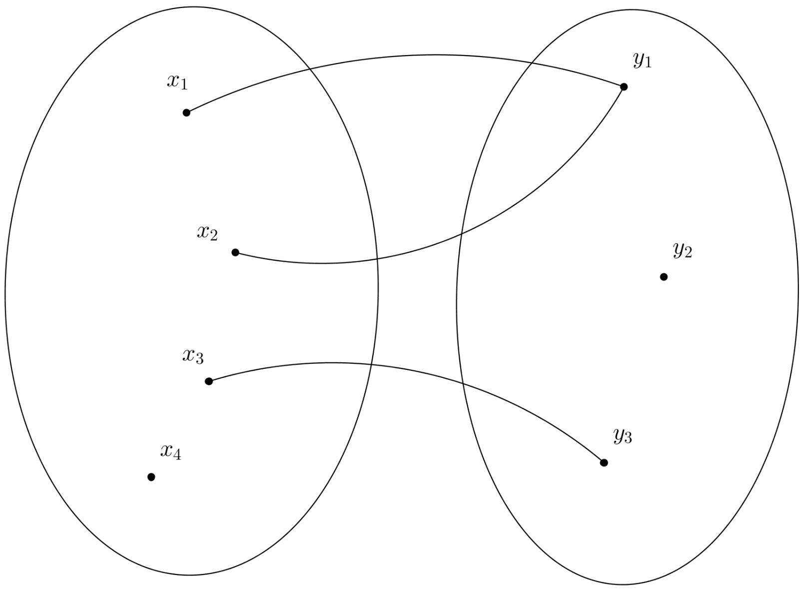
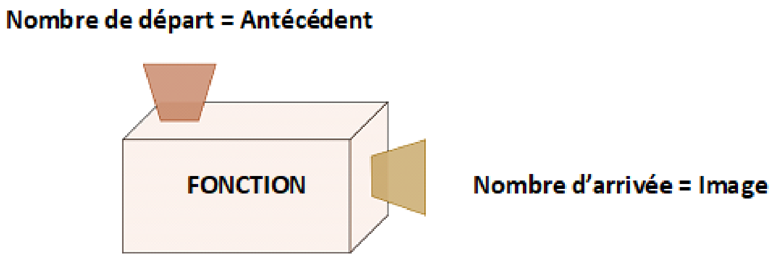
Rappels de 3ème : Les fonctions - Approche graphique

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Définition

Une fonction, liant deux variables réelles, est une relation [1] qui, à toute valeur réelle de x, fait correspondre au plus une (0 ou 1) valeur réelle de y.
x et y sont respectivement appelées variable indépendante et variable dépendante.





1.2 Notations d'une fonction

Pour exprimer que y est une fonction de x, on écrit :

$$y = f(x) \quad \text{ou} \quad f : x \to y = f(x)$$

1. Une relation est un lien entre deux ensembles

1.3 Description d'une fonction

Une fonction peut être décrite de trois manières différentes :

1. par un tableau de correspondance, associant les valeurs de x à celle de y ;
2. par un graphique cartésien qui représente l'ensemble des points dont les coordonnées sont (x, y) ;
3. par une égalité mathématique, appelée équation du graphique, qui exprime le lien existant entre les deux variables.

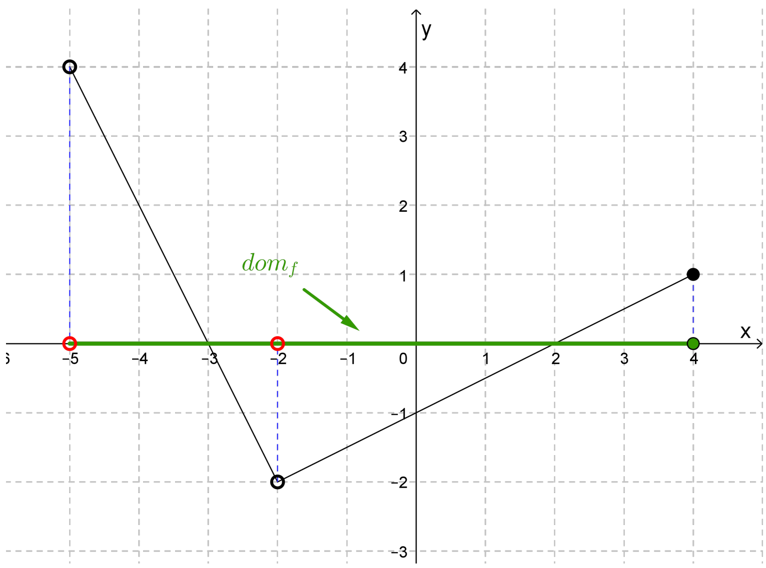
Remarque: Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions à partir de leur graphique uniquement.
Ultérieurement, nous étudierons ces fonctions avec leur équation.

