrer que ces courbes ont un point commun et qu'elles sont tangentes en ce point.

$$mxy = x^2 + 3mx - 2x + 1 - 2m$$

$$\Leftrightarrow m(xy - 3x + 2) - (x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy - 3x + 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad A : (1, 1)$$

$$f_m'(x) = \frac{1}{m} + \frac{1-2m}{m}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f_m'(1) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m} + 2 = 2 \quad (\text{indpdt de } m)$$

9. On considère la fonction $f_m(x) = \dfrac{x^2 - mx}{x^2 - 4x + 3}$ $(m \in \mathbb{R})$.

(a) Etudier les variations de f_4 et déterminer l'équation de l'axe de symétrie du graphe de f_4.

(b) Préciser la valeur de m pour que le graphe de f_m
- n'admette ni maximum ni minimum ;
- admette un maximum et un minimum ;
- admette seulement un minimum.

(c) Calculer, en fonction de m, les coordonnées du point A commun au graphique de f_m et à son asymptote parallèle à Ox.

(d) Calculer les coordonnées du point B commun au graphique de f_m et à OA $(O \neq A \neq B)$

a) $f_4(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$

$$f_4'(x) = \frac{(2x-4)(x^2-4x+3) - (x^2-4x)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$= (2x-4) \cdot \frac{3}{(x^2-4x+3)^2}$$

x		1		2		3	
N	$-$		$-$	0	$+$		$+$
D	$+$	0	$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
	↘		↘	m $(2, 4)$	↗		↗

Axe symétrie : $x = a$

$$f(a-x) = f(a+x)$$

$$\frac{(a-x)^2 - 4(a-x)}{(a-x)^2 - 4(a-x) + 3} = \frac{(a+x)^2 - 4(a+x)}{(a+x)^2 - 4(a+x) + 3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-2ax+x^2-4a+4x}{a^2-2ax+x^2-4a+4x+3} = \frac{a^2+2ax+x^2-4a-4x}{a^2+2ax+x^2-4a-4x+3}$$

$$\Leftrightarrow \left[(a^2+x^2-4a)-(2ax-4x)\right]\left[(a^2+x^2-4a+3)+(2ax-4x)\right]$$
$$= \left[(a^2+x^2-4a)+(2ax-4x)\right]\left[(a^2+x^2-4a+3)-(2ax-4x)\right]$$

$$\Leftrightarrow (a^2+x^2-4a)(2ax-4x)-(2ax-4x)(a^2+x^2-4a+3)$$
$$= -(a^2+x^2-4a)(2ax-4x)+(2ax-4x)(a^2+x^2-4a+3)$$

$$\Leftrightarrow 2x(2a-4)\left[\cancel{a^2}+\cancel{x^2}-\cancel{4a}-\cancel{a^2}-\cancel{x^2}+\cancel{4a}-3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow -12x(a-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=2$$

b) $$f'_m(x) = \frac{(2x-m)(x^2-4x+3)-(x^2-mx)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3}-(8+m)x^2+(6+4m)x-3m-\cancel{2x^3}+(4+2m)x^2-4mx}{D}$$

$$= \frac{(m-4)x^2+6x-3m}{D}$$

$$\Delta = 36+12m(m-4)$$
$$= 12m^2-48m+36$$
$$= 12(m^2-4m+3)$$

m		1		3	
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$

0 ext $\rightarrow$ $m \in \,]1,3[$

2 ext $\rightarrow$ $m \in -\infty, 1[\, \cup \,]3, +\infty$