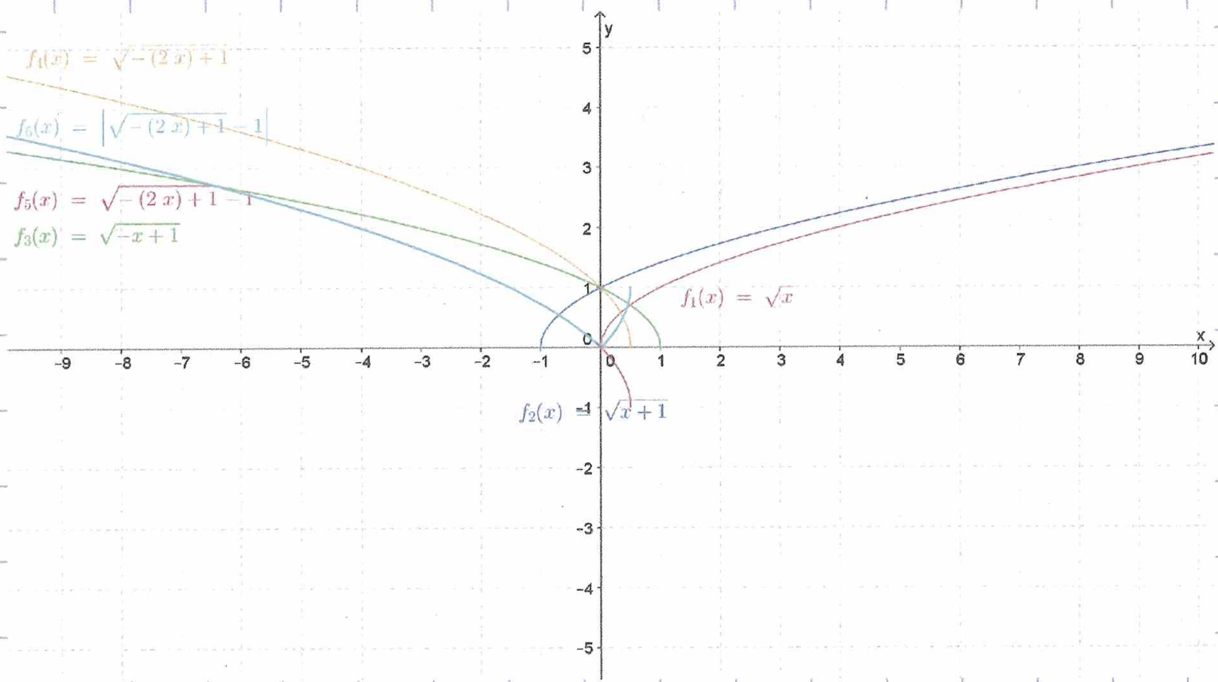
Chapitre 1

Algèbre

1.1 Exercices

1. Construire le graphe des fonctions suivantes en expliquant toutes les transformations utilisées.

   (a) $f(x) = \left|\sqrt{1-2x} - 1\right|$



$f_1(x) = \sqrt{x}$ } TH$(1 \leftarrow)$

$f_2(x) = \sqrt{x+1}$ } So(Oy)

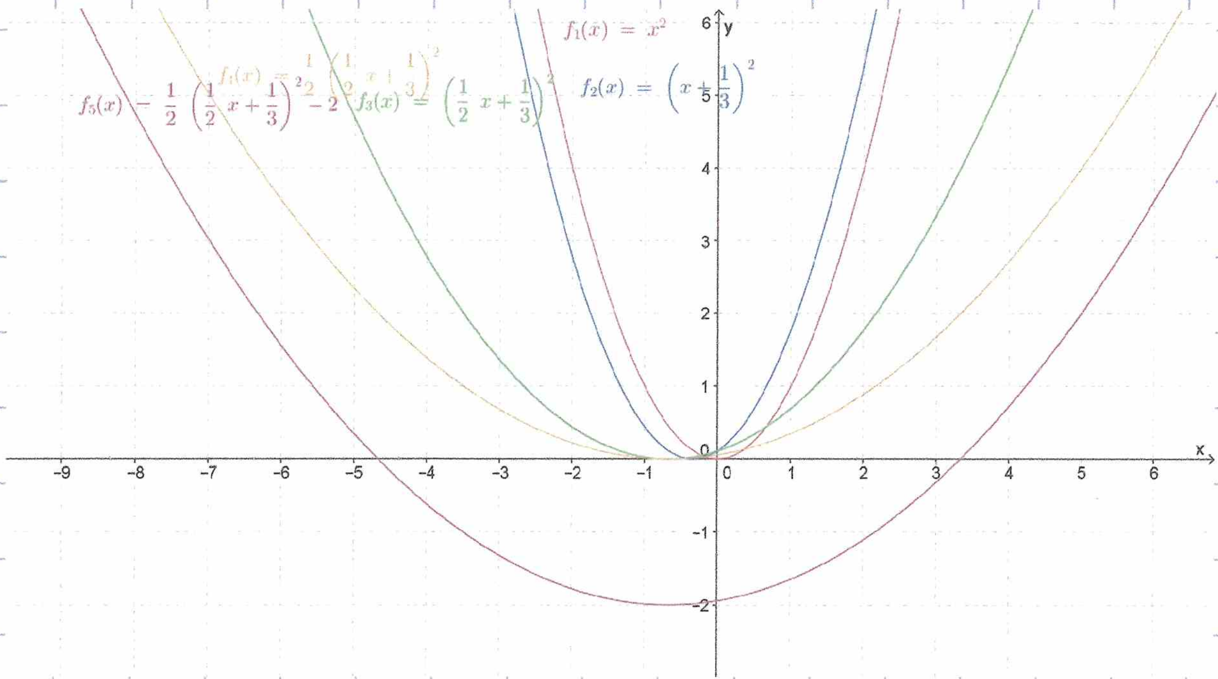
$f_3(x) = \sqrt{-x+1}$ } EH$(x \div 2)$

$f_4(x) = \sqrt{-2x+1}$ } TV$(1 \downarrow)$

$f_5(x) = \sqrt{1-2x} - 1$ } VA

$f_6(x) = \left|\sqrt{1-2x} - 1\right|$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)^2 - 2$



$f_1(x) = x^2$

$\downarrow$ TH($\frac{1}{3}$ ←)

$f_2(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$

$\downarrow$ EH ($x \times 2$)

$f_3(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)^2$

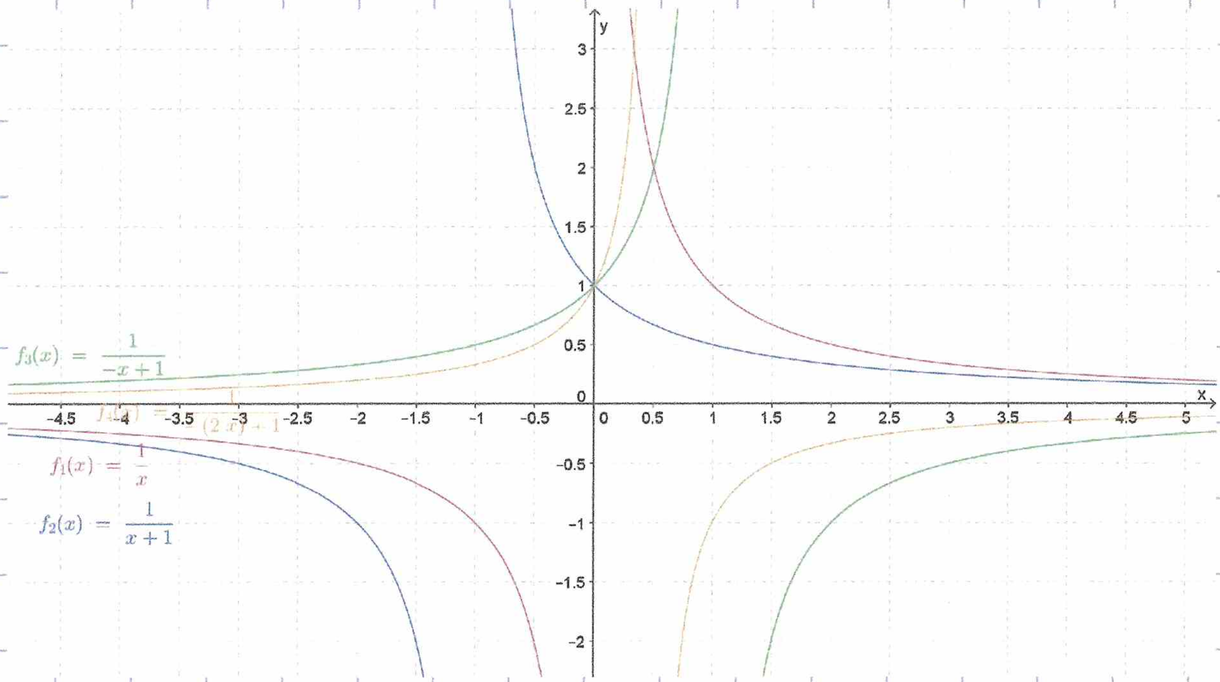
$\downarrow$ EV ($y \div 2$)

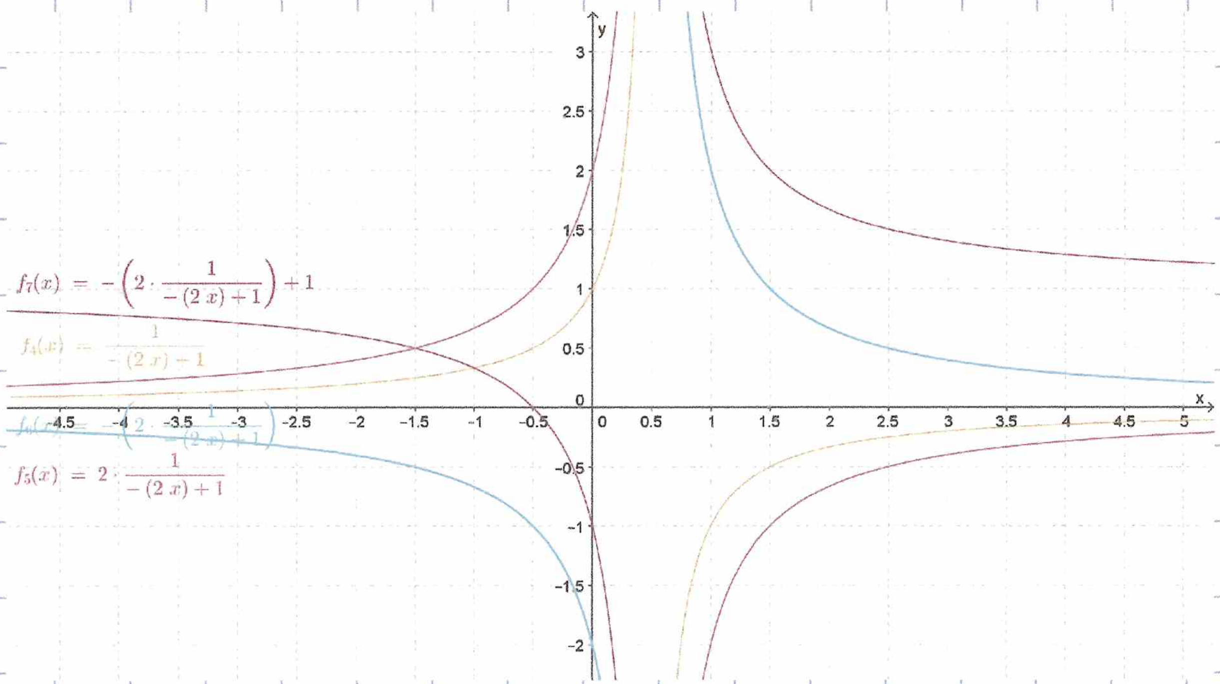
$f_4(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)^2$

$\downarrow$ TV (2 ↓)

$f_5(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)^2 - 2$

(c) $f(x) = 1 - \dfrac{2}{1-2x}$





$f_1(x) = \frac{1}{x}$

) Th (1←)

$f_2(x) = \frac{1}{x+1}$

) So (O_y)

$f_3(x) = \frac{1}{-x+1}$

) EH ($x \div 2$)

$f_4(x) = \frac{1}{-2x+1}$

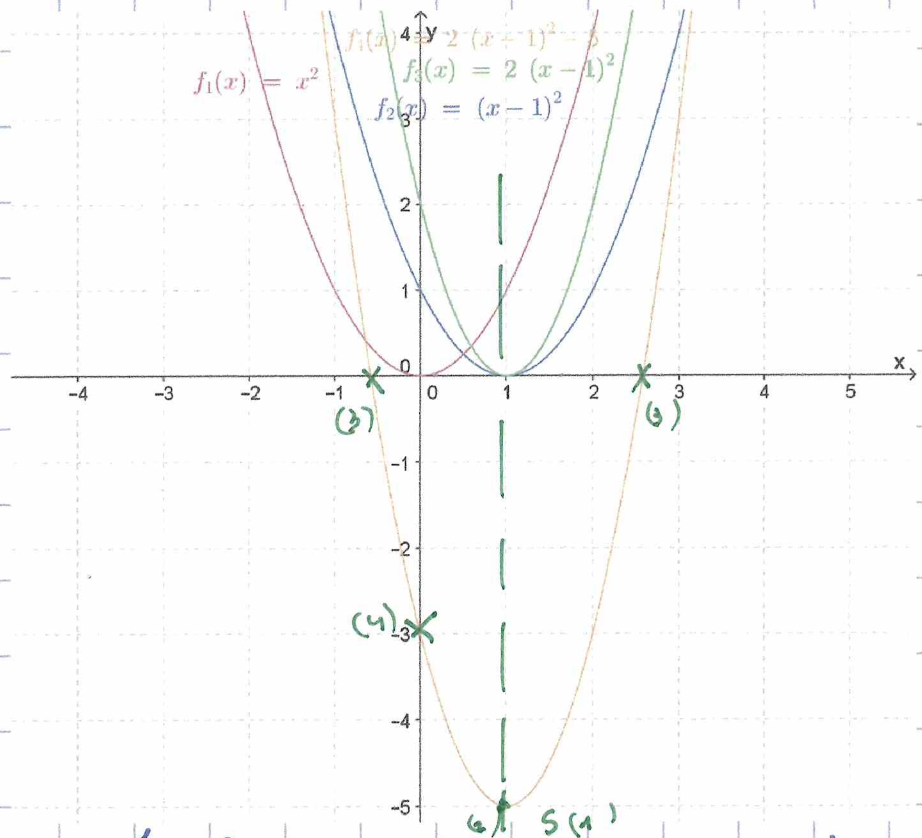
) EV ($y \times 2$)

$f_5(x) = \frac{2}{1-2x}$ ← $f_6(x) = \frac{-2}{1-2x}$ So (O_x)

) TV (1↑)

$f_7(x) = -\frac{2}{1-2x} + 1$

2. (a) Montrer que $2x^2 - 4x - 3 = 2(x-1)^2 - 5$;
   (b) En déduire une manière de construire le graphe de $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$;
   (c) Vérifier algébriquement les valeurs des caractéristiques principales de la parabole.



a) On développe le second membre

$2(x-1)^2 - 5 = 2(x^2 - 2x + 1) - 5$

$= 2x^2 - 4x - 3$ ok

b) $f_1(x) = x^2$ TH$(1 \rightarrow)$
$f_2(x) = (x-1)^2$ EV$(y \times 2)$
$f_3(x) = 2(x-1)^2$ TV$(5 \downarrow)$
$f_4(x) = 2(x-1)^2 - 5$

c) $S : \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) : (1, -5)$ (1) $\Delta = 16 + 24 = 40$

$AS \equiv x = 1$ (2)

$\cap Ox : x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ ($\simeq -0{,}58$ et $2{,}58$) (3)

$\cap Oy : (0, -3)$ (4)

$a > 0$ $\cup$ S → on met sur le dessin

3. On donne la fonction

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x}$$

et son graphe en annexe.

