Compléments sur les fonctions : Solutions

1. Soit la fonction $f : x \to x + \frac{1}{|x-1|}$. Quel est le domaine de la fonction $g(x) = 1 + \frac{1}{|f(x)|}$?

dom $g(x)$: CE $|f(x)| \neq 0 \iff f(x) \neq 0$

$$\iff \left| x + \frac{1}{|x-1|} \right| \neq 0$$

x		1	
$\|x-1\|$	$-x+1$		$x-1$

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ x + \frac{1}{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\iff f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+x+1}{1-x} \neq 0 & \text{si } x < 1 \quad (1) \\ \frac{x^2-x+1}{x-1} \neq 0 & \text{si } x \geq 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$|f(x)| = \begin{cases} \cancel{-\frac{-x^2+x+1}{1-x}} \; a & \text{si } (a) < 0 \text{ et } x < 1 \\ \cancel{\frac{-x^2+x+1}{1-x}} & \text{si } (a) \geq 0 \text{ et } x < 1 \\ \cancel{-\frac{x^2-x+1}{x-1}} & \text{si } (b) < 0 \text{ et } x \geq 1 \\ \cancel{\frac{x^2-x+1}{x-1}} \; b & \text{si } (b) \geq 0 \text{ et } x \geq 1 \end{cases}$$

2. Déterminer le domaine de la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - 11x - 6}{|x^2 - 5x + 6| - 2\sqrt{x^2}}$.

CE : $|x^2 - 5x + 6| - 2|x| \neq 0$

$$|x^2 - 5x + 6| = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si } x^2 - 5x + 6 \geq 0 \overset{TS}{\iff} x \in]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[\\ -x^2 + 5x - 6 & \text{si } x \in]2, 3[\end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

x		0		2		3	
$\lvert x^2-5x+6 \rvert$	x^2-5x+6		x^2-5x+6		$-x^2+5x-6$		x^2-5x+6
$-2\lvert x \rvert$	$-(-2x)$		$-2x$		$-2x$		$-2x$
$E(x)$	1		2		3		4

1 $x^2 + 3x + 6 \neq 0 \overset{\Delta}{\iff} \Delta < 0 \Rightarrow$ imp

2 $x^2 - 7x + 6 \neq 0 \overset{\Delta}{\iff} \Delta = 49 - 24 = 25 \quad x_{1,2} = \dfrac{7 \pm 5}{2} \Big\langle {6 \to AR \atop 1}$

3 $-x^2 + 3x - 6 \neq 0 \overset{\Delta}{\iff}$ (1) $\Delta < 0 \Rightarrow$ imp

4 $x^2 - 7x + 6 \neq 0 \overset{\Delta}{\iff}$ (2) $x_{1,2} = \Big\langle {6 \atop 1 \to AR}$

$\text{dom}_f : \mathbb{R} \setminus \{1, 6\}$

3. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$

(a) i. Vérifier que le graphe ne coupe pas l'axe des x ;

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 = 0$ $\quad \Delta = -16 < 0$

$\rightarrow$ imp

$f(x)$ n'a pas de zéro

ii. Déterminer le domaine et l'image de $f(x)$;

<u>dom</u>$_f$: CE : $x \neq 1 \Rightarrow$ dom$_f$: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

<u>im</u>$_f$: on cherche k tel que $f(x) = k$ a au moins une sol.

$\dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = k \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 = k(x - 1)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 - kx + k = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - (k+2)x + (k+5) = 0$ a des sol si $\Delta \geq 0$

$\Delta = (k+2)^2 - 4(k+5)$

$= k^2 + 4k + 4 - 4k - 20$

$= k^2 - 16$

k		-4		4	
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$

im$_f$: $-\infty, -4] \cup [4, +\infty$

iii. Vérifier que le point (1,0) est centre de symétrie de la fonction

Il faut vérifier que $0 = \dfrac{f(1+x) + f(1-x)}{2}$

ou $f(1+x) = -f(1-x)$

$$f(1+x) = \frac{(1+x)^2 - 2(1+x) + 5}{1+x-1}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - 2 - 2x + 5}{x} = \frac{x^2+4}{x}$$

