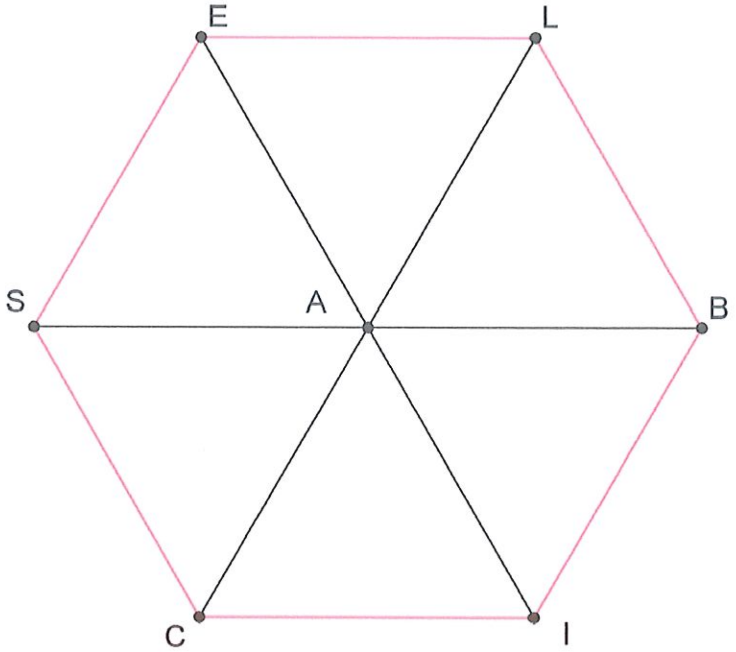
Calcul vectoriel dans le plan : Solutions

1. La figure suivante représente un hexagone.



Déterminer un représentant des vecteurs suivants :

(a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{CI}$

(b) $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{SC}$

(c) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{SE}$

(d) $2\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{EI}$

(e) $2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{SB}$

Compléter ensuite les relations suivantes en n'utilisant que les lettres du dessin :

(a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}$

(b) $\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA}$

(c) $\overrightarrow{ES} + \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{EC}$

(d) $\overrightarrow{ES} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{LC}$

(e) $\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{LS}$

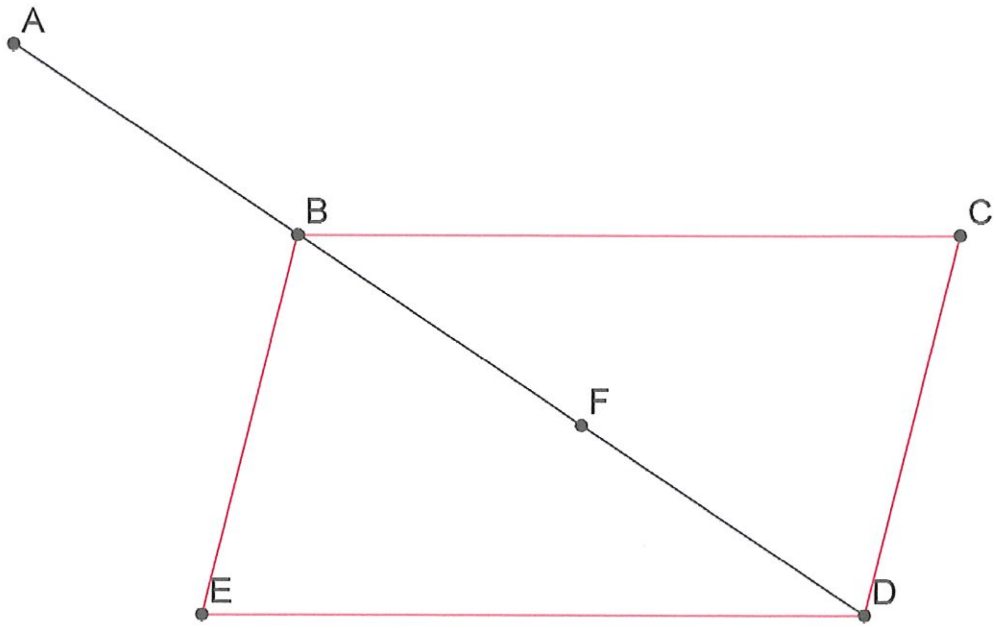
(f) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{0}$

(g) $\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{LE} = \overrightarrow{0}$