(a) Déterminer algébriquement le domaine de $f(x)$;interprèter graphiquement les résultats.

$\underline{CE}$: $x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \text{dom}_f : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$
(en rose sur le graphe)

(b) Déterminer graphiquement quels sont les réels qui ont 1 pour image par cette fonction. Vérifier algébriquement.

on voit sur le graphe : $x \simeq 0{,}38$ et $x \simeq 2{,}62$

$\underline{\text{alg}}$: $\dfrac{x-1}{x^2-2x} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = x^2 - 2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4 = 5$

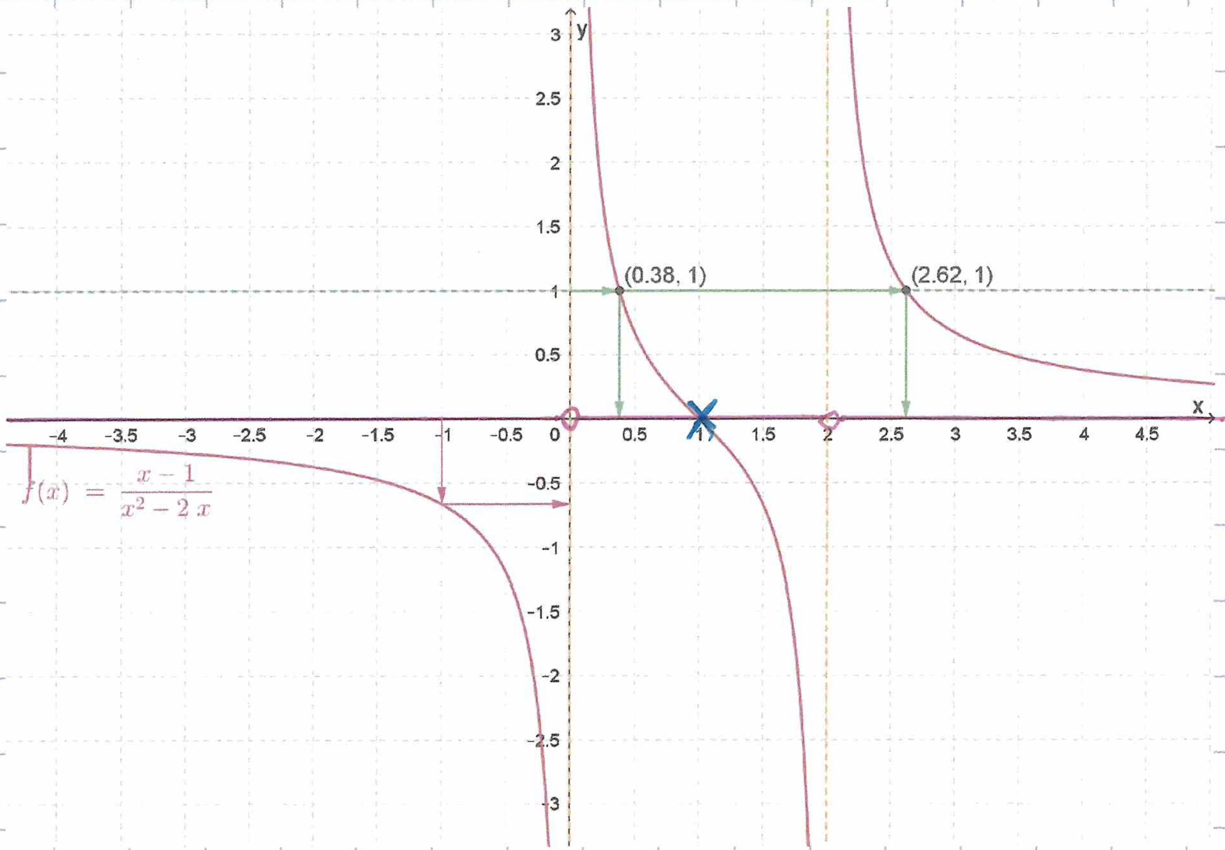
$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$(\simeq 0{,}38$ et $2{,}62)$

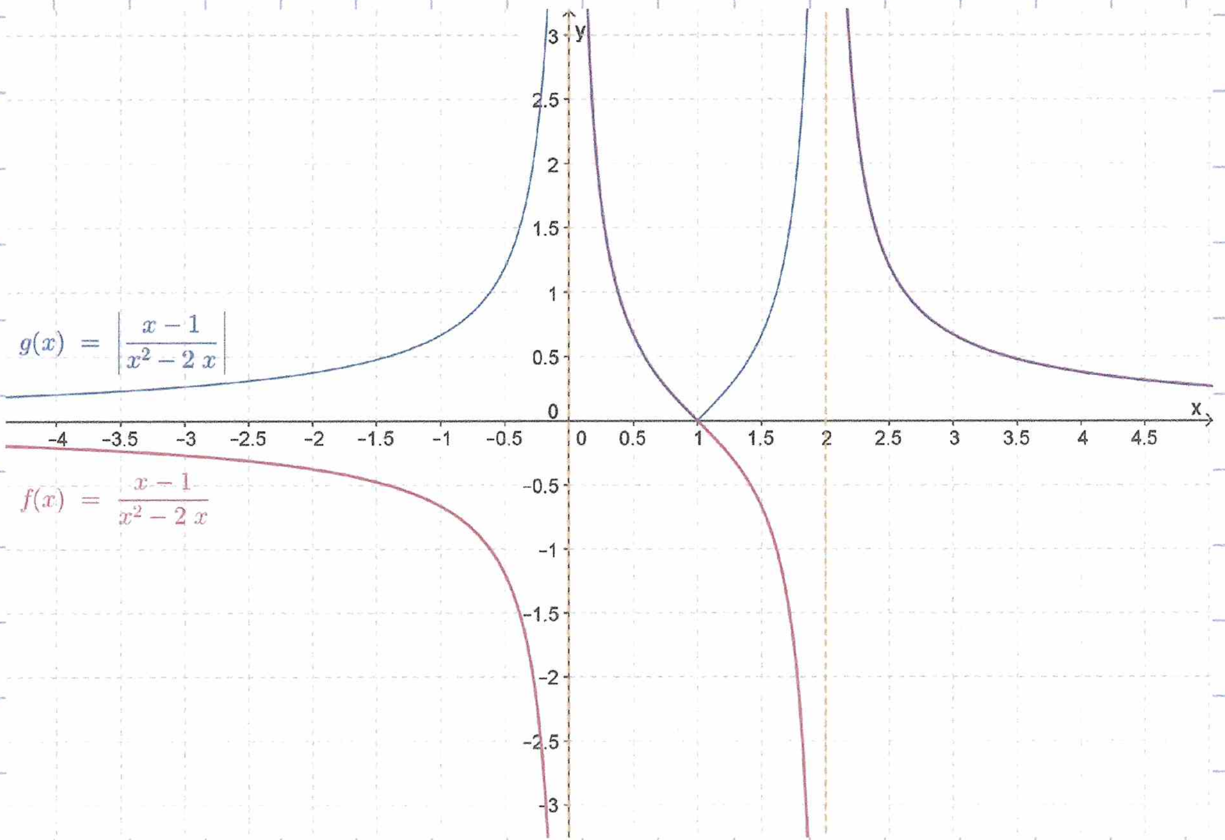
(c) Déterminer par calcul les zéros de $f(x)$ ainsi que l'image de -1 ; interpréter graphiquement.

• zéros : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x^2-2x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$
(en bleu sur le graphe)

• $f(-1) = \dfrac{-2}{1+2} = -\dfrac{2}{3}$ (en rouge sur le graphe)
$(\simeq -0{,}66)$



(d) Trace le graphe de $|f(x)|$



4. On donne la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}{2x^2 - 9x - 5}$$

et son graphe en annexe.

(a) Déterminer algébriquement le domaine de $f(x)$; interpréter graphiquement les résultats.

CÉ (1) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

(2) $2x^2 - 9x - 5 \neq 0$

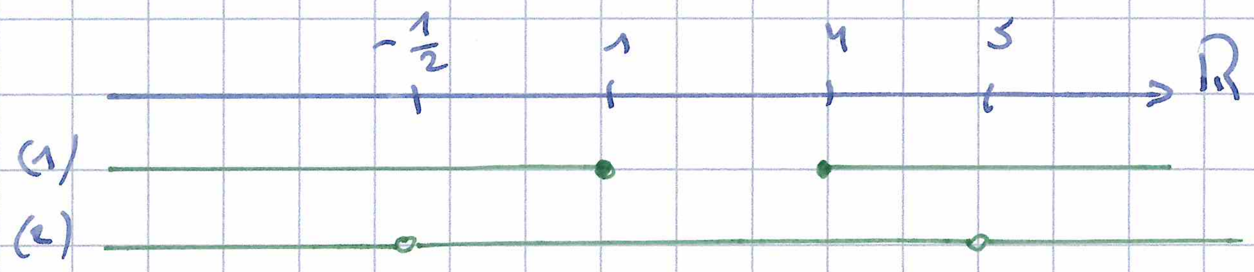
(1) $\Delta = 25 - 16 = 9$ $\quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right.$

x		1		4	
CÉ$_1$	+	0	−	0	+

(2) $2x^2 - 9x - 5 \neq 0$

$\Delta = 81 + 40 = 121$ $\quad x_{1,2} = \frac{9 \pm 11}{4} \left\langle \begin{matrix} 5 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right.$

$\rightarrow$ $x \neq -\frac{1}{2}$ et $x \neq 5$



dom$_f$: $-\infty, -\frac{1}{2} [\cup] -\frac{1}{2}, 1] \cup [4, 5 [\cup] 5, +\infty$

$\rightarrow$ en rose sur le graphe

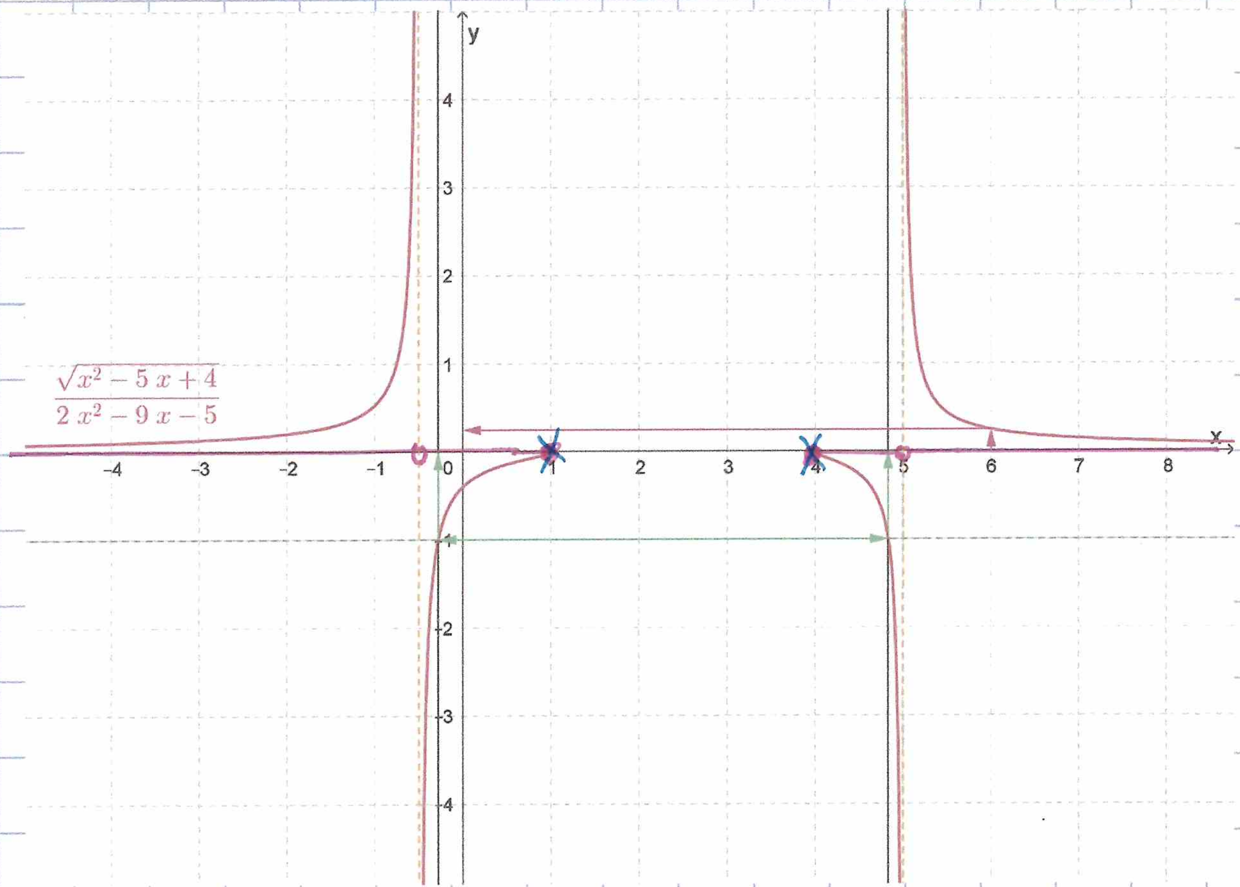
(b) Déterminer graphiquement quels sont les réels qui ont -1 pour image par cette fonction.