1.4 Domaine d'une fonction

Le domaine d'une fonction est l'ensemble de toutes les valeurs réelles de x ayant une image par cette fonction.
Graphiquement, le domaine de définition est obtenu en relevant sur l'axe Ox l'ensemble des valeurs où le graphe de la fonction existe (c'est-à-dire où il est dessiné).

Exemple:

Le domaine de cette fonction est $]-5, -2[\cup]-2, 4]$



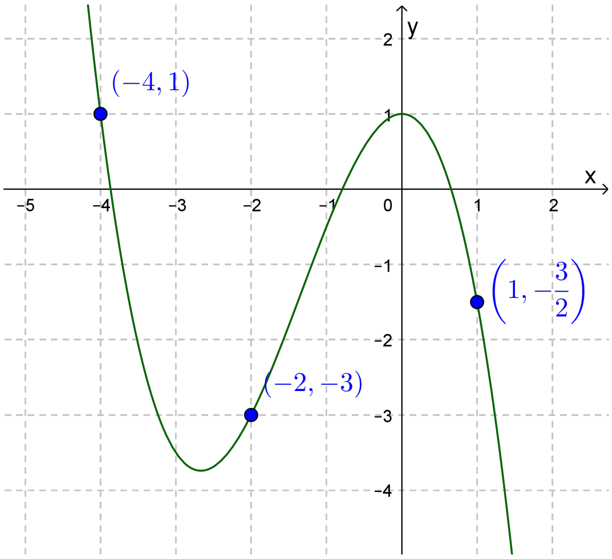
1.5 Image d'un point par une fonction

La valeur numérique d'une fonction $y = fx)$ pour $x = a$ est l'image du réel a par la fonction f. L'image d'un réel a par une fonction f est notée $f(a)$.

Le point de coordonnées $(a, f(a))$ appartient donc au graphique de la fonction.

Exemple:

L'image de -2 par la fonction est -3. On écrit $f(-2) = -3$.
Le point (-3,-2) appartient au graphique de la fonction.

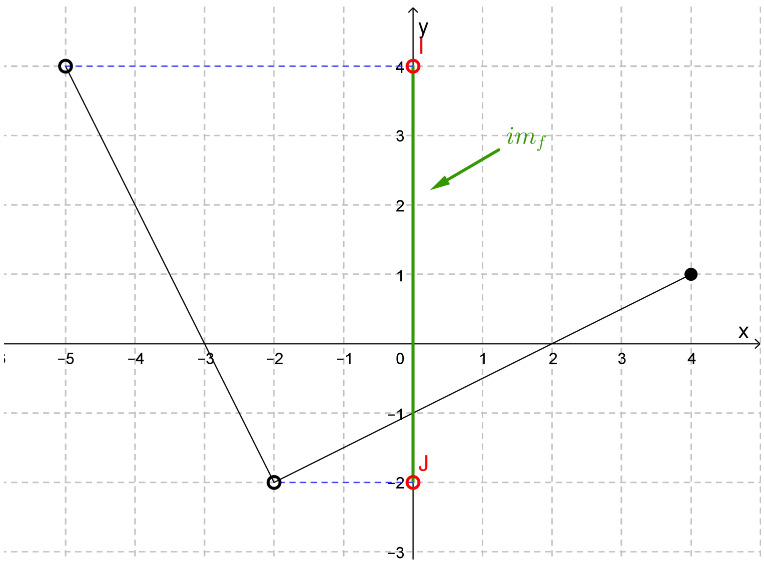


1.6 Ensemble image d'une fonction

L'ensemble image d'une fonction est l'ensemble des réels images par cette fonction. Graphiquement, les images de la fonction sont lues sur l'axe Oy.
Il suffira de déterminer, sur cet axe, l'ensemble des valeurs prises par y.