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 5}{1-x-1}$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1 - 2 + 2x + 5}{-x} = \frac{x^2+4}{-x} = -f(1+x)$$

iv. Résoudre $f(x) \geq x - 1$

$$\frac{x^2 - 2x + 5}{x-1} \geq x - 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 5 - (x-1)^2}{(x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 5 - (x^2 - 2x + 1)}{x-1} \geq 0$$

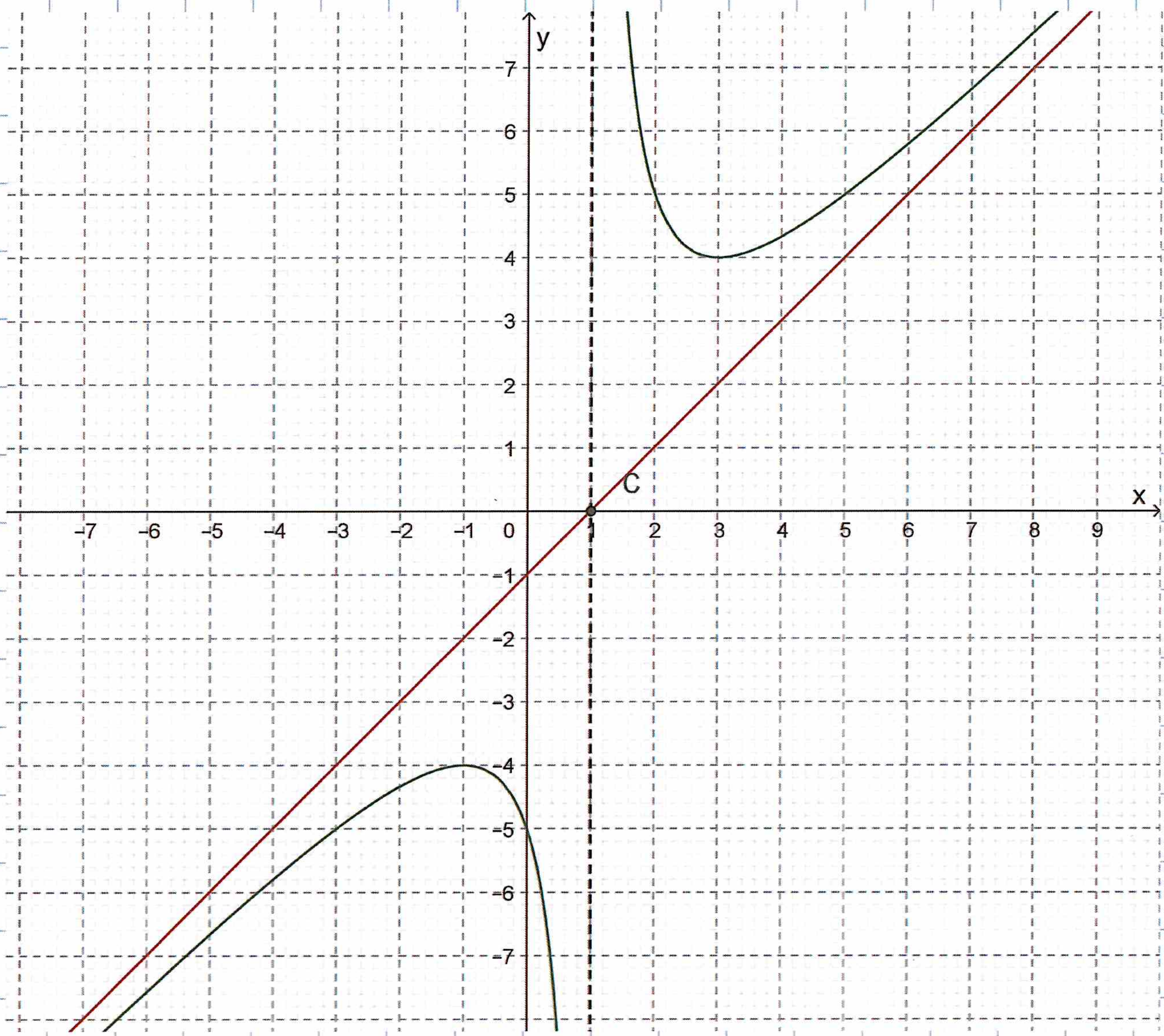
$$\Leftrightarrow \frac{4}{x-1} \geq 0$$