(h) $\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BS}$

(i) $\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BE}$

2. La figure suivante représente un parallélogramme. Le point A est le symétrique de F par rapport à B.



Compléter les relations suivantes :

(a) $\overrightarrow{BD} = -\cancel{\frac{3}{2}}\overrightarrow{DA}$ $\quad -\frac{2}{3}$

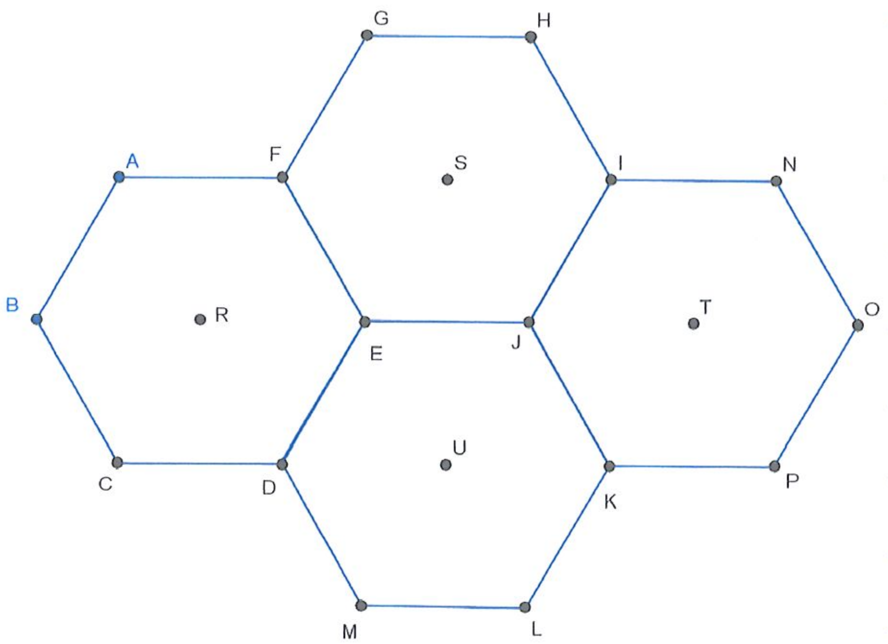
(b) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DE}$

(c) $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{0} + 2\overrightarrow{DF}$

(d) $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CD}$

(e) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$

3. Voici 4 hexagones réguliers, les points R, S, T et U étant le centre de chacun d'eux.



(a) Les égalités suivantes sont-elles vraies ? Justifier !

i. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EH}$: Vrai - Faux

ii. $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{LM}$: Vrai - Faux

iii. $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$: Vrai - Faux

iv. $\overrightarrow{OJ} = 2\overrightarrow{FA}$: Vrai - Faux

v. $\overrightarrow{JB} = 3\overrightarrow{KP}$: Vrai - Faux

vi. $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$: Vrai - Faux

vii. $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{ER}$: Vrai - Faux

viii. $\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{EJ} + 2\overrightarrow{KT}$: Vrai - Faux

ix. $\overrightarrow{UK} = -\overrightarrow{AF}$: Vrai - Faux

x. $\overrightarrow{DU} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AN}$: Vrai - Faux

(b) Compléter les pointillés pour que les égalités suivantes soient vraies.

i. $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{AF}$

ii. $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EO}$

iii. $\overrightarrow{TJ} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{BO}$

iv. $\overrightarrow{ML} = -\overrightarrow{HG}$

v. $\overrightarrow{DK} = -2\overrightarrow{NI}$

vi. $\overrightarrow{DK} = 1\overrightarrow{FH} + 1\overrightarrow{FE}$

vii. $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{RT} + 2\overrightarrow{GS}$