Exemple:

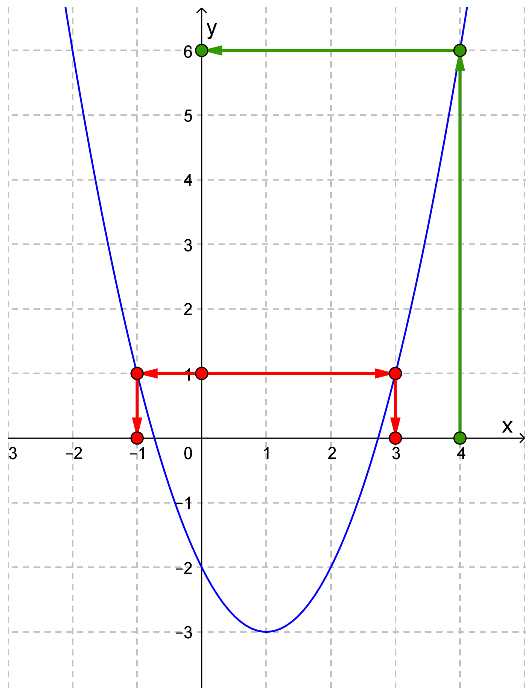
L'ensemble image de la fonction ci-dessous est $]-2,4[$



1.7 Recherche graphique de l'image et de l'antécédent

Pour déterminer graphiquement l'image du nombre 4, on se place sur l'axe des abscisses. On repère l'abscisse 4 et à l'aide de la courbe, on trouve son ordonnée 6.

Pour déterminer graphiquement le(s) antécédent(s) du nombre 1, on se place sur l'axe des ordonnées. On repère l'ordonnée 1 et à l'aide de la courbe, on trouve les abscisses correspondantes -1 et 3



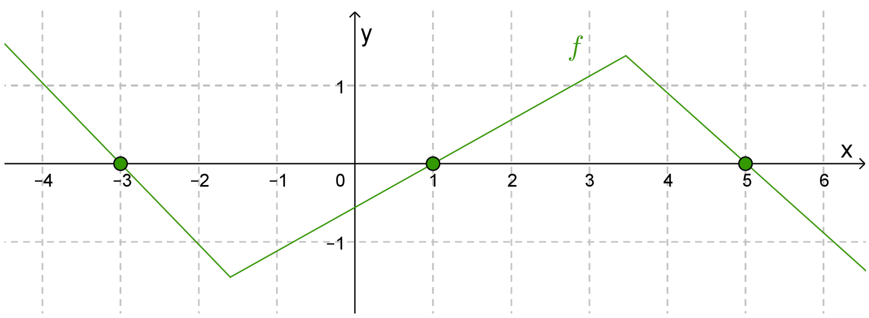
1.8 Zéro d'une fonction

Un zéro d'une fonction est l'abscisse d'un point d'intersection du graphique de cette fonction avec l'axe horizontal Ox.

Remarque: Un zéro d'une fonction est une valeur de x pour laquelle la valeur numérique de cette fonction est nulle : x est un zéro de f ssi $f(x) = 0$.

Exemple:

Dans la fonction suivante, il y a trois points d'intersection entre le graphique de la fonction et l'axe Ox. Il y a donc trois zéros : -3, 1 et 5.



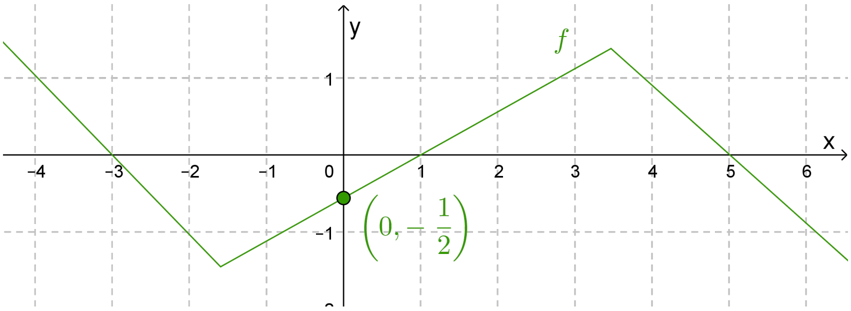
1.9 Ordonnée à l'origine

L'ordonnée à l'origine d'une fonction est l'ordonnée du point d'intersection du graphique de cette fonction avec l'axe vertical.