x		1	
$\frac{4}{x-1}$	$-$	$\Vert$	$+$

$S :]1, +\infty$

Graph: la courbe est au dessus de la dte $y = x - 1$ si $x > 1$

(b) Utiliser ces résultats pour ébaucher le graphe de $f(x)$.



4. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$

(a) Déterminer $\operatorname{dom} f$ et $\operatorname{im} f$

$\underline{\text{dom}}_f$: CE : $x \neq 2 \leadsto \text{dom}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\underline{\text{im}}\, f$ $\quad \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = k \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = k(x^2 - 4x + 4)$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - kx^2 + 4kx - 4k = 0$

$\Leftrightarrow x^2(1-k) + 4x(k-1) + (3-4k) = 0$

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16(k-1)^2 - 4(1-k)(3-4k) \geq 0$

$\Leftrightarrow 16(k^2 - 2k + 1) - 4(+4k^2 - 7k + 3) \geq 0$

$\Leftrightarrow 16k^2 - 32k + 16 - 16k^2 + 28k - 12 \geq 0$

$\Leftrightarrow -4k + 4 \geq 0 \Leftrightarrow k \leq 1$

$\text{im}_f : -\infty, 1]$

(b) Résoudre $f(x) = 0$

$\dfrac{x^2 - 4x + 3}{\cancel{(x-2)^2}} = 0$ $\qquad \Delta = 16 - 12 = 4$

$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} < \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$

(c) Comparer $f(2+x)$ à $f(2-x)$. Conclure.

$$f(2+x) = \frac{(2+x)^2 - 4(2+x) + 3}{(2+x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 4 - 8 - 4x + 3}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f(2-x) = \frac{(2-x)^2 - 4(2-x) + 3}{(2-x-2)^2}$$