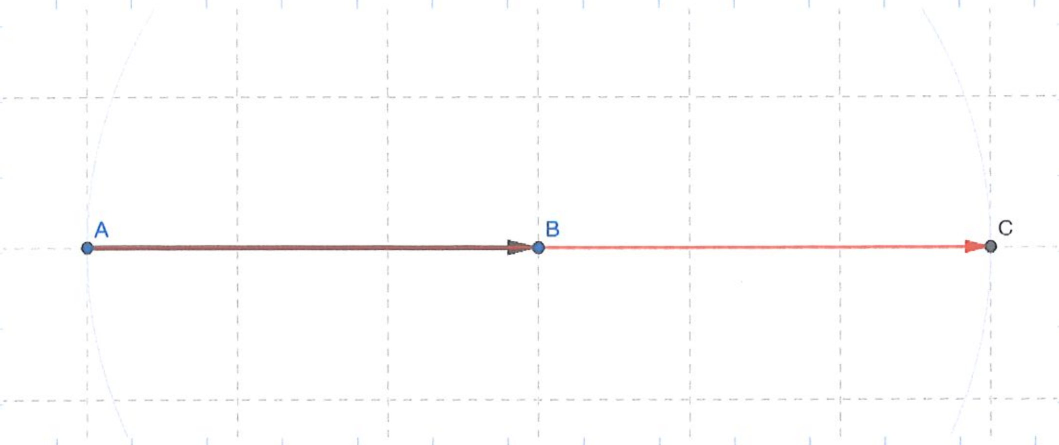
viii. $\overrightarrow{JT} = 1\overrightarrow{CD} + 0\overrightarrow{KO}$

ix. $\overrightarrow{NL} = 0\overrightarrow{KP} + -3\overrightarrow{DE}$

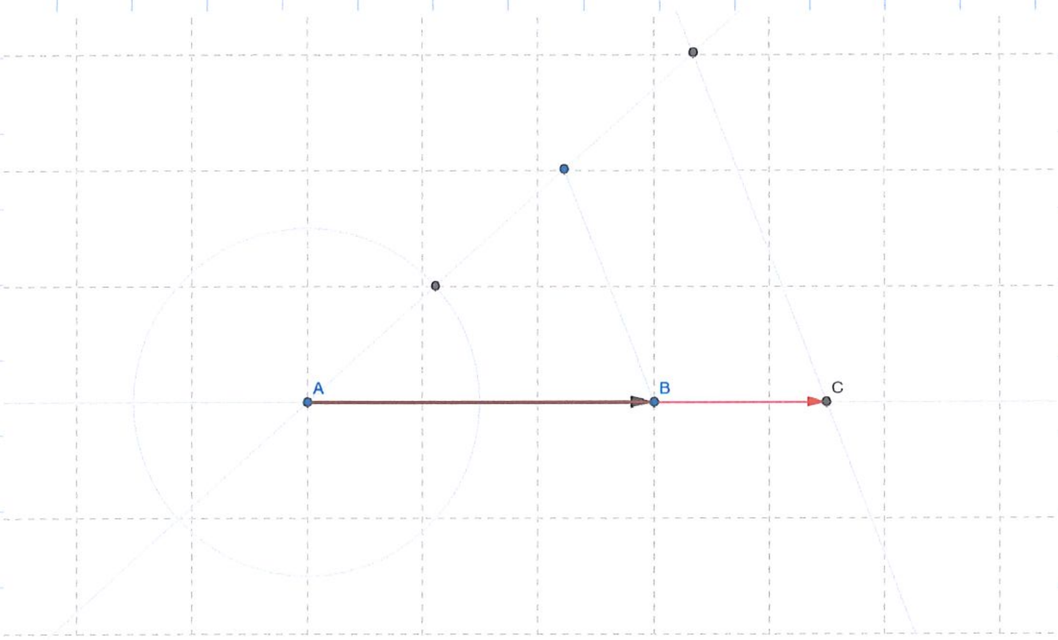
x. $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AN} + -\frac{1}{2}\overrightarrow{IU}$