Remarque: L'ordonnée à l'origine d'une fonction est l'image de zéro par cette fonction, c'est-à-dire $f(0)$

Exemple:

L'ordonnée à l'origine de cette fonction est $-\frac{1}{2}$.



2 Signe d'une fonction et tableau de signes

Le tableau de signes d'une fonction permet de déterminer les valeurs de x pour lesquelles la fonction est positive (+) ou négative (-).
Sur la première ligne de ce tableau, on indique les éventuelles bornes du domaine et les zéros.
Sur la seconde ligne, on indique 0 en dessous des zéros et les signes + ou - en fonction du signe de $f(x)$.

Sur un intervalle de nombres réels, si pour tout nombre a, on a :
- $f(a) > 0$, alors la fonction $f(x)$ est strictement positive sur les intervalles :
- $f(a) < 0$, alors la fonction $f(x)$ est strictement négative sur les intervalles :
- $f(a) \geq 0$, alors la fonction $f(x)$ est positive sur les intervalles :
- $f(a) \leq 0$, alors la fonction $f(x)$ est négative sur les intervalles :

Exemple:

Sur l'ensemble des réels, on :
- $f(x)$ est strictement positive sur les intervalles :

$$]-\infty, -7[\cup]-4, -2[\cup]0, 6[\cup]12, +\infty[$$

- $f(x)$ est strictement négative sur les intervalles :

$$]-7, -4[\cup]-2, 0[\cup]6, 12[$$

- $f(x)$ est positive sur les intervalles :

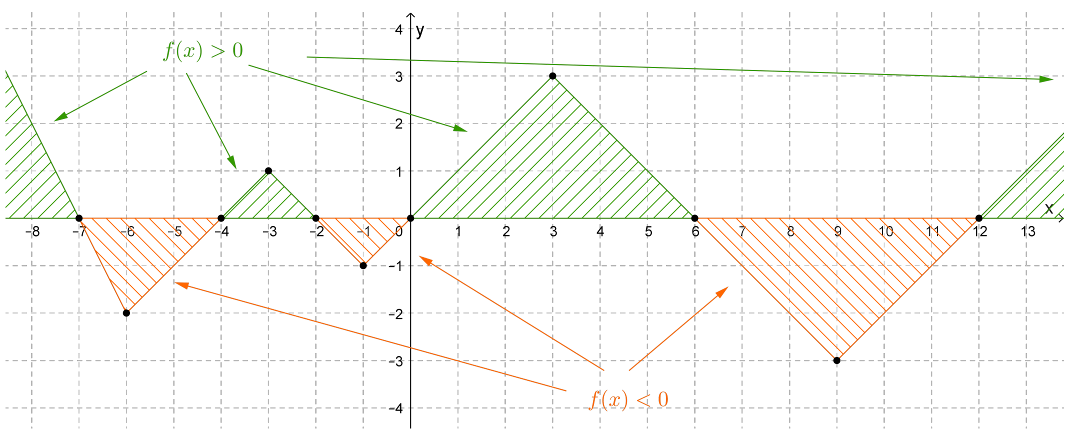
$$]-\infty, -7] \cup [-4, -2] \cup [0, 6] \cup [12, +\infty[$$

- $f(x)$ est négative sur les intervalles :

$$[-7, -4] \cup [-2, 0] \cup [6, 12]$$

Dans le cas de cette fonction, le tableau de signe est :

x	$-\infty$		-7		-4		-2		0		6		12		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	