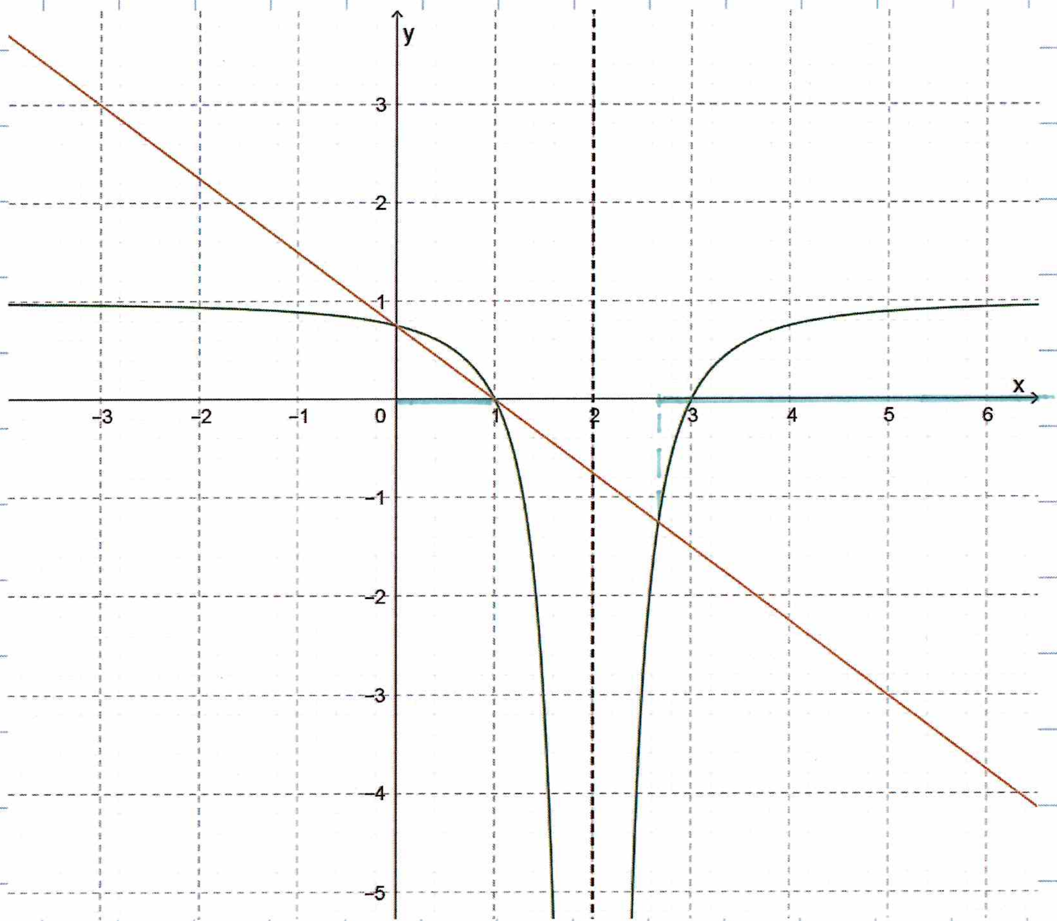
$$= \frac{x^2 - 4x + 4 - 8 + 4x + 3}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$\Rightarrow$ AS $\equiv x = 2$

(d) Etudier le signe de $f(x)$.

x		1		2		3	
N	+	0	−		−	0	+
D	+		+	0	+		+
$f(x)$	+	0	−	‖	−	0	+

(e) Déduire une allure possible du graphe de f.



(f) Résoudre $f(x) \geq -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$ et interpréter graphiquement le résultat.

$$f(x) \geq \frac{3}{4}(1-x) \iff \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} \geq \frac{3}{4}(1-x)$$

$$\iff \frac{4(x^2-4x+3)-3(1-x)(x-2)^2}{4(x-2)^2} \geq 0 \qquad x \neq 2$$

$$\iff 4x^2-16x+12-3(1-x)(x^2-4x+4) \geq 0$$

$$\iff 4x^2-16x+12-3(-x^3+5x^2-8x+4) \geq 0$$

$$\iff 4x^2-16x+12+3x^3-15x^2+24x-12 \geq 0$$

$$\iff 3x^3-11x^2+8x \geq 0$$

$$\iff x(3x^2-11x+8) \geq 0$$

$x = 0$

$\Delta = 121-96 = 25$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 5}{6} \quad \frac{8}{3} \approx 2,66 \quad ; \quad 1$$

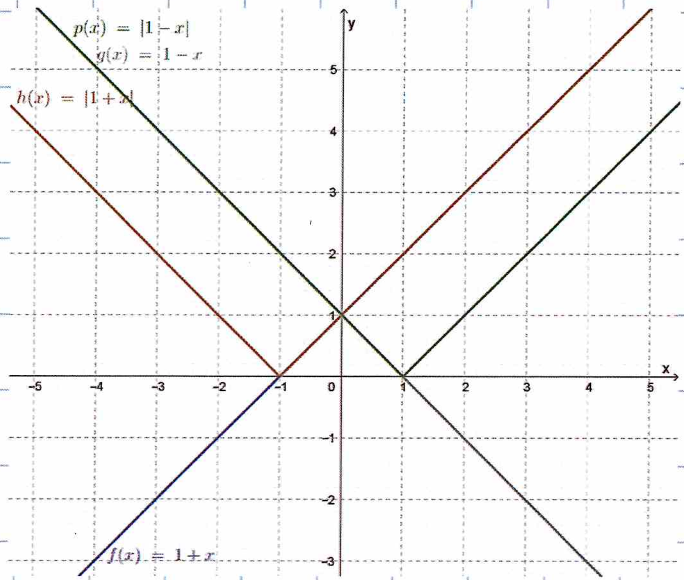
x		0		1		2		$\frac{8}{3}$	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$3x^2 - \dots$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
I_n	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$

