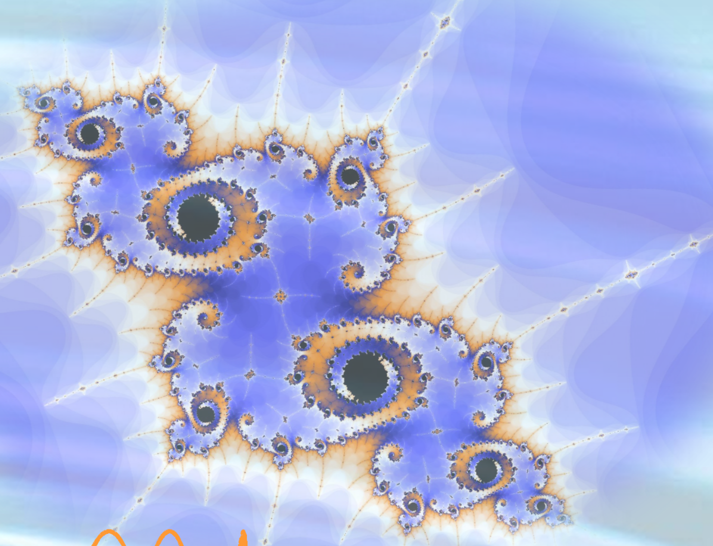
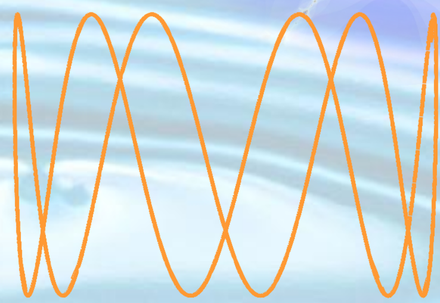
Athénée Royal Uccle 1



$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



$$x_1 \atop x_2 \rangle \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \arctan \frac{x}{1+x^2}$$

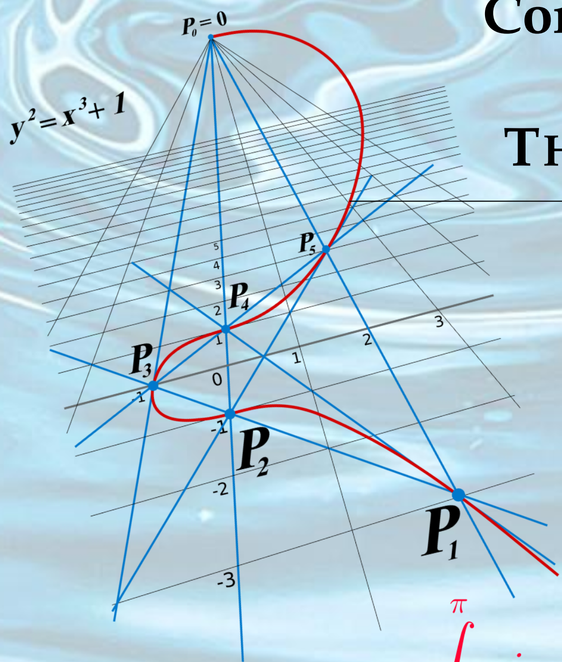
$$e^{i\pi} = -1$$

Cours de Mathématique

5ème année

Complément à 2 périodes hebdomadaires

THÉORIE ET EXERCICES



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\int_0^{\pi} sinx.e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

A.DROESBEKE

Version 2022

$$\cos\alpha = \frac{x_{\vec{a}}.x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}}.y_{\vec{b}}}{\sqrt{x^2_{\vec{a}} + y^2_{\vec{a}}}.\sqrt{x^2_{\vec{b}} + y^2_{\vec{b}}}}$$

A Yves Delhaye, qui m'a lancé dans LaTeX, m'a soutenu
et aidé dans le long cheminement initiatique que
ce langage nécessite, et qui, grâce à son amitié,
m'a permis de réaliser ce cours.

Ce cours lui est dédié.

Table des matières

Préface

Ce cours de 5ème année de préparation à l'enseignement supérieur en mathématique (cours à 2 périodes hebdomadaires) est une totale refonte des cours réalisés précédemment. Il a été repensé en terme de pédagogie et de progression en fonction des expériences vécues.
Il comporte encore énormément de "*coquilles*". Si vous en trouvez, n'hésitez pas à m'en faire part, le cours ne pourra que s'en améliorer... (les corrections peuvent être suggérées à partir du site www.artemath.com)

Merci d'avance et bonne lecture...