3 Croissance et extrémum d'une fonction

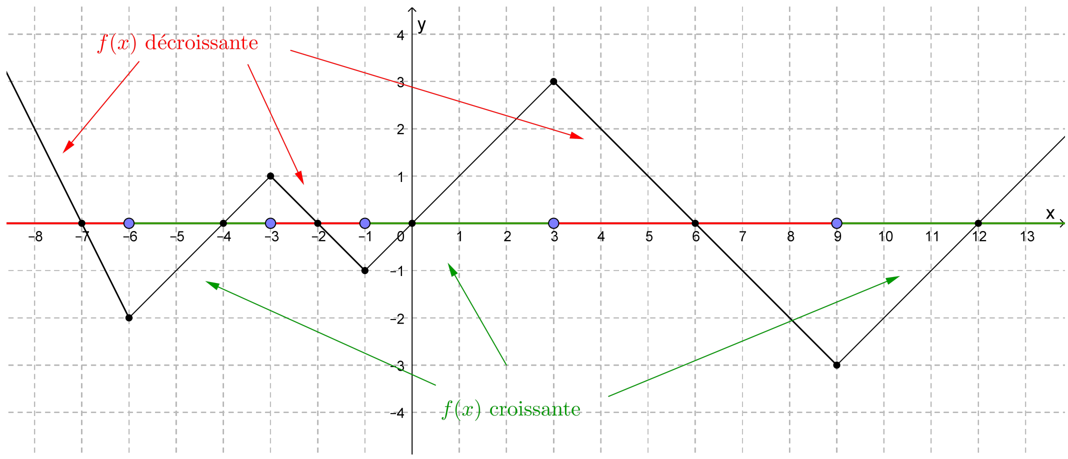
Une fonction $f(x)$ est croissante sur un intervalle si, lorsque x augmente dans cet intervalle, alors $f(x)$augmente.
Une fonction $f(x)$ est décroissante sur un intervalle si, lorsque x augmente dans cet intervalle, alors $f(x)$ diminue.
Une fonction $f(x)$ admet, sur son domaine, un maximum en un point si elle cesse de croitre pour commencer à décroitre.
Une fonction $f(x)$ admet, sur son domaine, un minimum en un point si elle esse de décroitre pour commencer à croitre.

On traduit la croissance et la décroissance d'une fonction dans un tableau de variations. Sur la première ligne de ce tableau, on indique les éventuelles bornes du domaine et les abscisses des extrémums (maximum et minimum).
Sur la seconde ligne, on indique sous les réels les coordonnées des extrémums en précisant si ce sont des maxima ou des minima. Sur cette seconde ligne, on indique également $\nearrow$ si la fonction est croissante ou $\searrow$ si la fonction est décroissante.

Exemple:

Le tableau de variation de la fonction suivante est :

x	$-\infty$		-6		-3		-1		3		9		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	
			m		M		m		M		m		



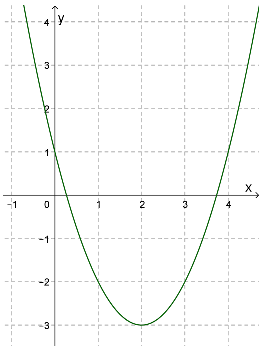
4 Résolution graphique d'une équation du type $f(x) = g(x)$

L(Les)'abscisse(s) du(des) point(s) d'intersection des graphiques de $f(x)$ et $g(x)$ est solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

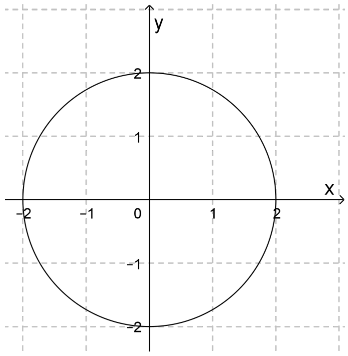
5 Exercices

1. Tous les graphiques suivants représentent des relations. Parmi ceux-ci, quels sont ceux qui représentent une fonction ?

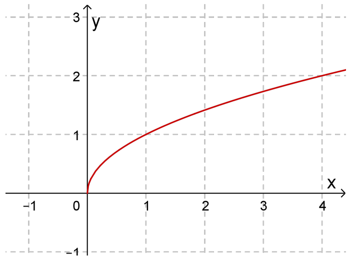
(a)



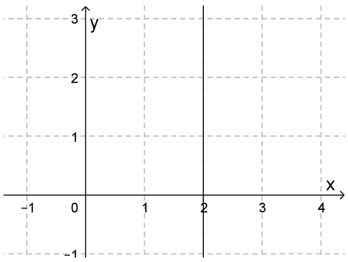
(b)



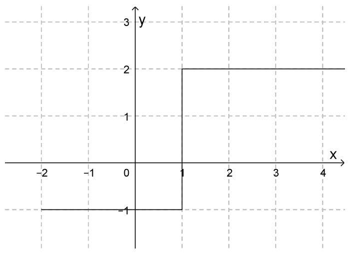
(c)



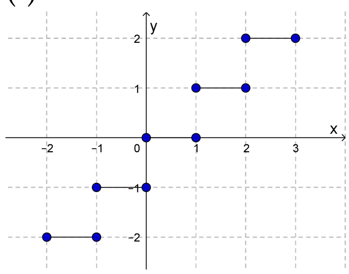
(d)