on voit sur le graphe $x \approx -0,3$ et $x \approx 4,8$

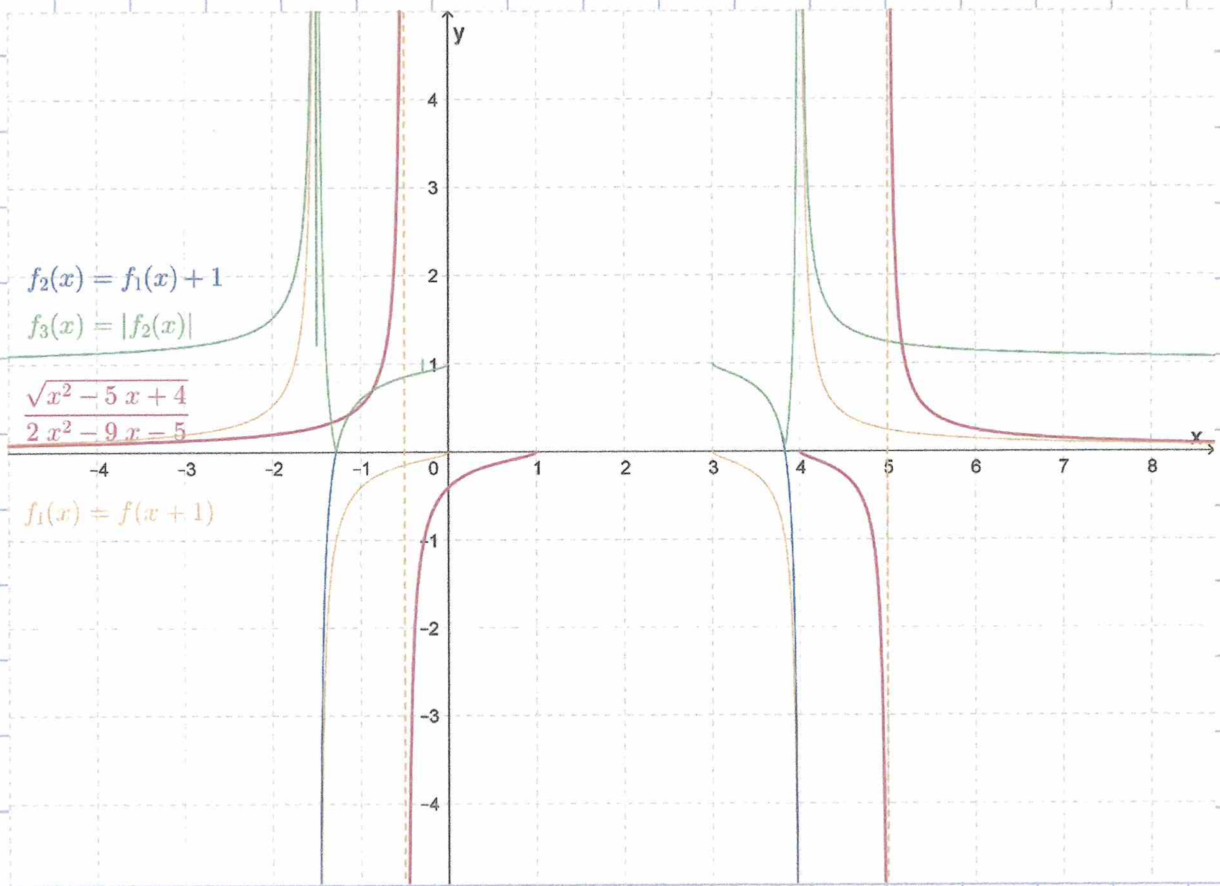
(c) Déterminer par calcul les zéros de $f(x)$ ainsi que l'image de 2 et 6 ; interpréter graphiquement.

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 4$ (cf domaine)
  $\rightarrow$ en bleu sur le graphe

- $f(2) \nexists$ car $2 \notin \text{dom}_f$
  $f(6) = \frac{\sqrt{10}}{13} \simeq 0,24$ (en rouge sur le graphe)

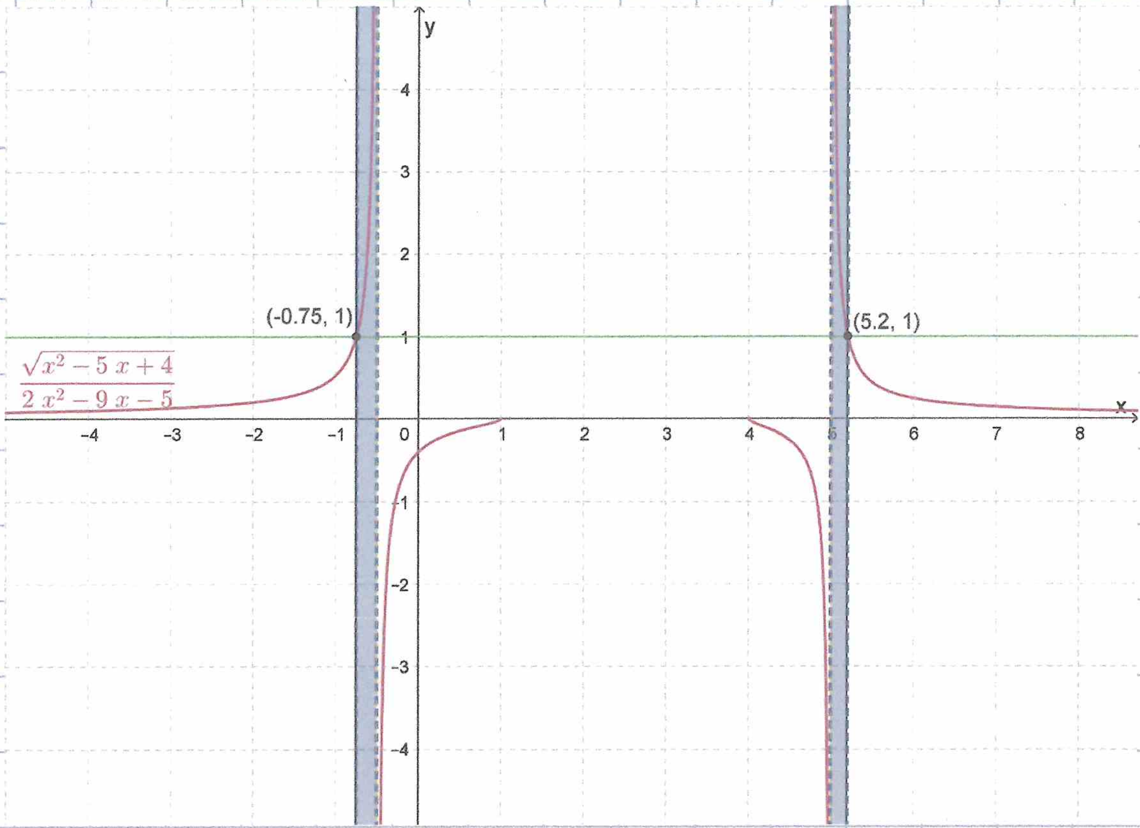


(d) Trace le graphe de $|f(x+1)+1|$

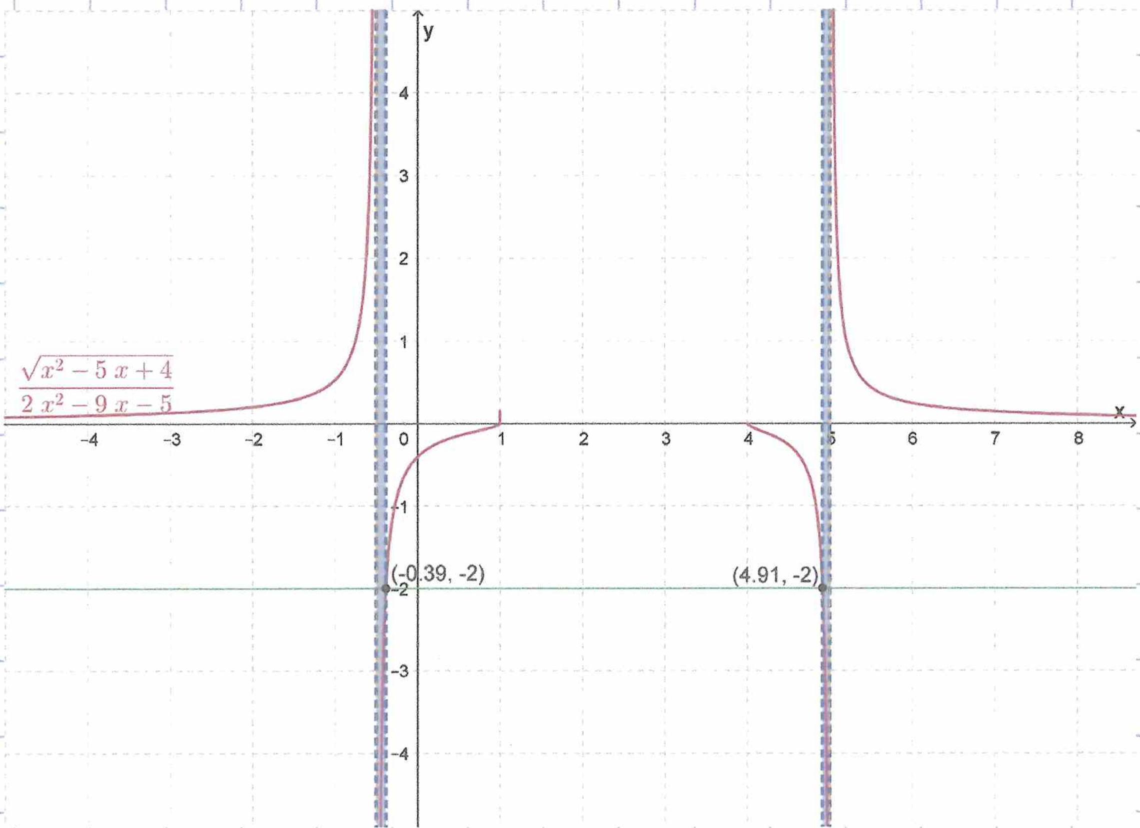


(e) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x) > 1$ et $f(x) \leq -2$

– $f(x) > 1$



– $f(x) \leq -2$



5. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 20x}{3x^2 - 27}$$

et son graphe en annexe.

(a) Déterminer algébriquement le domaine de la fonction f ; vérifier graphiquement ;

CE : $3x^2 - 27 \neq 0 \iff x^2 \neq 9 \iff x \neq \pm 3$

$\text{dom}_f : \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

en rose sur le graphique

(b) Déterminer algébriquement et graphiquement les zéros de la fonction f ;

$$f(x) = 0 \iff 2x^3 - 3x^2 - 20x = 0$$
$$\iff x(2x^2 - 3x - 20) = 0$$
$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3x - 20 = 0 \overset{\Delta}{\iff} \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ x = 4 \end{cases} \end{cases}$$

(en bleu sur le graphe)

(c) Déterminer algébriquement l'image de 2 par la fonction f, expliquer comment trouver ce résultat à l'aide du graphe de f ;

$f(2) = \frac{12}{5}$ $(\simeq 2{,}4)$ (en rouge sur le graphe)

(d) Déterminer graphiquement les antécédents de $\frac{7}{2}$; expliquer la démarche ;

En voit sur le graphe : $x \simeq -2{,}8$; $x \simeq 2{,}3$ et $x \simeq 7{,}2$

(e) étudier, graphiquement et algébriquement, le signe de f ;

x		-3		$-\frac{5}{2}$		0		3		4	
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x^2-3x-20$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$3x^2-27$	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$-$: la fct est en dessous de l'axe Ox

$+$: " " " au-dessus " " "

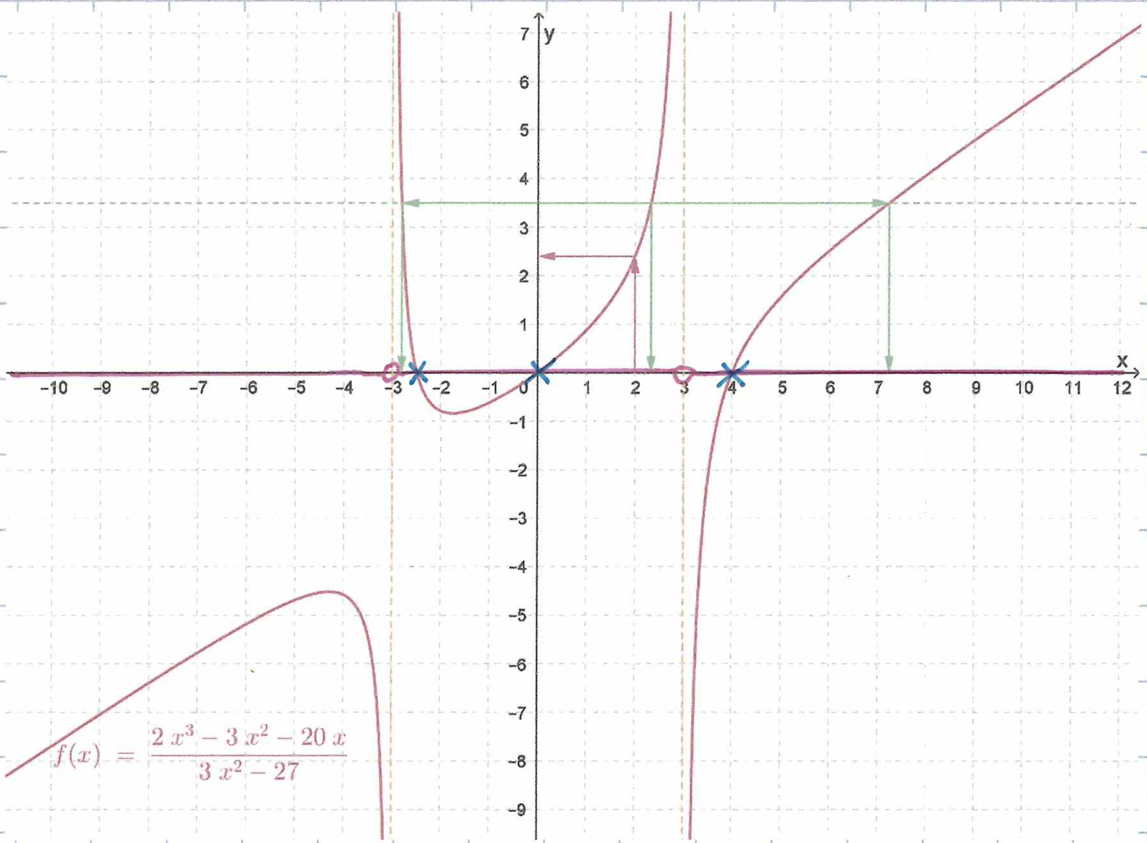
(f) déduire, sans calcul complémentaire, de 5e le domaine de la fonction

$$g(x) = \sqrt{\frac{2x^3 - 3x^2 - 20x}{3x^2 - 27}}$$

D'après le TS de la question (e) et la CE

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 20x}{3x^2 - 27} \geq 0$$

$\Rightarrow \operatorname{dom}_g : \left]-3, -\frac{5}{2}\right] \cup [0, 3[\cup [4, +\infty$


x
y
$f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 20x}{3x^2 - 27}$

6. Soit la fonction
$$f(x) = \frac{\sqrt{-2x^3 + 9x^2 + 5x}}{8x^2 - 2x - 1}$$
et son graphique en annexe.

(a) Déterminer algébriquement le domaine ainsi que les zéros de f ; justifier graphiquement, sur l'annexe, les résultats obtenus ;

(b) Déterminer algébriquement une valeur exacte et une valeur approchée de l'image de -1 par la fonction f ; vérifier graphiquement les résultats ;

(c) Déterminer graphiquement le(s) antécédent(s) de $\frac{3}{2}$; les indiquer sur le graphique.