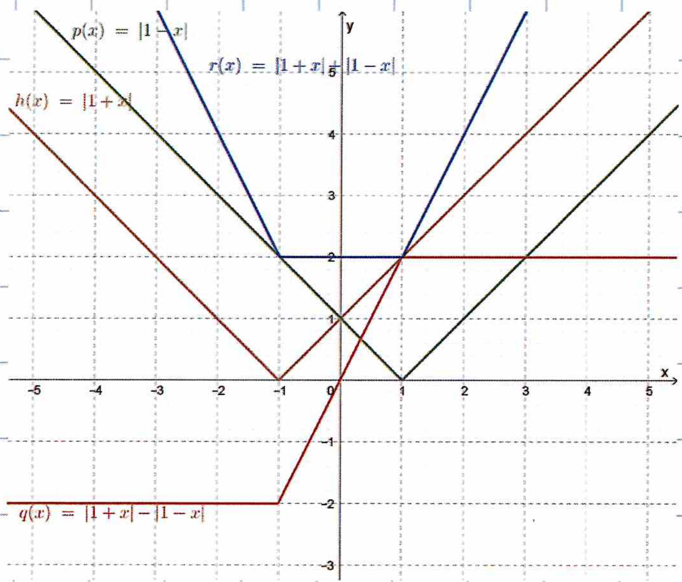
$S : [0,1] \cup [\frac{8}{3}, \infty)$

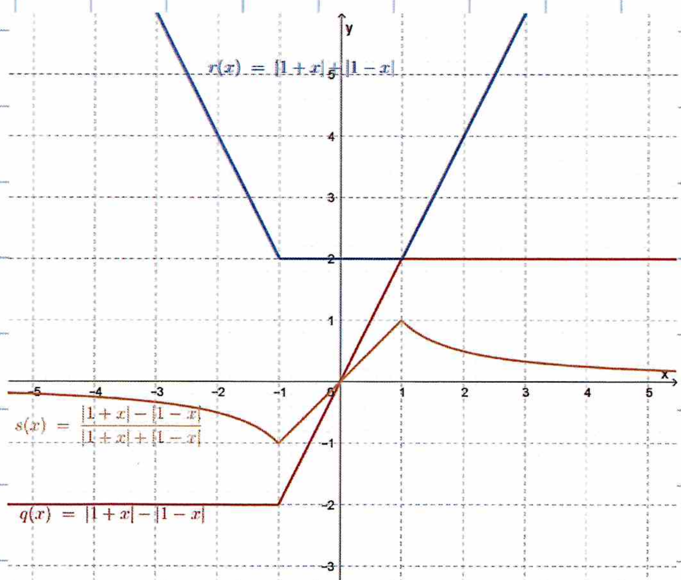
<u>Graph</u> : $f(x)$ est au-dessus de la droite d'éq $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$ pour

$x \in [0,1]$ et $x \in [2,66; +\infty$

5. Sans utiliser la machine graphique, tracer le graphe de $f(x) = \dfrac{|1+x| - |1-x|}{|1+x| + |1-x|}$







6. On définit sur $\mathbb{R}$ deux fonctions f et g par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2+2x+2}$.
On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ leurs courbes respectives dans le plan muni d'un repère orthonormal.

(a) Justifier que f et g existent pour tout x réel.