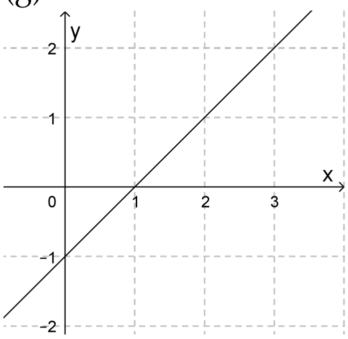
(e)



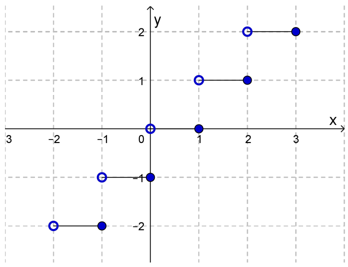
(f)



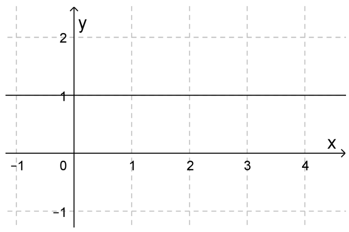
(g)



(h)

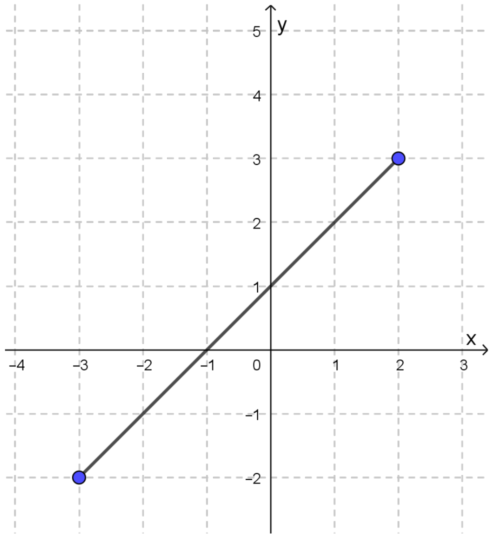


(i)



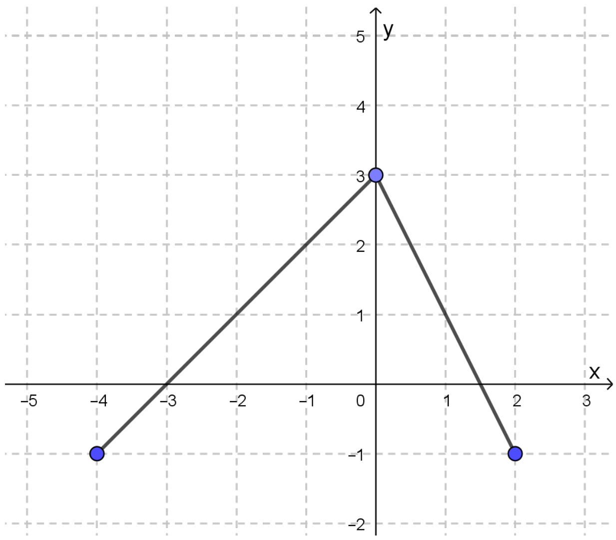
2. Pour chacune des fonctions représentées ci-dessous, déterminer le domaine, l'ensemble image, le(s) zéro(s), l'ordonnée à l'origine et compléter les égalités.

   (a)



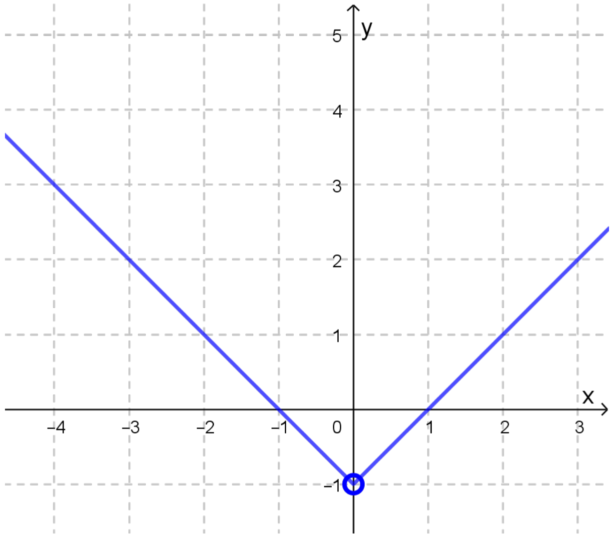
   - dom_f :
   - im_f :
   - Zéro(s) :
   - Ord. à l'origine :
   - $f(1)$=
   - $f(-2)$=
   - $f(.....)$= 2
   - $f(.....)$= -1