(d) Représenter, sur le graphique de l'annexe, les solutions de
$$\frac{\sqrt{-2x^3 + 9x^2 + 5x}}{8x^2 - 2x - 1} = \sqrt{2x + 3} - 1$$

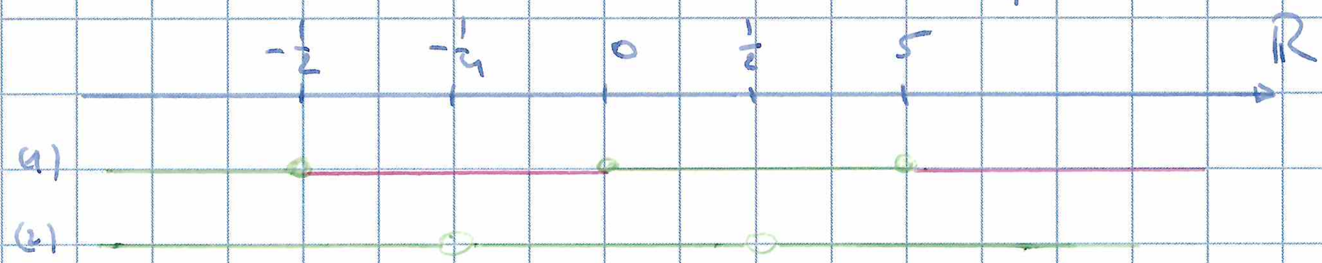
a). dom f : CE : $\begin{cases} -2x^3 + 9x^2 + 5x \geq 0 & (1) \\ 8x^2 - 2x - 1 \neq 0 & (2) \end{cases}$

(1) : $x(-2x^2 + 9x + 5) \geq 0$

$\hookrightarrow \Delta = 81 + 40 = 121$, $x_{1,2} = \frac{-9 \pm 11}{-4} < \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 5 \end{matrix}$

x		$-\frac{1}{2}$		0		5	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$-2x^2+9x+5$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
(1)	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

(2) $\Delta = 4 + 32 = 36$, $x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{16} < \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{matrix}$



dom f : $]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 5]$

zéros : $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ et $x = 5$

graph : AV en $x = \frac{1}{2}$, $\cap$ avec Ox

b) $f(-1) = \frac{\sqrt{6}}{9} \simeq 0{,}27$

c) $f(x) = \frac{3}{2} \iff x \simeq 0{,}74$

d) 2d membre

$f_1(x) = \sqrt{x}$

TH ($3 \leftarrow$)

$f_2(x) = \sqrt{x+3}$

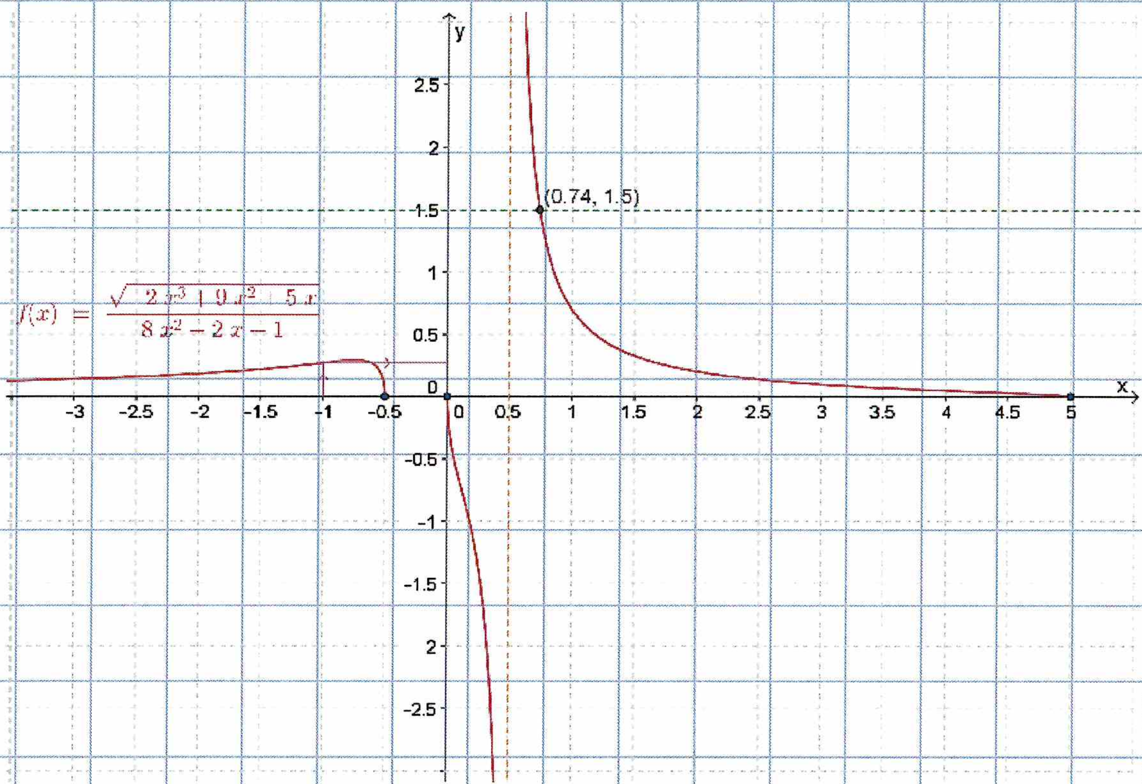
EH ($x \div 2$)

$f_3(x) = \sqrt{2x+3}$

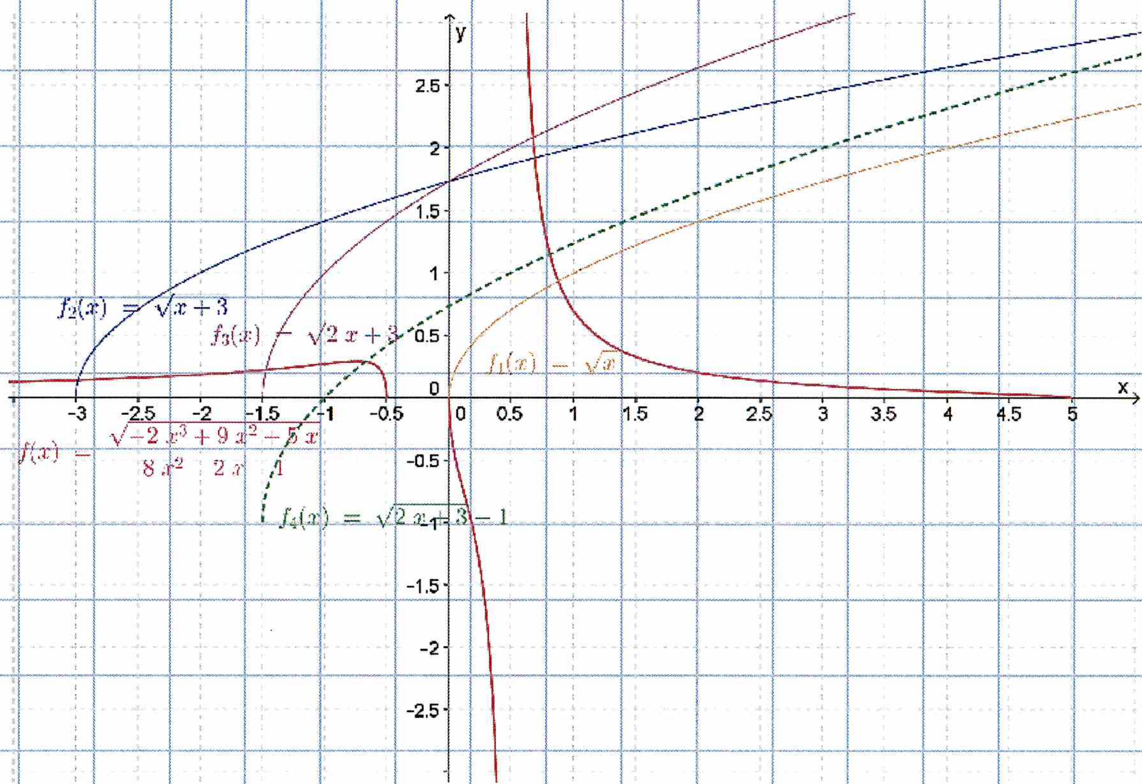
TV ($1 \downarrow$)

$f_4(x) = \sqrt{2x+3} - 1$

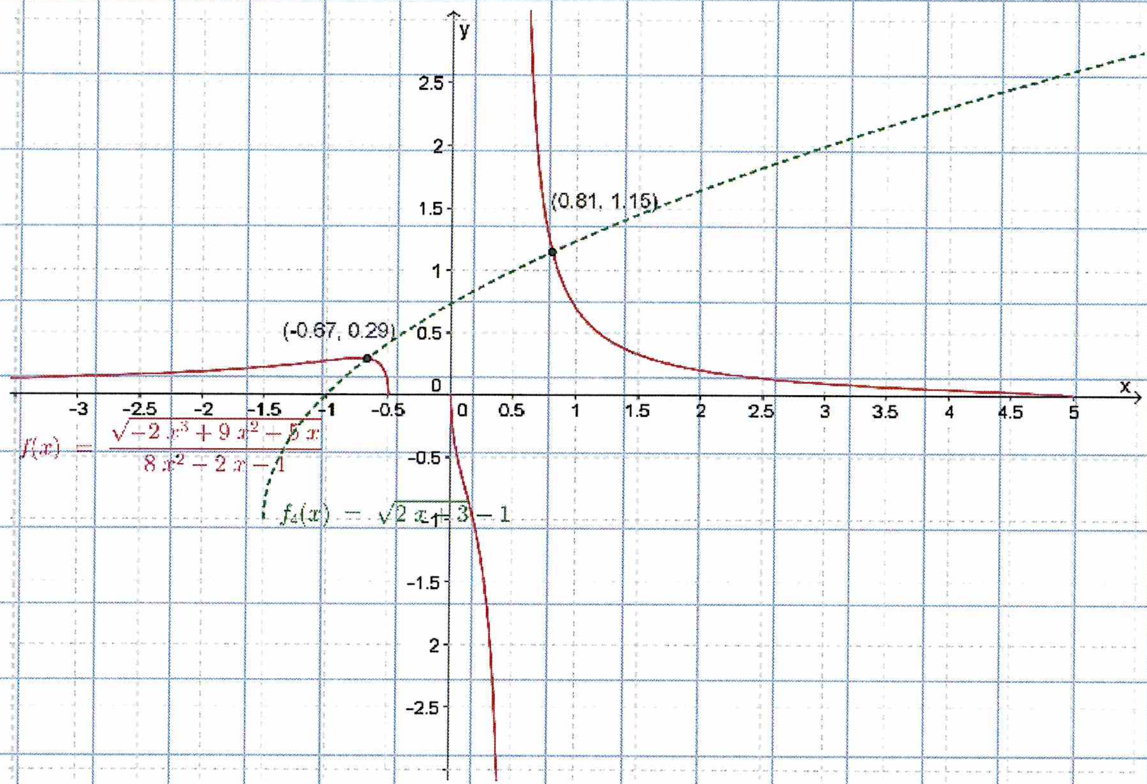
$\to$ sol : $S : \{-0{,}7 ; 0{,}8\}$



(0.74, 1.5)
$f(x) = \dfrac{\sqrt{-2\,x^3+9\,x^2-5\,x}}{8\,x^2-2\,x-1}$



$f_2(x) = \sqrt{x+3}$
$f_3(x) = \sqrt{2\,x+3}$
$f_1(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{-2\,x^3+9\,x^2-5\,x}}{8\,x^2-2\,x-1}$
$f_4(x) = \sqrt{2\,x+3}-1$



y
x
(0.81, 1.15)
(-0.67, 0.29)
$f(x) = \frac{\sqrt{-2x^3+9x^2-5x}}{8x^2-2x-1}$
$f_4(x) = \sqrt{2x+3}-1$