4. Soient deux points A et B distants de 3cm. Déterminer précisément et en justifiant les constructions les vecteurs

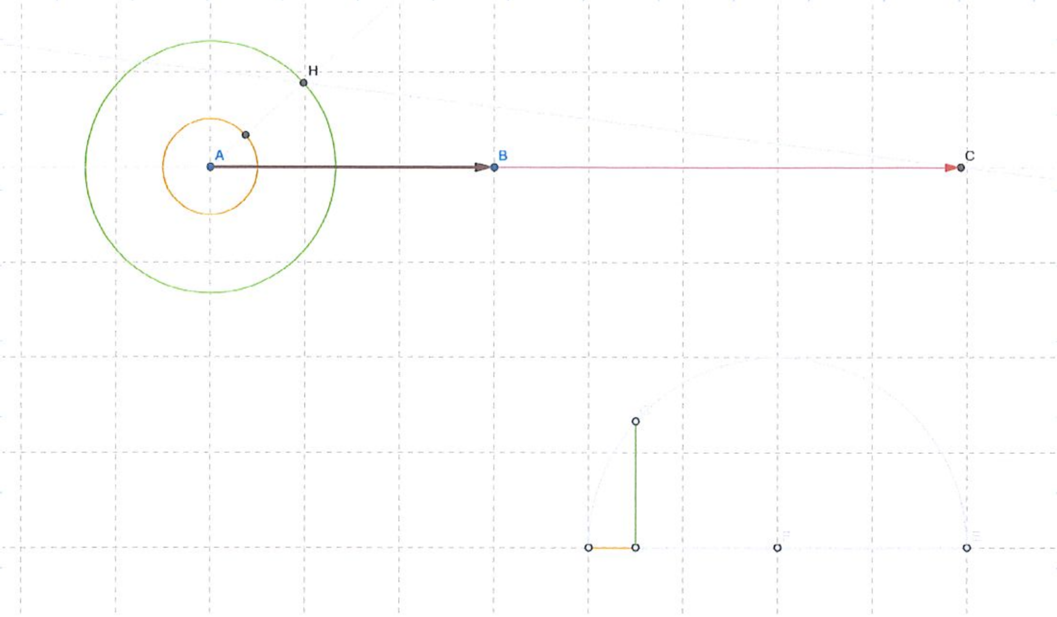
   (a) $2\overrightarrow{AB}$



   (b) $\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

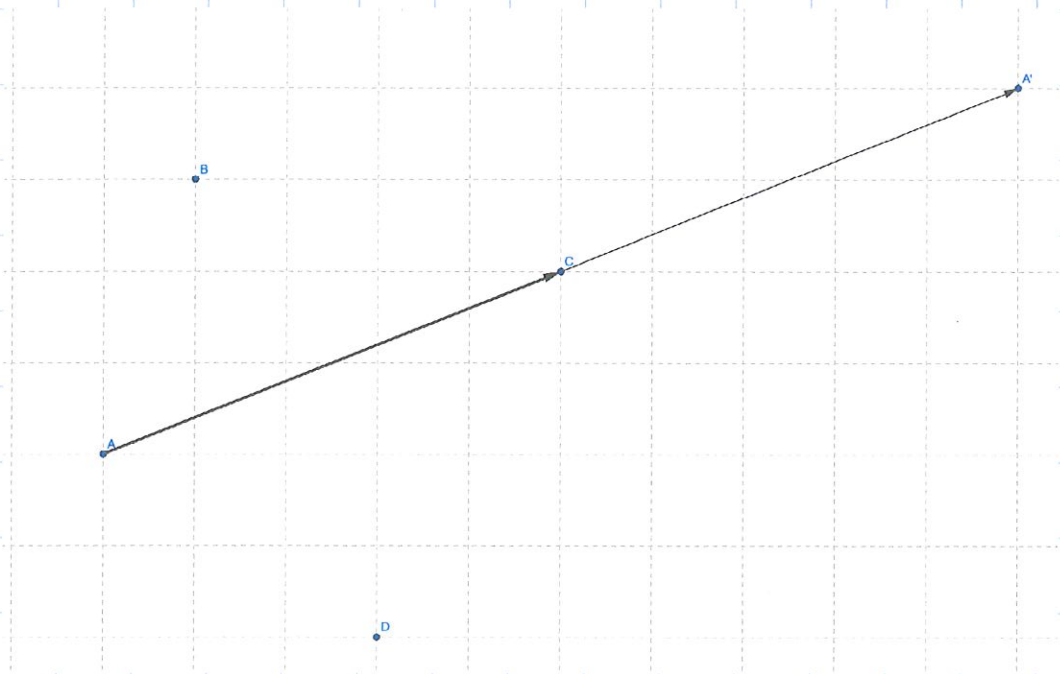


(c) $\sqrt{7}\overrightarrow{AB}$



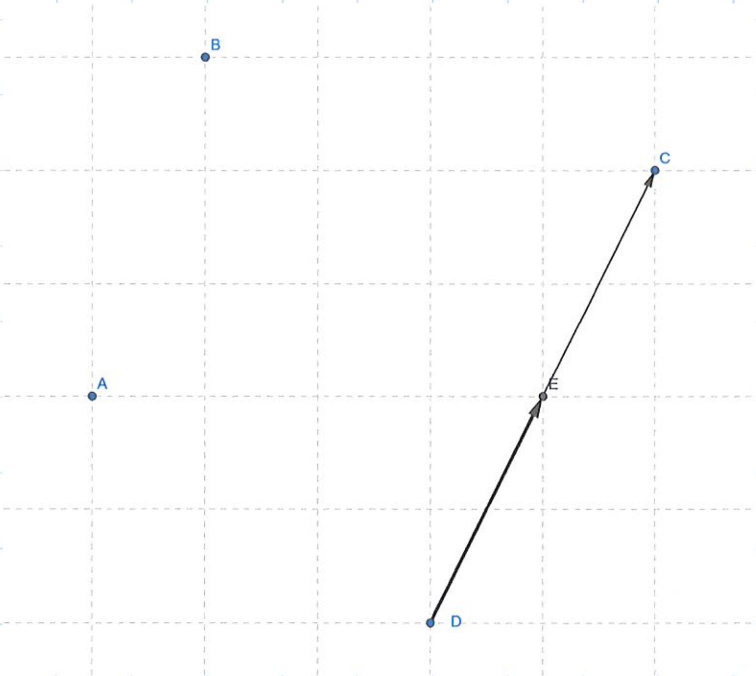