   (b)



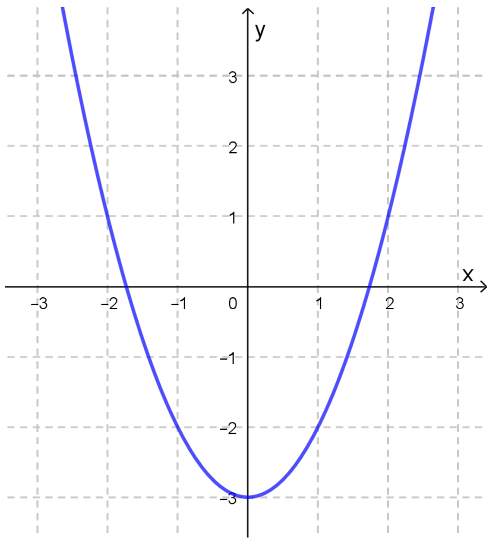
   - dom_f :
   - im_f :
   - Zéro(s) :
   - Ord. à l'origine :
   - $f(-1)$=
   - $f(2)$=
   - $f(.....)$= 1
   - $f(.....)$= 2

(c)



- dom_f :
- im_f :
- Zéro(s) :
- Ord. à l'origine :
- $f(2)$=
- $f(-2)$=
- $f($.....$)$= 2
- $f($.....$)$= 0

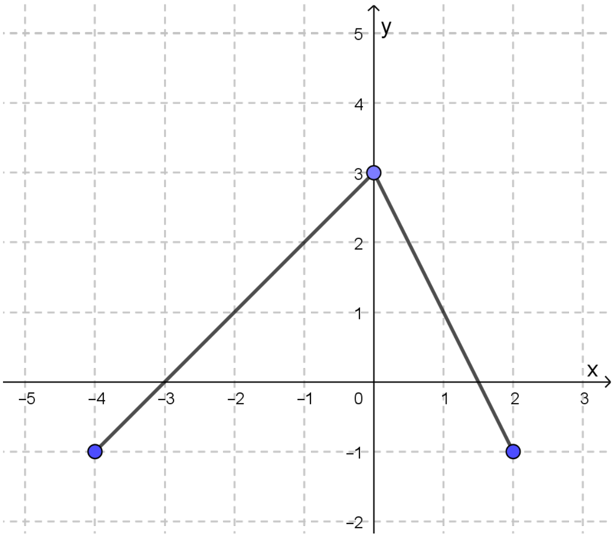
(d)



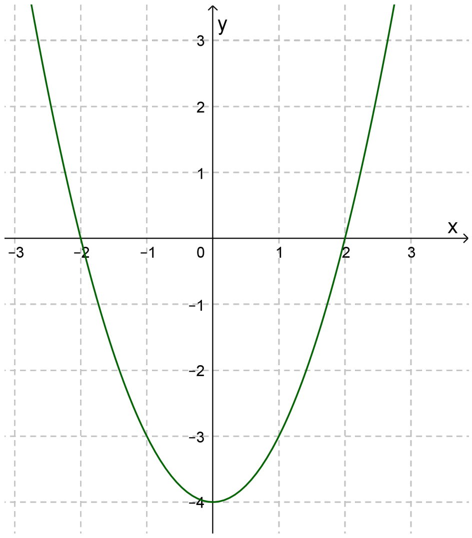
- dom_f :
- im_f :
- Zéro(s) :
- Ord. à l'origine :
- $f(2)$=
- $f(-2)$=
- $f($.....$)$= -2
- $f($.....$)$= 2