Cette création est mise à disposition selon le Contrat Paternité-Pas d'Utilisation Commerciale-Partage des Conditions Initiales à l'Identique 2.0 France.
Ce document est disponible en ligne (http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/) ou par courrier postal à Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

1 Compléments sur le second degré

1.1 Somme et produit des racines

On cherche à évaluer la somme (S) et le produit (P) des racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, soit

$$S = x_1 + x_2$$

et

$$P = x_1.x_2$$

En substituant les valeurs de x_1 et x_2 par $\dfrac{- \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, on obtient :

$$\begin{cases} S = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ P = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} . \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

ou, en réduisant et en utilisant les produits remarquables :

Formule:

$$\begin{cases} S = \dfrac{-b}{a} \\ \\ P = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Exemple:

Sans utiliser Δ, calculer les racines de l'équation $2x^2 - 6x - 20 = 0$
La somme et le produit des racines valent

$$S = -\frac{-6}{2} = 3$$
$$P = \frac{-20}{2} = -10$$

Pour trouver les nombres x_1 et x_2 répondant à ce problème, on peut s'aider d'un tableau dans lequel on place les nombres dont le produit donne -10(P).

x_1	x_2	$x_1 + x_2$
1	-10	-9
2	-5	-3
5	-2	3
10	-1	9

En complétant ce tableau par une colonne contenant $x_1 + x_2$, on trouve directement les solutions : $x_1 = 5$ et $x_2 = -2$.

Remarque: On peut écrire l'équation du second de degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$
$\Leftrightarrow \quad a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ ou encore

$$x^2 - Sx + P = 0$$

x_1 et x_2 sont donc les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

Application: Trouver deux nombres dont la somme vaut 11 et le produit 14.
Ces deux nombres sont la solution de l'équation du second degré $x^2 - 11x + 14 = 0$. On a :

$$\Delta = (-11)^2 - 4.14.1 = 65$$

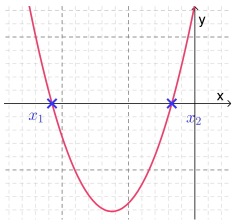
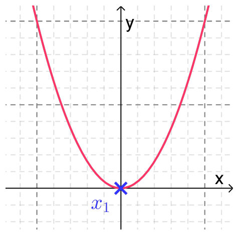
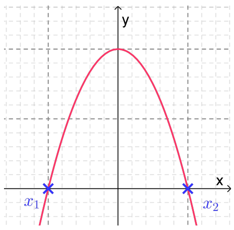
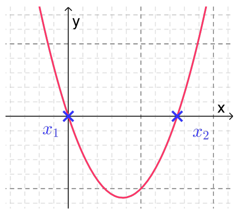
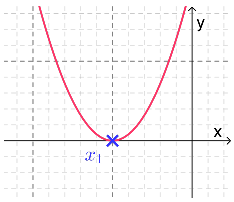
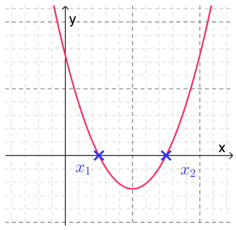
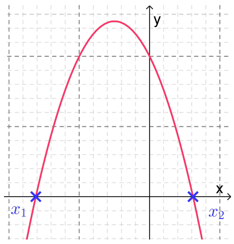
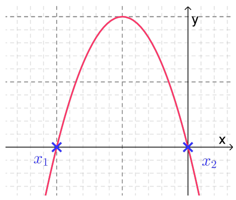
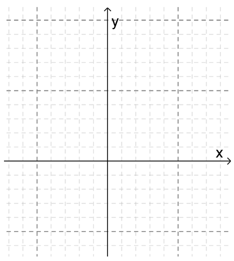
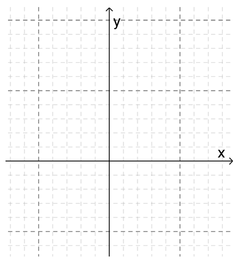
et

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \rangle \frac{11 \pm \sqrt{65}}{2} \langle \begin{matrix} \frac{11 + \sqrt{65}}{2} \\ \frac{11 - \sqrt{65}}{2} \end{matrix}$$

1.2 Discussion du nombre et du signe des solutions d'une équation paramétrique du second degré

1.2.1 Introduction

Associer chaque graphique à une étiquette ou compléter les graphiques pour les étiquettes restantes.