5. On donne les points A, B, C et D comme indiqués sur la figure suivante. Construire[1] un représentant des vecteurs suivants :

   (a) $2\overrightarrow{AC}$

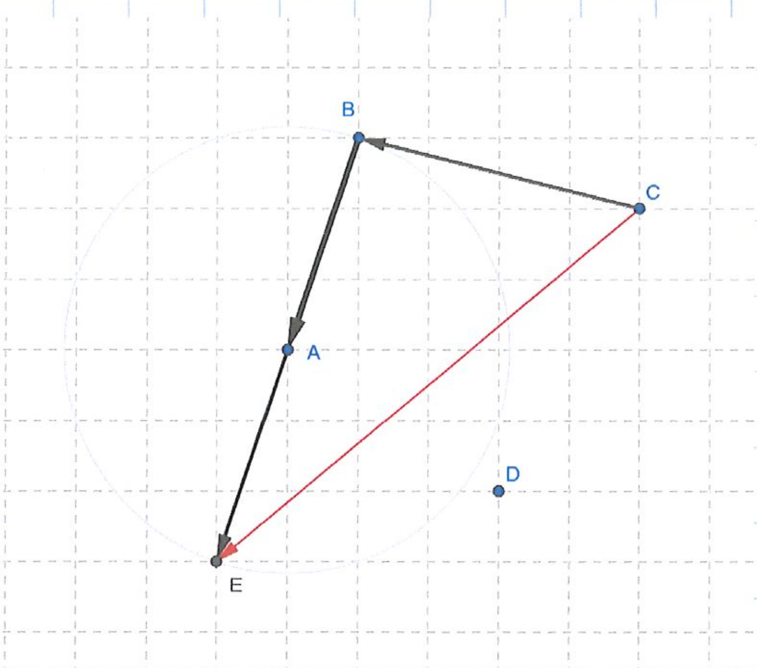


1. La construction doit être précise. On utilisera à cet effet les outils de 2ème (Pythagore, Thalès)

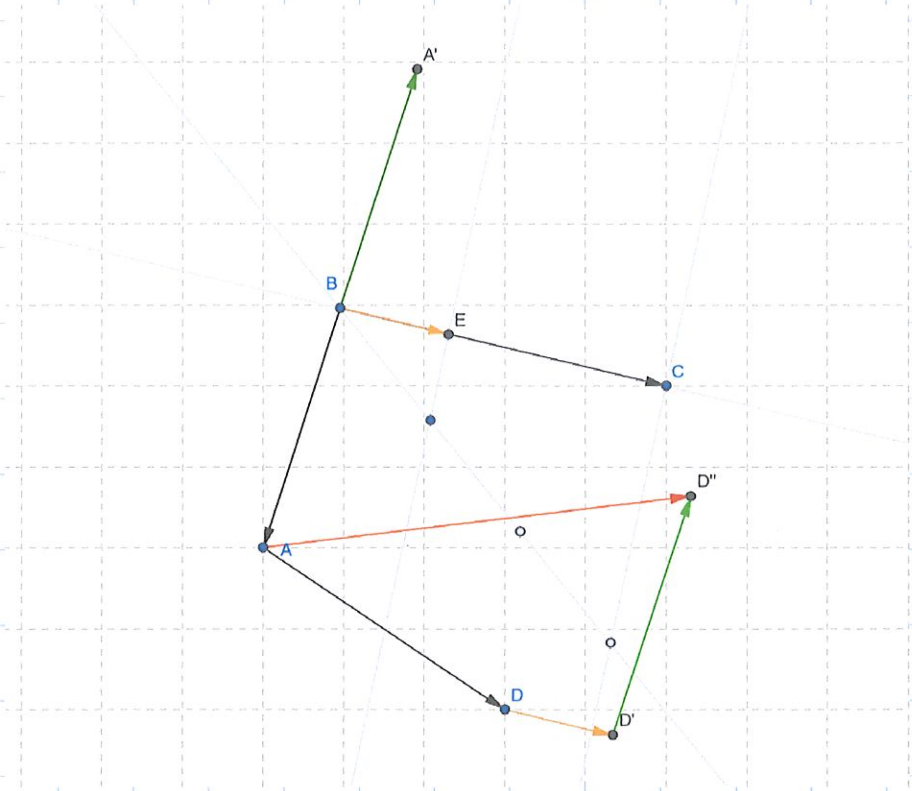
(b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$