7. (a) Déterminer k pour que la parabole $\mathcal{P} \equiv y = 2x^2 - 3x + k$ passe par le point (1,-1)
   (b) Déterminer k pour que l'ordonnée du sommet de la parabole $\mathcal{P} \equiv y = 2x^2 - 3x + k$ soit $\dfrac{25}{16}$
   (c) Déterminer b et c pour que (-2,-4) soit le sommet de la parabole $\mathcal{P} \equiv y = x^2 + bx + c$
   (d) Déterminer b et c pour que (4,0) appartienne au graphe et que $d \equiv x = 2$ soit l'axe de symétrie de la parabole $\mathcal{P} \equiv y = x^2 + bx + c$

a) $(1,-1) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -1 = 2 - 3 + k \Leftrightarrow k = 0$

b) $y_S = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{(-3)^2 - 4.2.k}{8} = -\dfrac{9-8k}{8}$

$\Rightarrow \dfrac{25}{16} = \dfrac{8k-9}{8} \Leftrightarrow 25 = 16k - 18$

$\Leftrightarrow 43 = 16k$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{43}{16}$

c) $S : \left(-\dfrac{b}{2}, -\dfrac{b^2-4c}{4}\right) : (-2,-4)$

$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2} = -2 \\ -\dfrac{b^2-4c}{4} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 0 \end{cases}$

d) $(4,0) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 0 = 16 + 4b + c$

$x = 2$ est A.S $\Leftrightarrow -\dfrac{b}{2} = 2 \Leftrightarrow b = -4$

$\Leftrightarrow c = 0$

8. On donne la fonction $f(x) = -x^2 - x + 6$

   (a) Déterminer les caractéristiques de la parabole et la tracer ;

$a = -1,\ b = -1,\ c = 6 \rightsquigarrow \Delta = 1 + 24 = 25$

$S : \left(-\frac{1}{2} ; \frac{25}{4}\right)$

$AS \equiv x = -\frac{1}{2}$

$\cap\, Ox : x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$ $(-3,0)$ et $(2,0)$

$\cap\, Oy : (0,6)$

$a < 0 : \cap^{S}$

(graphe : voir page suivante)

   (b) Résoudre algébriquement l'inéquation $-x^2 - x + 6 > -\frac{1}{2}x + 1$

$-x^2 - \frac{1}{2}x + 5 > 0 \iff -2x^2 - x + 10 > 0$

$\Delta = 1 + 80 = 81$

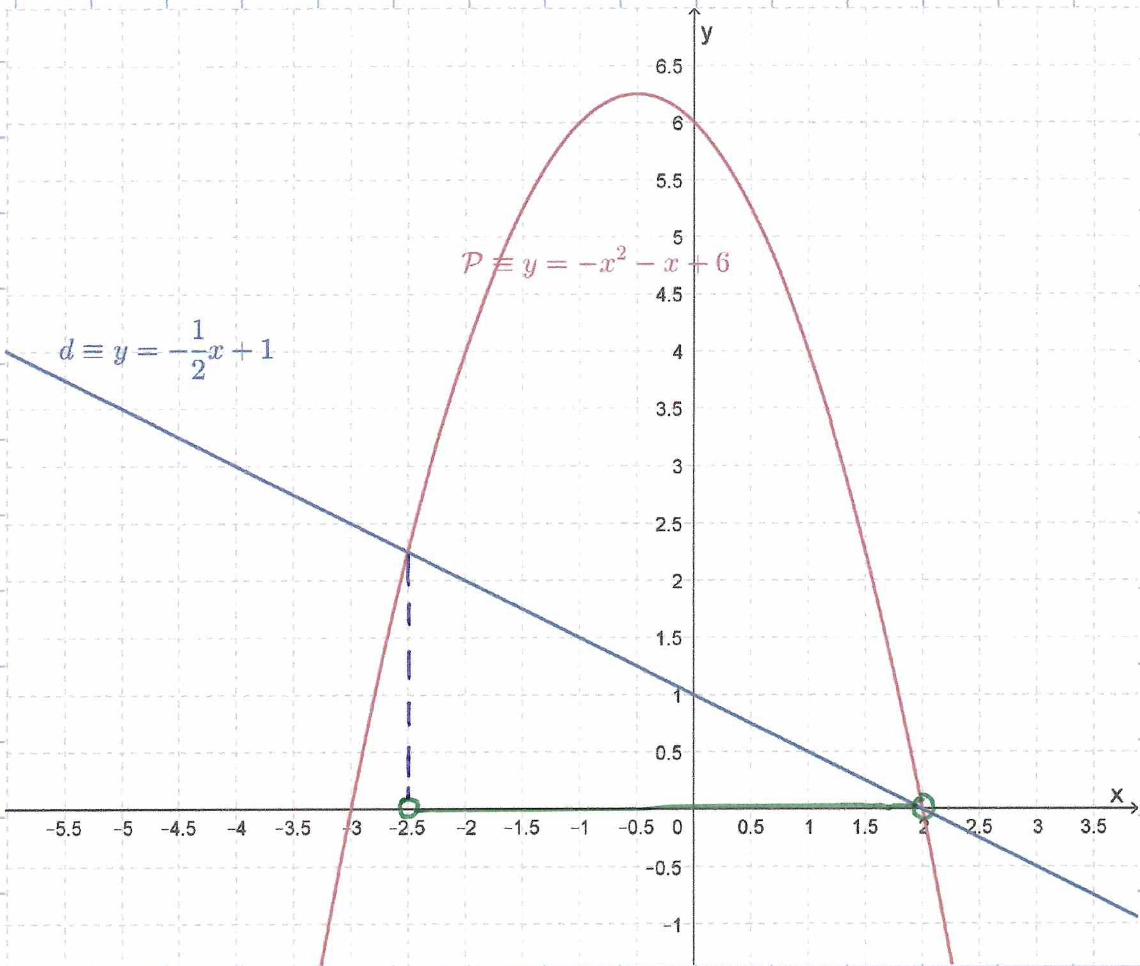
$x_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{-4} \begin{cases} -\frac{5}{2} \\ 2 \end{cases}$

x		$-\frac{5}{2}$		2	
I_n	$-$	0	$+$	0	$-$

$S : \left]-\frac{5}{2}, 2\right[$

(c) tracer dans le même repère que la parabole la droite $d \equiv y = -\frac{1}{2}x + 1$

(d) interpréter graphiquement les résultats du 8b



La parabole est au-dessus de la droite si $x \in]\frac{5}{2}, 2[$. Elle la touche en $x = \frac{5}{2}$ et $x = 2$.

9. Déterminer la (les) valeur(s) de m pour que l'équation

$$(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + m = -3$$

admette deux solutions distinctes

$\Delta > 0 \iff \cancel{4}(3m+1)^2 - \cancel{4}(m+3)^2 > 0$

$\iff 9m^2 + \cancel{6m} + 1 - m^2 - \cancel{6m} - 9 > 0$

$\iff 8m^2 - 8 > 0$

$\iff m \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

10. Déterminer une condition sur m pour que l'équation

$$x^2 - 2mx + m(m+1) = 0$$

n'admette aucune solution réelle.

$\Delta < 0 \iff \cancel{4}m^2 - \cancel{4}m(m+1) < 0$

$\iff m(\cancel{m} - \cancel{m} - 1) < 0$

$\iff -m < 0 \iff m > 0$

11. Soient les paraboles $\mathcal{P}_1 \equiv y = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$ et $\mathcal{P}_2 \equiv y = -(x+1)^2 + 2$

(a) Construire la parabole $\mathcal{P}_1$ en déterminant ses caractéristiques ;

$a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = -\frac{3}{2}$ $\quad \Delta = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 4$

$S : \left(\frac{-1}{1} , \frac{-4}{2} \right) : (-1, -2)$

$AS \equiv x = -1$

$\cap\, Ox : x_{1,2} = \frac{-1 \pm 2}{1} \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases} \rightarrow (1,0)$ et $(-3,0)$

$\cap\, Oy : (0, -\frac{3}{2})$

$a > 0 \quad \cup_S$ graphe : voir page suivante

(b) Construire la parabole $\mathcal{P}_2$ par manipulations de graphe dans le même repère ;

$f_1(x) = x^2$

TH $(1 \leftarrow)$

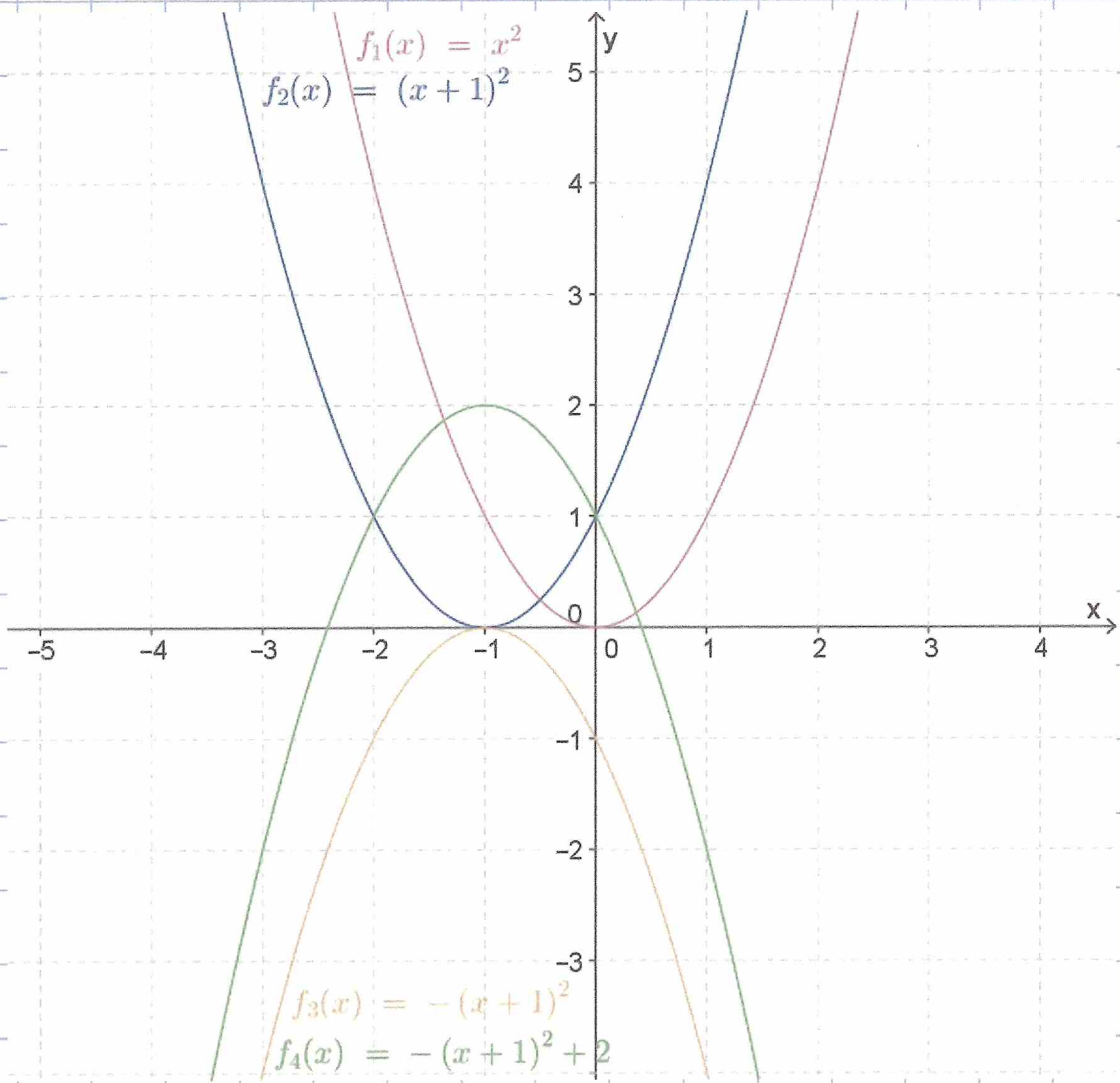
$f_2(x) = (x+1)^2$

SO (Ox)

$f_3(x) = -(x+1)^2$

TV $(2 \uparrow)$

$f_4(x) = -(x+1)^2 + 2$



(c) Déterminer algébriquement et graphiquement les abscisses des éventuels points d'intersection entre les deux paraboles.

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2} \\ y = -(x+1)^2 + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} (1) \\ y = -x^2 - 2x + 1 \quad (2) \end{cases}$$

(1) et (2) $\iff -x^2 - 2x + 1 = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$

$\iff -\frac{3x^2}{2} - 3x + \frac{5}{2} = 0 \iff 3x^2 + 6x - 5 = 0$

$\Delta = 36 + 60 = 96$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{6}}{6}$

$= \frac{-3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$

($-2{,}63$ et $0{,}63$)

A B

(d) Déterminer algébriquement et graphiquement les solutions de l'inéquation

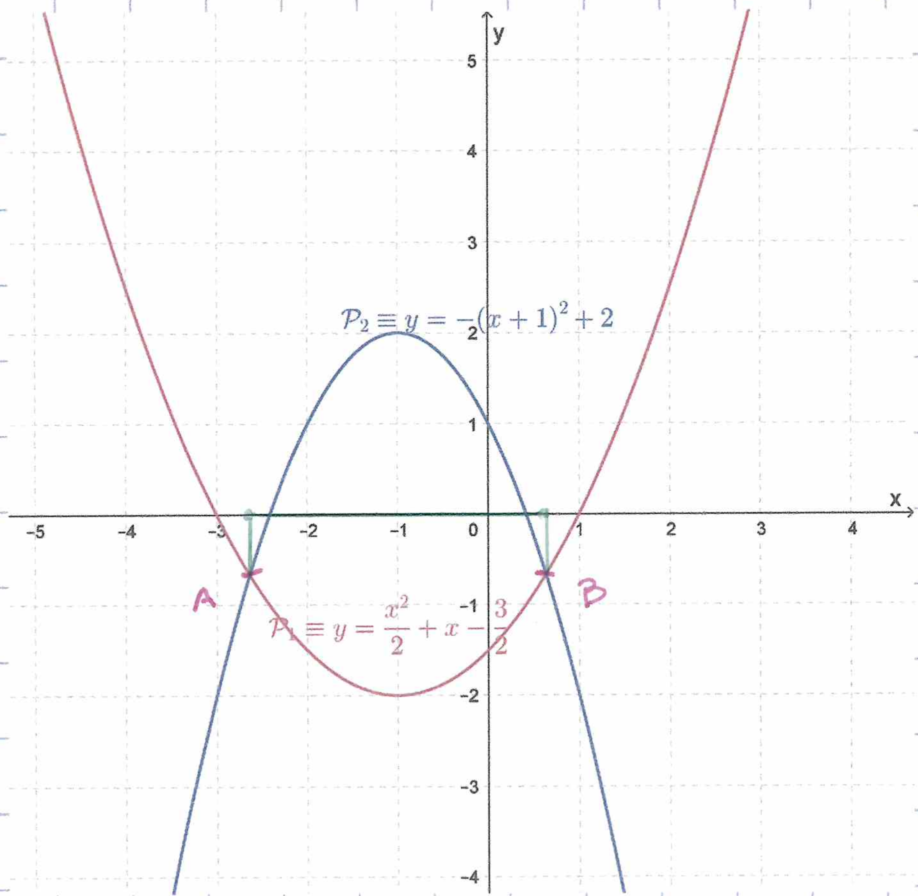
$$\frac{x^2}{2}+x-\frac{3}{2}\leq -(x+1)^2+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{2}+3x-\frac{5}{2}\leq 0 \quad (f(c))$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+6x-5\leq 0$$

x		$\frac{-3-2\sqrt{6}}{3}$		$\frac{-3+2\sqrt{6}}{3}$	
I_1	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S : \left[\frac{-3-2\sqrt{6}}{3}, \frac{-3+2\sqrt{6}}{3}\right]$$



12. Etudier le signe de $f(x) = \dfrac{(1-x)(x^2-3x)}{x^2+2x-2}$

$x^2+2x-2 \longrightarrow \Delta = 4+8 = 12$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$

x		$-1-\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{3}$		1		3	
$1-x$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
x^2-3x	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2+2x-2	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$

13. Soit la parabole d'équation $\mathcal{P} \equiv y = -x^2 - x + 6$. Ecrire l'équation de la tangente à la parabole au point (1,4). Vérifier graphiquement le résultat.