$\underline{\text{dom}}_f$: $x^2+1 \neq 0 \Rightarrow \text{dom}_f : \mathbb{R}$

$\underline{\text{dom}}_g$: $x^2+2x+2 \neq 0$ $\Delta = 4-8 = -4 < 0$

$\rightarrow \text{dom}_g : \mathbb{R}$

(b) Montrer que g peut s'écrire sous la forme $g(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}$

$$g(x) = \frac{x^2+2x+2-1}{x^2+2x+1+1}$$

$$= \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}$$

(c) Montrer que les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ vérifient l'équation $x^2(x+1)^2 - 1 = 0$ et déterminer les coordonnées de ces points d'intersection.

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 = (x+1)^2 \cdot (x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 - (x+1)^2 (x^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \left[1 - (x^2+1) \right] + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 (\cancel{1} - x^2 - \cancel{1}) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 (x+1)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 (x+1)^2 - 1 = 0$$

$$x^2(x+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = \pm 1$$

- $x^2 + x = 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \simeq 0{,}62 \\ \simeq -1{,}62 \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \frac{1}{\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1}$$

$$=$$

- $x^2 + x + 1 = 0$

$$\Delta = -3 \Rightarrow \text{imp}$$

(d) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ admettent chacune un axe de symétrie dont on précisera l'équation.

Pour $f(x)$, l'axe de symétrie est Oy
car $f(-x) = f(x)$ $\rightarrow AS_f = x=0$

Pour $g(x)$, l'AS a pour éq $x = a$
Il faut $g(a+x) = g(a-x)$

$$g(a+x) = \frac{(a+x+1)^2}{(a+x+1)^2+1}$$

$$g(a-x) = \frac{(a-x+1)^2}{(a-x+1)^2+1}$$

$$g(a+x) = g(a-x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{[(a+1)+x]^2}{[(a+1)+x]^2+1} = \frac{[(a+1)-x]^2}{[(a+1)-x]^2+1}$$

$$\Leftrightarrow [(a+1)^2+2(a+1)x+x^2][(a+1)^2-2(a+1)x+x^2+1]$$
$$= [(a+1)^2-2(a+1)x+x^2][(a+1)^2+2(a+1)x+x^2+1]$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(a+1)^4} - \cancel{2(a+1)^3}x + \cancel{(a+1)^2}x^2 + \cancel{(a+1)^2} + \cancel{2(a+1)^3}x \ldots$$
$$- 4\cancel{(a+1)^2}x^2 + 2\cancel{(a+1)}x^3 + 2(a+1)x + \cancel{(a+1)^2}x^2 \ldots$$
$$- 2\cancel{(a+1)}x^3 + \cancel{x^4} + \cancel{x^2}$$
$$= \cancel{(a+1)^4} + \cancel{2(a+1)^3}x + \cancel{(a+1)^2}x^2 + \cancel{(a+1)^2} \ldots$$
$$- \cancel{2(a+1)^3}x - 4\cancel{(a+1)^2}x^2 - 2\cancel{(a+1)}x^3 - 2(a+1)x \ldots$$
$$+ \cancel{(a+1)^2}x^2 + 2\cancel{(a+1)}x^3 + \cancel{x^4} + \cancel{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+1)x = -2(a+1)x$$

$$\Leftrightarrow 4(a+1)x = 0 \Leftrightarrow a+1=0 \Leftrightarrow a=-1$$

$$AS_g = x = -1$$

(e) Montrer que ~~$\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par une symétrie dont on déterminera le centre.~~

le point $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie qui transforme C en C' (et inversement)

Il faut démontrer que $\dfrac{f\left(-\frac{1}{2}-x\right)+g\left(-\frac{1}{2}+x\right)}{2} = \frac{1}{2}$ (1)