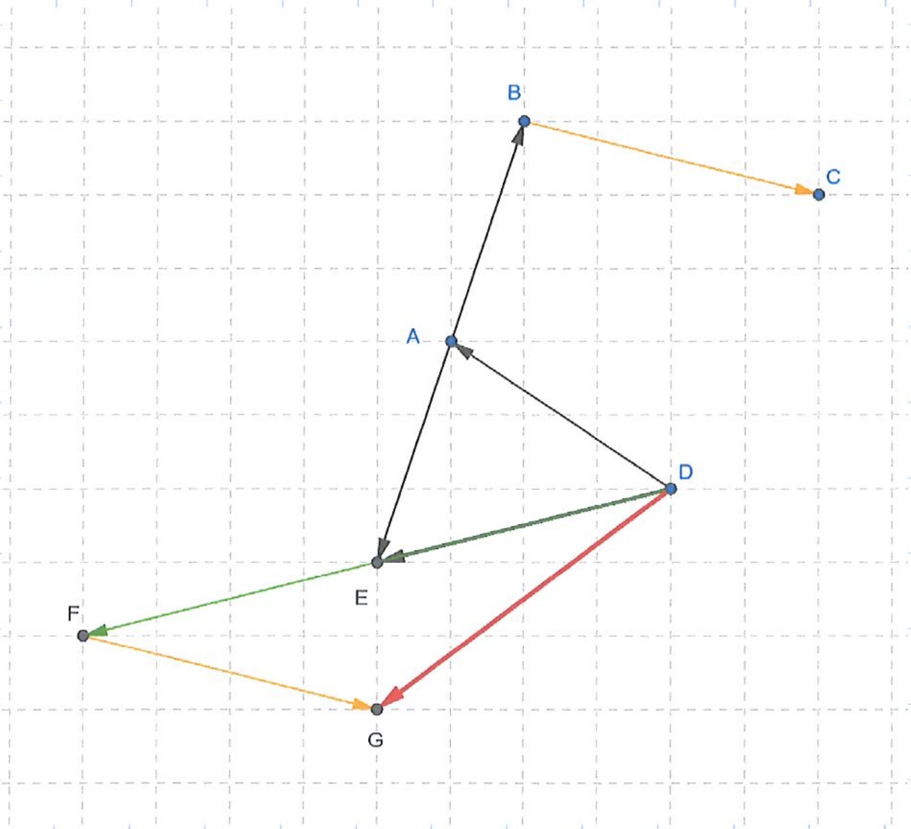
(c) $\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA}$