$t \equiv y - 4 = m(x - 1)$

$t \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 - x + 6 & (1) \\ y = mx - m + 4 & (2) \end{cases}$

(1) et $(2) \Leftrightarrow -x^2 - x + 6 = mx - m + 4$

$\Leftrightarrow -x^2 - (m+1)x + (2+m) = 0$

$\Delta = (m+1)^2 + 4(m+2)$

$= m^2 + 2m + 1 + 4m + 8$

$= m^2 + 6m + 9$

$= (m+3)^2$

Tgce $\Leftrightarrow \Delta = 0$ (1 pt d'int)

$\Leftrightarrow m = -3$

$t \equiv y = -3x + 7$

13. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(a) $\dfrac{x+3}{x^2-4} - \dfrac{x}{x-2} \geq \dfrac{x-1}{x+2}$

CE : $x \neq \pm 2$

$$\iff \frac{x+3 - x(x+2) - (x-1)(x-2)}{x^2-4} \geq 0$$

$$\iff \frac{x+3 - x^2 - 2x - x^2 + 3x - 2}{x^2-4} \geq 0$$

$$\iff \frac{-2x^2 + 2x + 1}{x^2-4} \geq 0$$

$$\Delta_N = 4 + 8 = 12 \qquad x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

x		-2		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		2	
N	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$
D	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
In	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

$$S : \left]-2, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 2\right[$$

(b) $\dfrac{2x-1}{4x-1} + \dfrac{2}{x+2} > 2$

$\underline{CE}$: $x \neq \frac{1}{4}$, $x \neq -2$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x+2) + 2(4x-1) - 2(4x-1)(x+2)}{(4x-1)(x+2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 3x - 2 + 8x - 2 - 8x^2 - 14x + 4}{D} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6x^2 - 3x}{(4x-1)(x+2)} > 0$$

$\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right)$

x		-2		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{4}$	
N	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$
D	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
In	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

S : $\left]-2, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]0, \frac{1}{4}\right[$

(c) $\dfrac{2x^2+x-5}{x^2-3x-4} < 1$ CE : $x \neq -1$, $x \neq 4$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+x-5-x^2+3x+4}{x^2-3x-4} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x-1}{x^2-3x-4} < 0$$

$\Delta_N = 16+4 = 20$ $x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$

x		$-2-\sqrt{5}$		-1		$-2+\sqrt{5}$		4	
N	+	0	−		−	0	+		+
D	+		+	0	−		−	0	+
Im	+	0	−	∄	+	0	−	∄	+

S : $]-2-\sqrt{5}, -1[\cup]-2+\sqrt{5}, 4[$

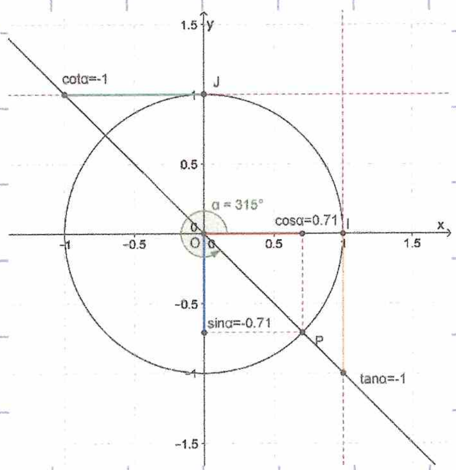
Chapitre 2

Trigonométrie

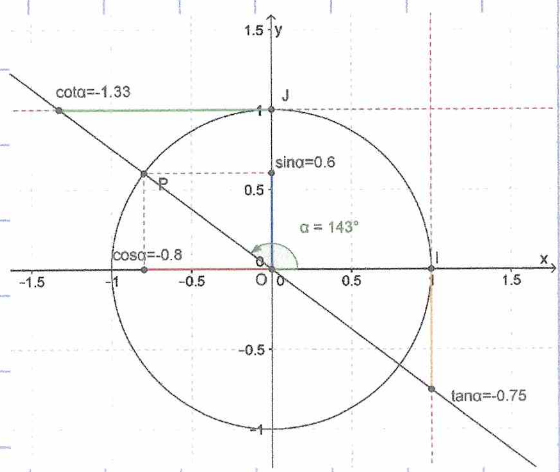
2.1 Exercices

1. Dans un cercle de 5 cm de rayon, placer les angles suivants et y lire une valeur approchée des nombres trigonométriques de ces angles

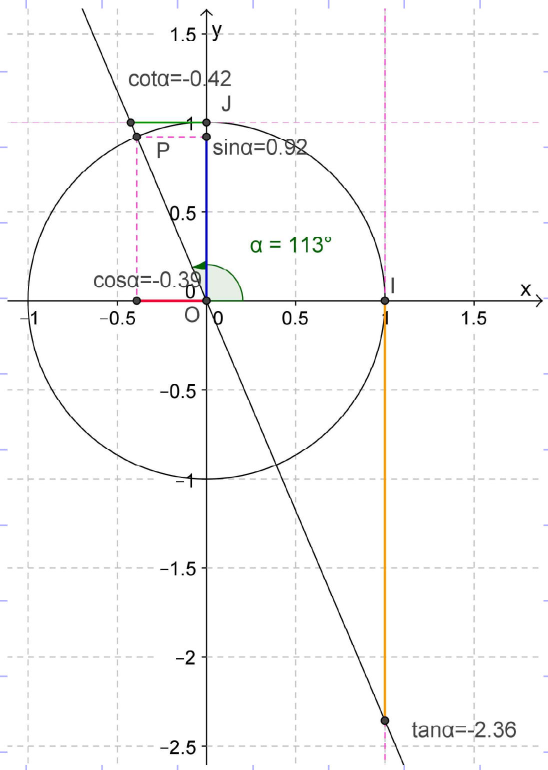
   (a) $a = 315°$



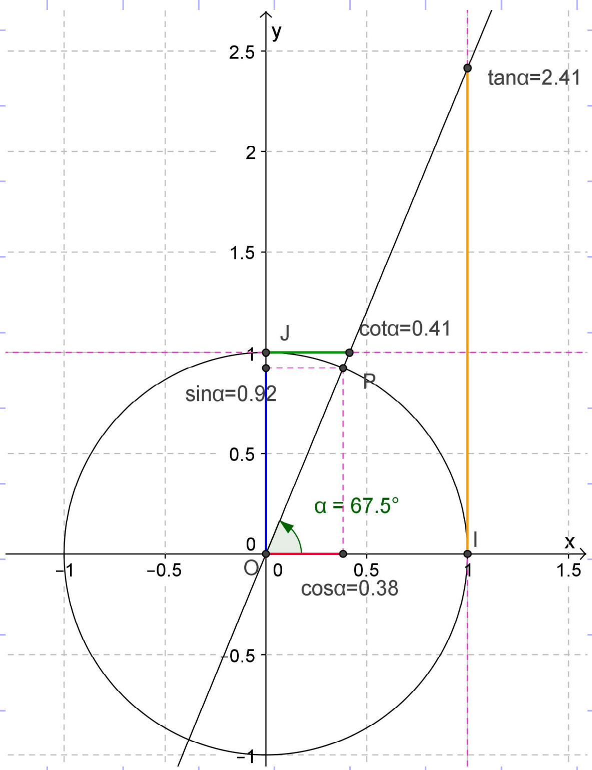
   (b) $a = -217°$



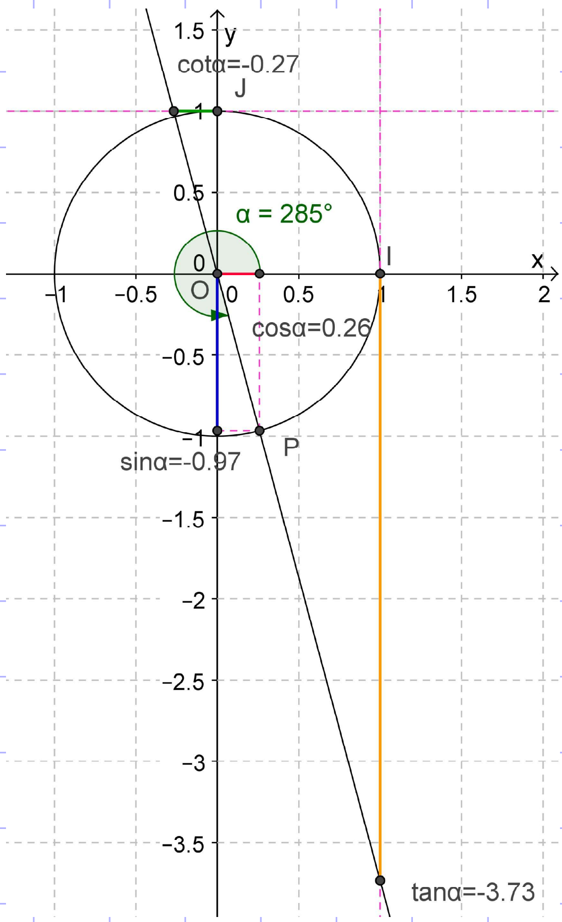
(c) $a = 113°$


y
x
1.5
cotα=-0.42
J
P
sinα=0.92
0.5
α = 113°
cosα=-0.39
0
I
O
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
tanα=-2.36

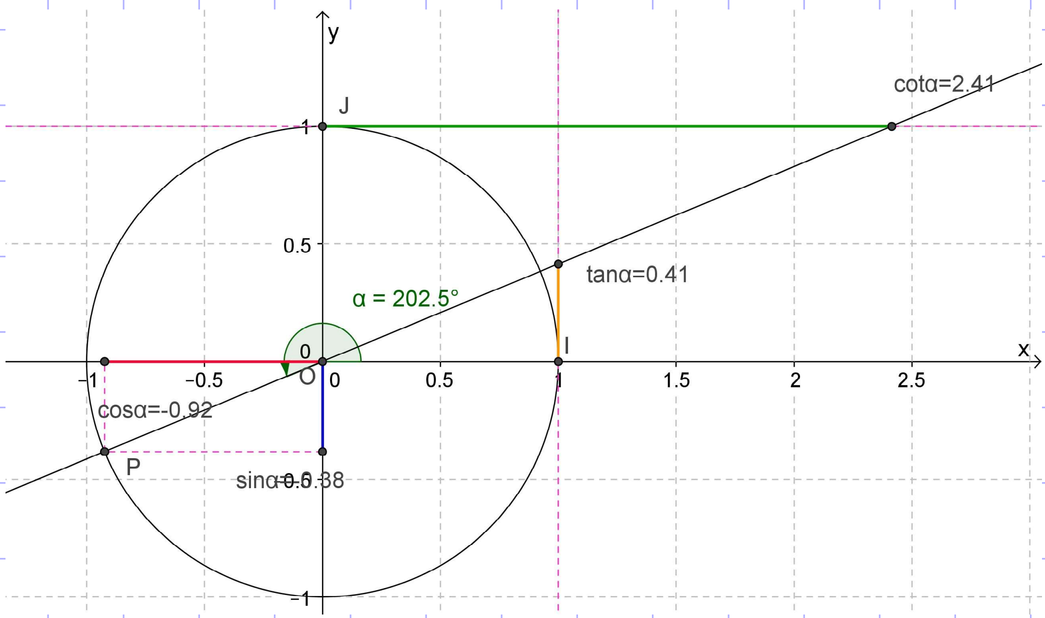
(d) $a = 67,5°$


y
2.5
tanα=2.41
2
1.5
J
cotα=0.41
1
P
sinα=0.92
0.5
α = 67.5°
0
I
x
−1
−0.5
O
0
0.5
1
1.5
cosα=0.38
−0.5
−1

(e) $a = -75°$


cotα=-0.27
J
α = 285°
O
I
cosα=0.26
P
sinα=-0.97
tanα=-3.73
x
y

(f) $a = 202,5°$


cotα=2.41
J
tanα=0.41
α = 202.5°
O
I
cosα=-0.92
P
sinα=-0.38
x
y

2. Calculer la valeur exacte des nombres trigonométriques de x si :

   (a) $\tan x = -\sqrt{6}$ et $x \in Q_{II}$;

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 1 + 6 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = - \frac{\sqrt{7}}{7} \quad (Q_{II})$$

$$\sin x = \tan x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

$$\cot x = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

(b) $\cot x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in Q_{III}$;

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin x = - \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (Q_{III})$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cot x \cdot \sin x = - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan x = \sqrt{2}$$

(c) $\cos x = -\dfrac{5}{6}$ et $x \in Q_{II}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \sin^2 x = 1 - \dfrac{25}{36}$