1. 	2. 
3. 	4. 
5. 	6. 
7. 	8. 
9. 	10. 

a. $\Delta = 0,\ P > 0,\ S < 0$
b. $\Delta > 0,\ P > 0,\ S < 0$
c. $\Delta > 0,\ P < 0,\ S > 0$
d. $\Delta > 0,\ P > 0,\ S > 0$
e. $\Delta = 0,\ P = 0,\ S = 0$
f. $\Delta > 0,\ P < 0,\ S = 0$
g. $\Delta > 0,\ P = 0,\ S > 0$
h. $\Delta = 0,\ P > 0,\ S > 0$
j. $\Delta > 0,\ P = 0,\ S < 0$
i. $\Delta > 0,\ P < 0,\ S < 0$

1.2.2 Définition

Définition: *Une équation paramétrique du second degré est une équation du second degré dans laquelle un paramètre intervient dans les coefficients des inconnues.*
Un paramètre est un nombre "fixe" mais dont on ne connait pas la valeur a priori

L'objet de ce paragraphe est de montrer comment déterminer le nombre et le signe des solutions de cette équation en fonction du paramètre.
Le nombre des racines est donné par le signe de Δ (cf paragraphe **??**). Le signe (et la position relative des racines) sera donné par l'observation de la somme (S) et du produit (P) des racines.

La discussion est basée sur les constatations suivantes :

1. Si $\Delta > 0$, il y a deux racines x_1 et x_2 :
   (a) Si $P > 0$, les racines sont de même signe :
      i. Si $S > 0$, les deux racines sont positives ;
      ii. Si $S < 0$, les deux racines sont négatives.
   (b) Si $P < 0$, les deux racines sont de signe contraire :
      i. Si $S > 0$, la plus grande en valeur absolue est positive ;
      ii. Si $S < 0$, la plus grande en valeur absolue est négative.
2. Si $\Delta = 0$, il y a une racine x_1. Le produit vaut $P = x_1.x_1 = x_1^2$ qui est donc toujours positif et la somme vaut $S = x_1 + x_1 = 2x_1$
   (a) Si $S > 0$, la racine est positive ;
   (b) Si $S < 0$, la racine est négative.
3. Si $\Delta < 0$ il n'y a pas de racine.

Exemple:

Discuter en fonction de m le nombre et le signe des racines de l'équation :

$$x^2 - 2(m-2)x + m = 0$$

où m est un paramètre réel.
On a :

$$\Delta_x = 4(m-2)^2 - 4m = 4m^2 - 20m + 16 = 4(m^2 - 5m + 4)$$

La notation "$_x$" est là pour rappeler que l'on calcule le Δ de l'équation dont l'inconnue est x. Pour étudier le signe de Δ_x on factorise celui-ci :

$$\Delta_x = 4(m-1)(m-4)$$

Le signe de Δ_x est :

m		1		4	
Δ_x	+	0	−	0	+

La somme et le produit des racines sont respectivement données par :

$$\begin{cases} S = 2(m-2) \\ P = m \end{cases}$$

dont les signes sont résumés dans les tableaux suivants :

m		2	
S	−	0	+

et

m		0	
P	−	0	+

La discussion se fait sur base d'un tableau reprenant l'ensemble des résultats calculés ci-dessus.