$\forall x \in \text{dom}_{f/g}$

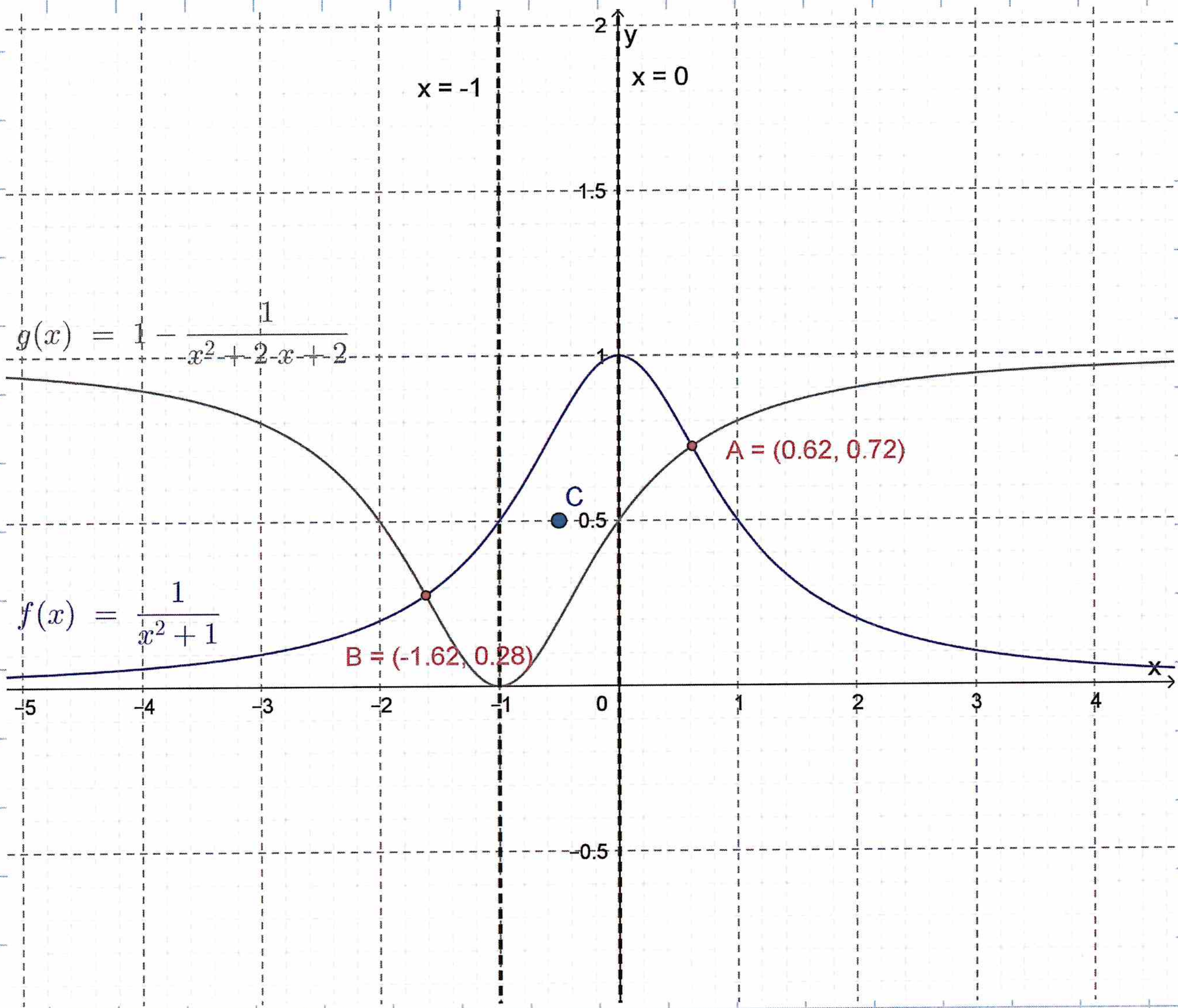
$$f\left(-\frac{1}{2}-x\right) = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}-x\right)^2+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

$$g\left(-\frac{1}{2}+x\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}+x+1\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}+x+1\right)^2+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+1}$$

En remplaçant dans (1) :

$$\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} + \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} = 1 \quad \text{ok}$$



$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$
$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
x = -1
x = 0
A = (0.62, 0.72)
B = (-1.62, 0.28)
C
y
x
2
1.5
1
0.5
-0.5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4