$\iff \sin x = \pm \dfrac{\sqrt{11}}{6} \quad (Q_{II})$

$\tan x = \dfrac{\frac{\sqrt{11}}{6}}{-\frac{5}{6}} = -\dfrac{\sqrt{11}}{5}$

$\cot x = \dfrac{-5\sqrt{11}}{11}$

3. Simplifier les expressions suivantes

(a) $(\cos x + 2\sin x)^2 + (2\cos x - \sin x)^2$

$$\left(\cos^2 x + 4\sin^2 x + 4\cancel{\sin x \cos x}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(4\cos^2 x + \sin^2 x - 4\cancel{\sin x \cos x}\right)$$
$$= 5\cos^2 x + 5\sin^2 x$$
$$= 5\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$$
$$= 5$$

(b) $\tan^2 a + \cot^2 a + 2 - \dfrac{1}{\sin^2 a \cos^2 a}$

$$\frac{1}{\cos^2 a} \cancel{-1} + \frac{1}{\sin^2 a} \cancel{-1} \cancel{+2} - \frac{1}{\sin^2 a \cos^2 a}$$
$$= \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a \sin^2 a} - \frac{1}{\sin^2 a \cos^2 a}$$
$$= 0$$

(c) $\sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b - (\sin^2 a - \sin^2 b)$

$= \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b - \sin^2 a + \sin^2 b$

$= \sin^2 a (\cos^2 b - 1) + \sin^2 b (1 - \cos^2 a)$

$= \sin^2 a (-\sin^2 b) + \sin^2 b \sin^2 a$

$= 0$

(d) $\sin^2 a \tan a + \cos^2 a \cot a + 2 \sin a \cos a - (\tan a + \cot a)$

$\sin^2 a \cdot \dfrac{\sin a}{\cos a} + \cos^2 a \dfrac{\cos a}{\sin a} + 2 \sin a \cos a \ldots$

$- \dfrac{\sin a}{\cos a} - \dfrac{\cos a}{\sin a}$

$= \dfrac{\sin^4 a + \cos^4 a + 2 \sin^2 a \cos^2 a - \sin^2 a - \cos^2 a}{\sin a \cos a}$

$= \dfrac{(\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - (\sin^2 a + \cos^2 a)}{\sin a \cos a}$

$= 0$

4. Calculer la valeur exacte des expressions suivantes et justifier les résultats obtenus :

   (a) $(1+\sin 60^\circ+\sin^2 30^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^4 45^\circ)(\cos 30^\circ-\sin 60^\circ)$

   (b) $\dfrac{\tan 480^\circ \sin 150^\circ}{\cos 315^\circ \cot 30^\circ}+\dfrac{\cot(-240^\circ)\cos 240^\circ}{\sin 135^\circ \tan(-330^\circ)}$

5. Simplifier les expressions suivantes et justifier les résultats obtenus :

   (a) $\cos(540° - x) + \cos(90° + x) + \sin(-270° - x)$

(b) $$\frac{\sin(270° - x)\tan(180° - x)}{\tan(-180° + x)\cos(180° - x)} + \frac{\cot(90° + x)\sin(x - 90°)}{\cos(x - 1260°)\tan(-x)}$$

6. (a) Simplifier l'expression suivante et justifier les résultats obtenus :

$$\frac{\sin(90° - x) - \tan(-180° - x)}{\tan(270° + x) - \sin(-x)}$$

Si x est un angle du deuxième quadrant tel que $\tan x = -\frac{2}{3}$, calculer la valeur exacte de l'expression simplifiée.

(b) Simplifier l'expression et justifier les résultats obtenus :

$$\frac{\sin(90^\circ - x)\tan(180^\circ - x)}{\cos(90^\circ + x)\cot(-540^\circ - x)} + \frac{\sin(1620^\circ - x)\cot(90^\circ - x)}{\cot(x + 900^\circ)\sin(270^\circ - x)}$$

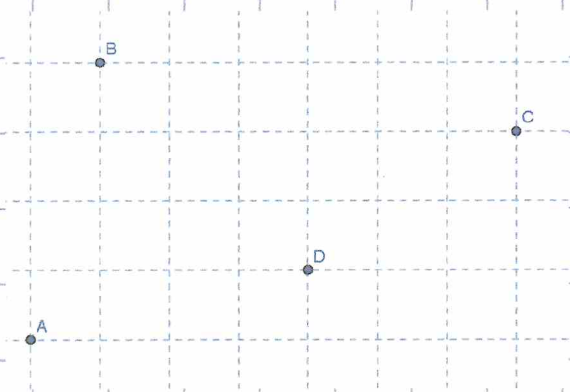
et en donner la valeur exacte si $x = -210^\circ$ et $x = 225^\circ$.

Chapitre 3

Géométrie

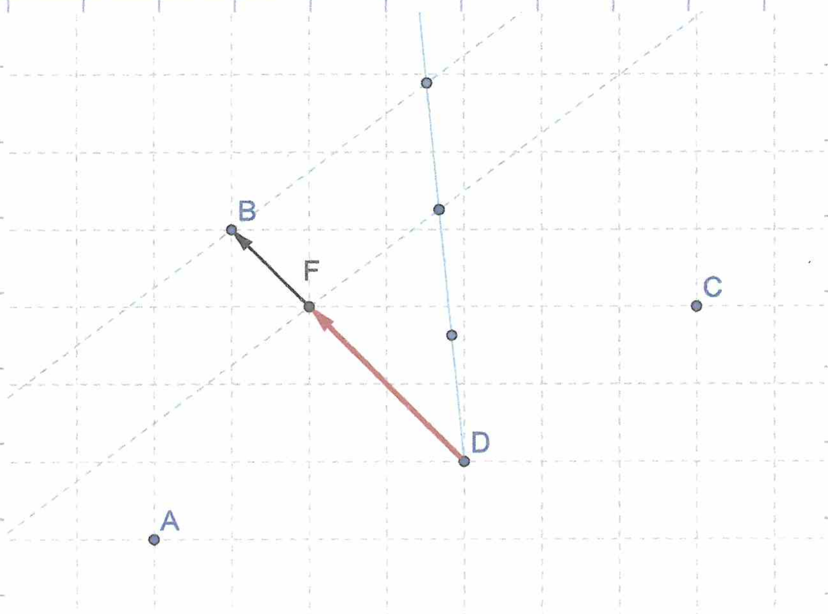
3.1 Exercices

1. Soient les points A, B, C et D du plan représentés ci-dessus.

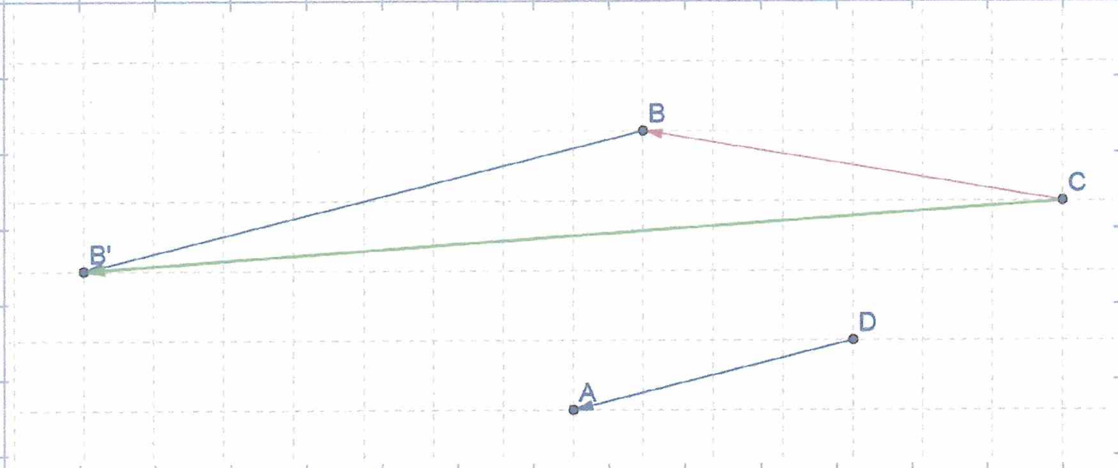


(a) Déterminer graphiquement un représentant des vecteurs suivants :

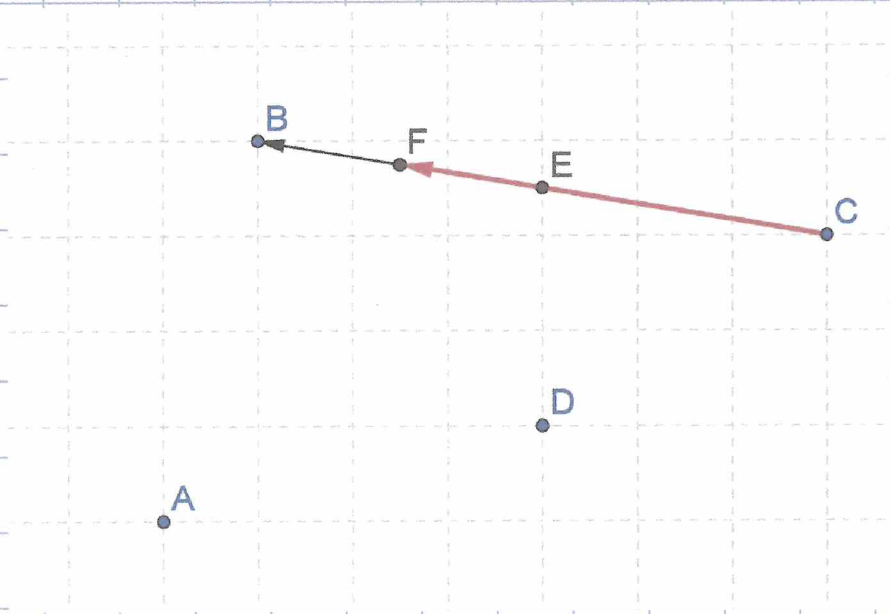
i. $\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$



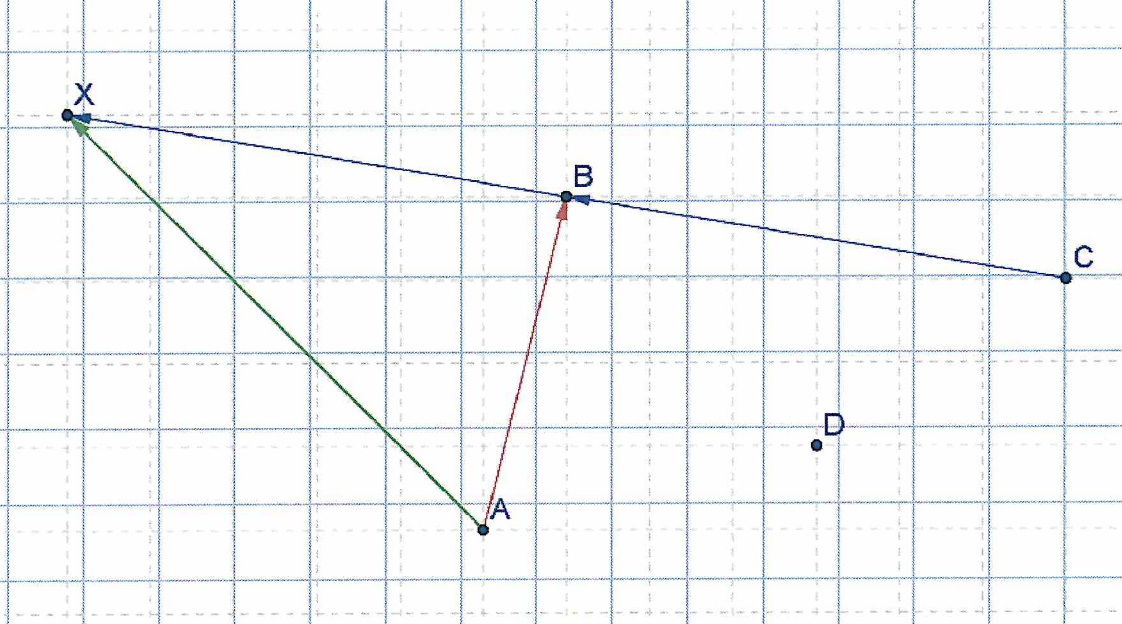
ii. $\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AD}$



iii. $-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$



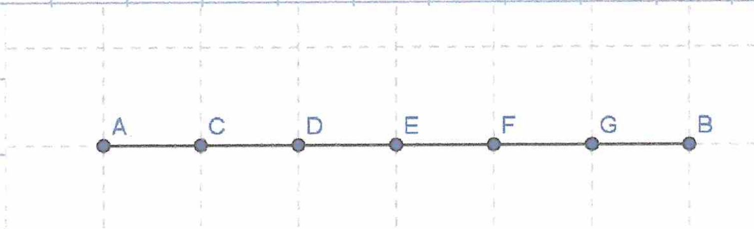
(b) Trouver le point X tel que $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{CB}\right)$



$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}\overrightarrow{AX} = \cancel{\tfrac{1}{2}}\overrightarrow{AB} + \cancel{\tfrac{1}{2}}\overrightarrow{CB}$$

2. Le segment $[AB]$ est divisé en 6 parties égales.



Compléter les relations suivantes :

(a) par la lettre qui convient :

i. $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{EF}$

ii. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{0}$

iii. $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$

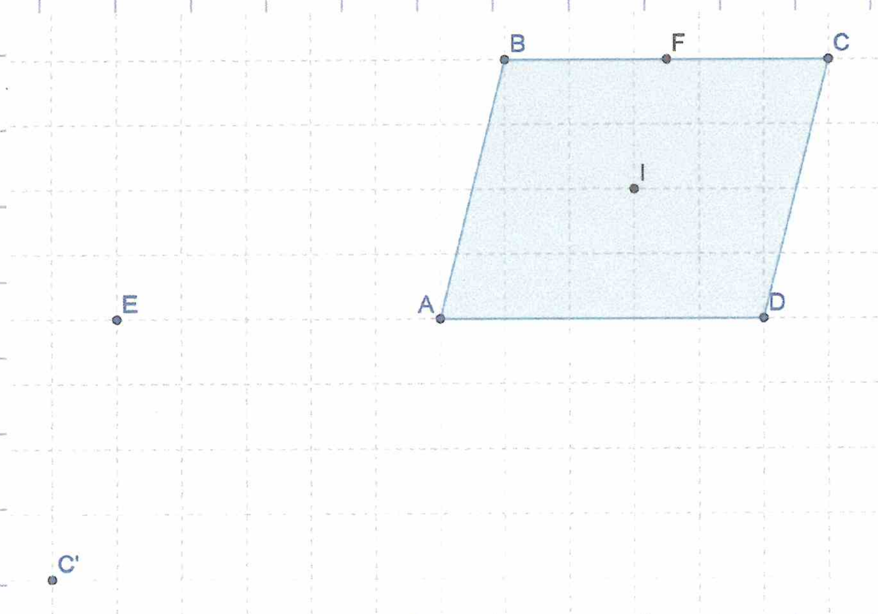
(b) par le nombre qui convient :

i. $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

ii. $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BF}$

iii. $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$

3. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre I.