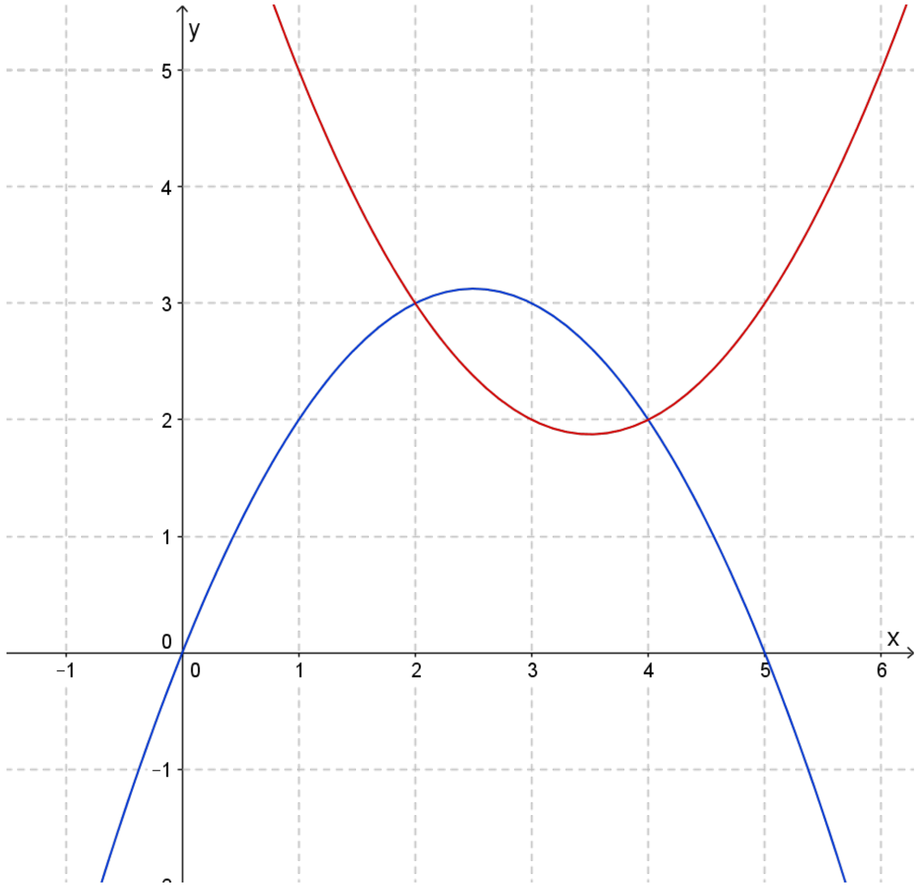
m	Δ_x	P	S	Conclusions ($\lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert$)
	+	-	-	Deux racines de signes contraires $x_1 < 0 < x_2$
0	+	0	-	Une racine nulle et une racine négative
	+	+	-	Deux racines négatives
1	0	+	-	Une racine double négative
	-	+	-	Pas de racines
2	-	+	0	Pas de racines
	-	+	+	Pas de racines
4	0	+	+	Une racine double positive
	+	+	+	Deux racines positives

Graphiquement, cette discussion traduit (en fonction de m) le nombre et la position des points d'intersection entre la parabole d'équation $y = x^2 - 2(m-2)x + m$ et l'axe des abscisses.

EXERCICES

1.3 Exercices

1. Sur le dessin ci-dessous sont représentées deux fonctions du second degré f et g.



   (a) On sait que le discriminant de f est positif et celui de g négatif. Déterminer en justifiant le graphe de f et le graphe de g.

   (b) f a pour racines 0 et 5 et de plus $f(1) = 2$. Déterminer l'expression analytique de $f(x)$.

   (c) Les courbes de f et g se coupent aux points $A(2, 3)$ et $B(4, 2)$. De plus g a un minimum en $x = \frac{7}{2}$. Déterminer l'expression analytique de $g(x)$.

2. Soit l'équation :

$$a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0 \tag{1.3.1}$$

   où $x \neq 0$

   (a) Démontrer que cette équation est équivalente à

   $$ax^4+bx^3+(2a+c)\,x^2+bx+a=0$$

   (b) En déduire la solution de l'équation en la réécrivant sous la forme 1.3.1

   $$2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$$

3. Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre m pour lesquelles les inéquations suivantes sont vérifiées pour tout x

$$-3<\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}<3$$

4. Déterminer m dans l'équation $x^2-2x+m=0$ pour que celle-ci admette

   (a) Deux racines distinctes
   (b) Deux racines égales
   (c) Pas de racines
   (d) Deux racines de signes contraires
   (e) Deux racines négatives
   (f) Deux racines positives

5. Déterminer m pour que les inéquations suivantes soient vérifiées quel que soit x

   (a) $x^2+mx+4\geq 0$
   (b) $(4-m)x^2-3x+4+m>0$
   (c) $(m-2)x^2+2(2m-3)x>6-5m$

6. Discuter en fonction du paramètre m le nombre, le signe et la position relative des racines des équations suivantes :

   (a) $x^2+mx-5m=0$
   (b) $x^2-2mx+3m-2=0$
   (c) $x^2+2mx+2m^2=8m-7$
   (d) $mx^2+(m-1)x+m-2=0$
   (e) $(m-4)x^2-4x(m+1)+m=1$

7. Résoudre les systèmes suivants

   (a) $\left\{\begin{array}{l} xy = 48 \\ 3x + 4y = 50 \end{array}\right.$

   (b) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = 5 \end{array}\right.$

   (c) $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \\ x = 41 - y \end{array}\right.$

   (d) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{17}{4} \\ x^2 - y^2 = 25 \end{array}\right.$

8. On considère la fonction $f(x) = x^2 + kx + 4$.
   Déterminer la courbe décrite par le sommet de la parabole lorsque k décrit l'ensemble des réels.

9. Résoudre l'inéquation :
$$\frac{1}{x(x-1)} \leq \frac{1}{\sqrt{x(x+9)}}$$

10. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$$(x-1)\sqrt{x+4} \leq 2 - 4x$$