3. Etudier le signe des fonctions suivantes :

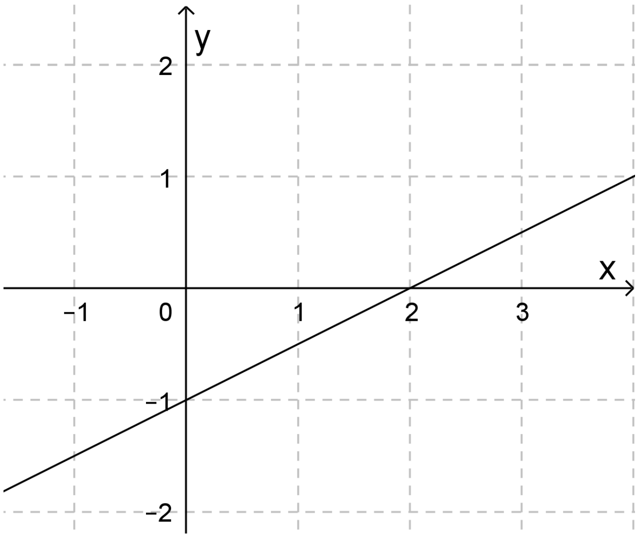
(a)



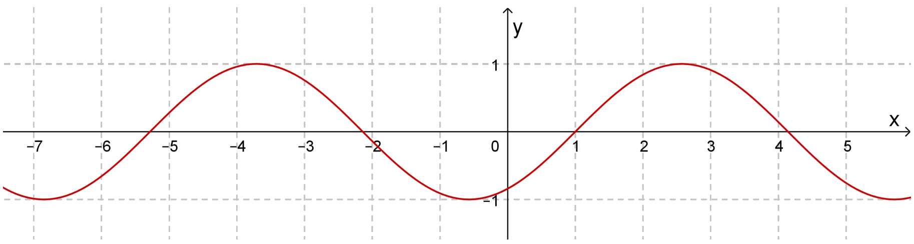
(b)



(c)

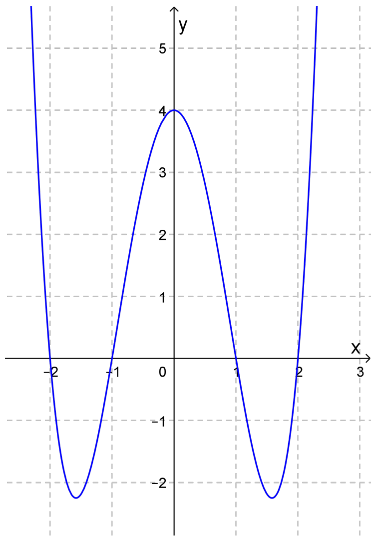


(d)

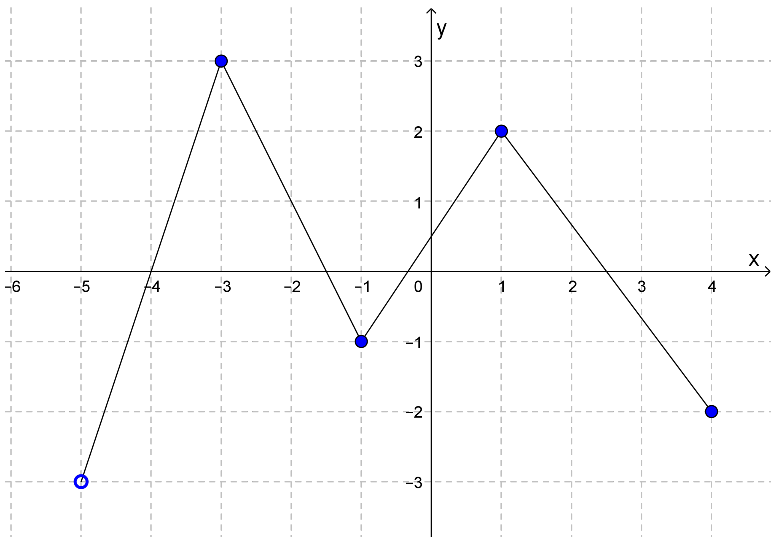


4. Etudier la variation et les extrémums des fonctions suivantes.

(a)



(b)



5. Représenter une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

(a)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-4 m	$\nearrow$	-1 M	$\searrow$	

(b)

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	3 M	$\searrow$	-4 m	$\nearrow$	$-\frac{5}{3}$ M	$\searrow$	

(c)

x	$-\infty$	-2		0		4		$+\infty$
$f(x)$		-2	$\nearrow$	3 M	$\searrow$	- 2 m	$\nearrow$	