Compléter les relations suivantes (il ***faut*** rajouter des points pour construire ces figures) :

(a) par la lettre qui convient :

i. $\overrightarrow{AC'} = -2\overrightarrow{AI}$

ii. $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{0}$

iii. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$

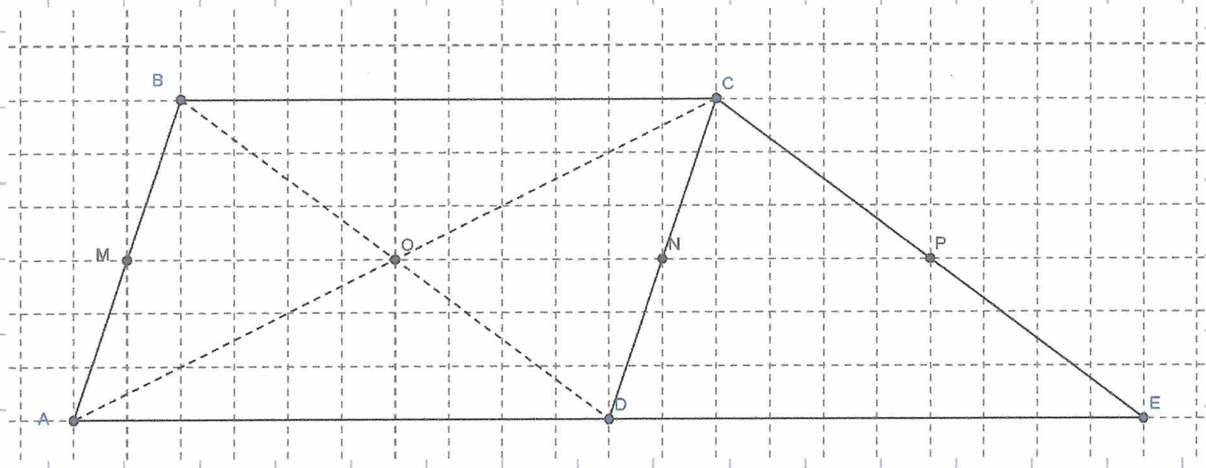
(b) par le nombre qui convient :

i. $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

ii. $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

iii. $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{DI}$

4. $ABCD$ et $BCED$ sont deux parallélogrammes. M, N et P sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$ et $[CE]$.



(a) Citer deux représentants du vecteur $\overrightarrow{ND}$

(b) Compléter les égalités suivantes :

i. $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{CO}$

ii. $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

iii. $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BD}$

iv. $\overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}$

5. On donne les points M(-1,3), N(8,-4) et X(5,a) où a est un réel. Comment choisir a pour que les points M, N et X soient alignés ?

$\overrightarrow{MN} : \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{MX} : \begin{pmatrix} 6 \\ a-3 \end{pmatrix}$

Il faut que $\frac{9}{6} = \frac{-7}{a-3} \Leftrightarrow 9(a-3) = -42$

$\Leftrightarrow 9a - 27 = -42 \Leftrightarrow 9a = -15 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{3}$

6. Soient les points A(7,2), B(3,-3), C(0,2) et D(8,y).

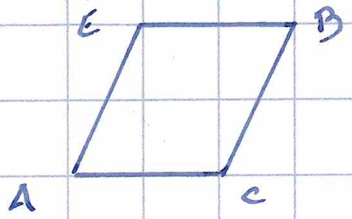
(a) Déterminer y pour que D soit situé sur la parallèle à (AB) passant par C.

$\overrightarrow{CD} // \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD} : \begin{pmatrix} 8 \\ y-2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\frac{8}{-4} = \frac{y-2}{-5} \Leftrightarrow +40 = +4(y-2) \Leftrightarrow 10 = y-2$

$\Leftrightarrow y = 12$

(b) Déterminer les coordonnées de E pour que $AEBC$ soit un parallélogramme ;



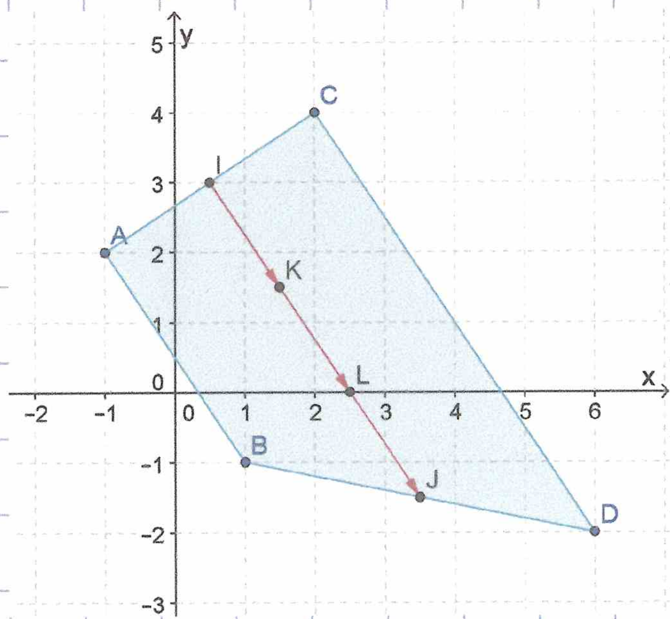
$E(x,y)$ et $\vec{AE} = \vec{BC}$

$\vec{AE} : \begin{pmatrix} x-7 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} : \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x-7=-3 \\ y-2=5 \end{cases} \rightarrow E(4,7)$

7. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère quatre points A(-1,2), B(1,-1), C(2,4) et D(6,-2).

(a) Faire une figure.



(b) Montrer que $ABDC$ est un trapèze et non un parallélogramme.

$\vec{AC} \not\parallel \vec{BD}$ et $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$

$\vec{AB} : \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{CD} : \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ ok (prop)

$\vec{AC} : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{BD} : \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ok (pas prop)

(c) Soit I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AB).

$I\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ et $J\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right) \rightarrow \overrightarrow{IJ} : \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$

prop à $\overrightarrow{AB}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

car $\frac{2}{3} = \frac{3}{-\frac{9}{2}}$

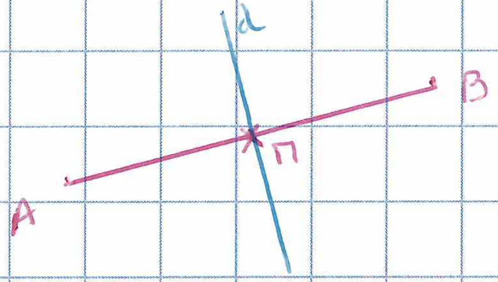
(d) Soit K le milieu de $[BC]$ et L le point tel que $2\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD}$. Monter que les points I, J, K et L sont alignés.

$K : \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et $L \left\{ 2\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right.$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 7 \\ 2y - 4 = -4 \end{cases} \rightarrow L\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{KL} : \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ prop à $\overrightarrow{IJ}$ (cf (c))

11. Dans un repère orthonormé on donne les points $A(-5,2)$ et $B(4,-3)$. Déterminer l'équation de la médiatrice de $[AB]$.



$d \perp AB$

$d \ni \Pi : \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$m_{AB} = \frac{-3-2}{4+5} = -\frac{5}{9}$

$\Rightarrow m_d = \frac{9}{5}$

$d \equiv y + \frac{1}{2} = \frac{9}{5}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$\equiv y = \frac{9}{5}x + \frac{9}{10} - \frac{1}{2}$

$\equiv y = \frac{9}{5}x + \frac{2}{5}$ $\quad (9x - 5y + 2 = 0)$

9. On donne les points $A(-1,2)$, $B(3,4)$ et $C(1,-3)$.

   (a) Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC ;

$$G\left(\frac{-1+3+1}{3}, \frac{2+4-3}{3}\right) = (1,1)$$

   (b) Ecrire l'équation de la droite parallèle à Oy passant par B ;

$$x = 3$$

   (c) Déterminer la longueur de la hauteur relative à C ;

On cherche $d(C, AB)$

$$AB \equiv y-2 = \frac{4-2}{3+1}(x+1)$$

$$\equiv y-2 = \frac{2}{4}(x+1)$$

$$\hookrightarrow m_{AB} = \frac{1}{2}$$

$$CI \equiv y+3 = -2(x-1)$$

$$\{I\} = AB \cap CI : \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ (2) \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2}x = \frac{7}{2} \\ (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{5} \\ y = \frac{14}{5} - 1 \end{cases} \qquad I : \left(-\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

$$d(C, AB) = d(C, I) = \sqrt{\left(1+\frac{7}{5}\right)^2 + \left(-3-\frac{9}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

(d) Déterminer l'angle entre BC et Ox;

$$m_{BC} = \frac{-3-4}{1-3} = \frac{7}{2} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{7}{2}\right) \simeq 74{,}05^\circ$$

(e) Déterminer le rayon du cercle circonscrit au triangle AGC.

$$\mathrm{med}_{[AG]} : M' : \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

$$m_{AG} = \frac{1-2}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{med}_{[AG]} \equiv y - \frac{3}{2} = 2(x-0)$$

$$\equiv y = 2x + \frac{3}{2}$$

$$\mathrm{med}_{[GC]} : N' : (1, -1) \text{ et } m_{GC} = \infty$$

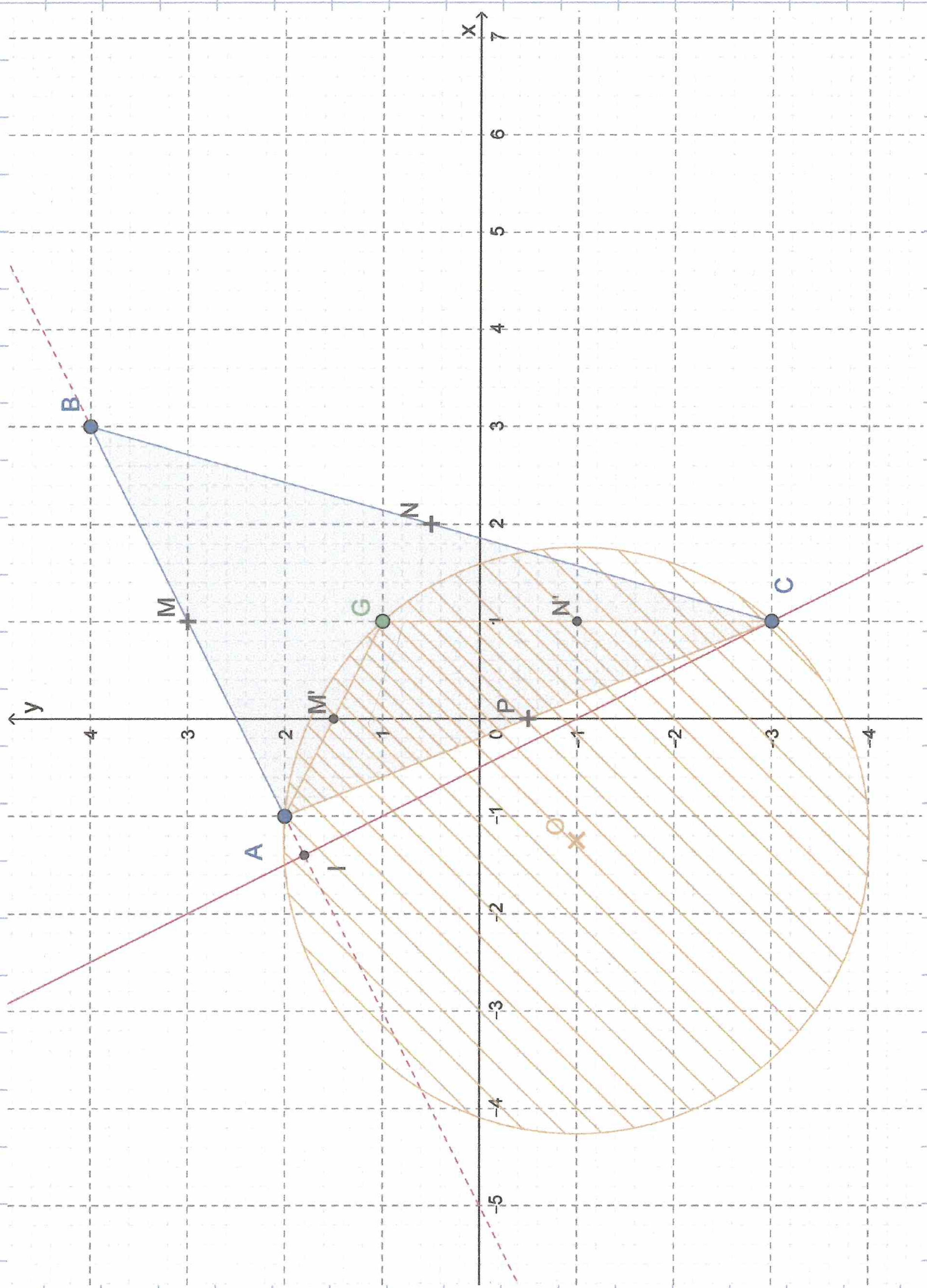
on voit (sur le dessin) que $\mathrm{med}_{[GC]} \equiv y = -1$

$$\Rightarrow \{O\} : \begin{cases} y = 2x + \frac{3}{2} \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2x + \frac{3}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{4} \\ y = -1 \end{cases} \qquad O : \left(-\frac{5}{4}, -1\right)$$

$$\text{et } R = |OA| = \sqrt{\left(-\frac{5}{4}+1\right)^2 + (-1-2)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{145}}{4}$$


x
y
A
B
C
G
M
N
M'
N'
P
I
O