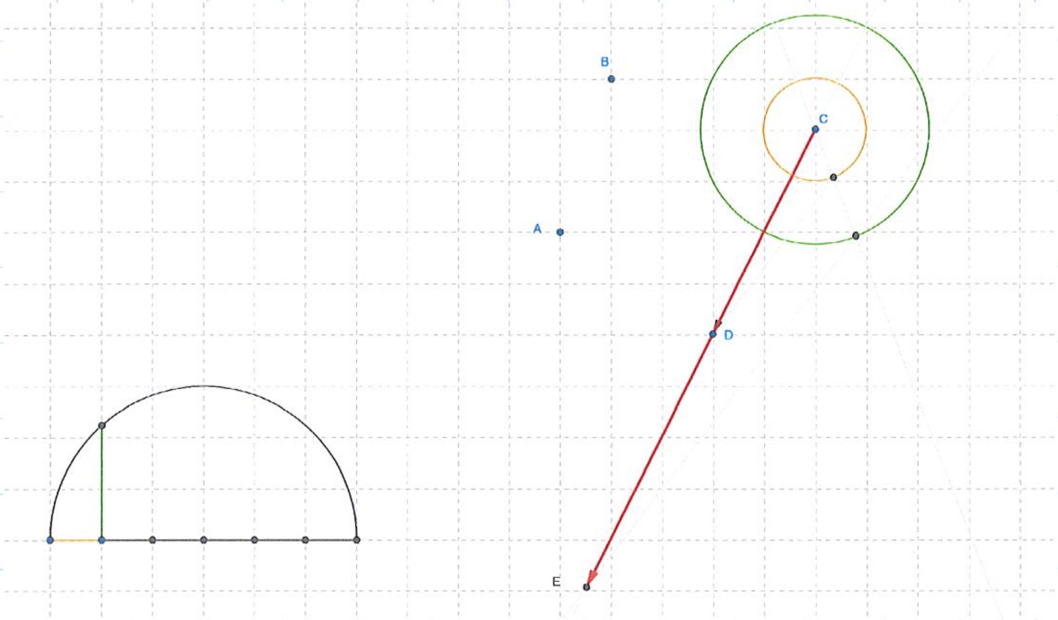
(d) $\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$



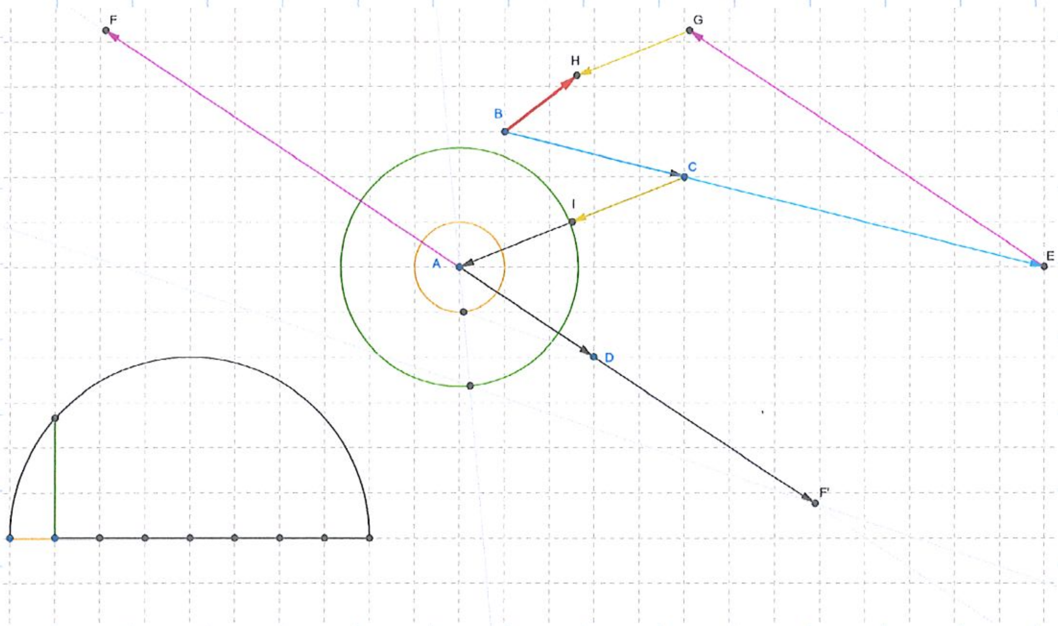
(e) $2(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC}$



(f) $\sqrt{5}\overrightarrow{CD}$

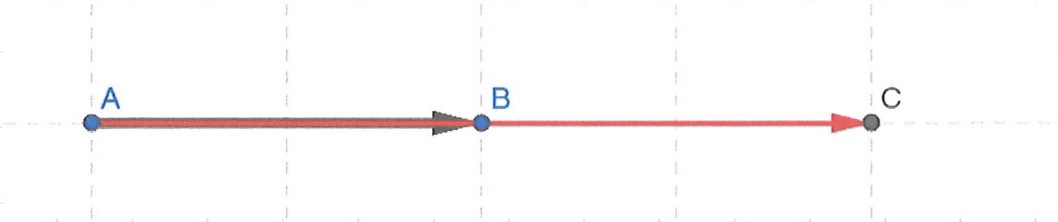


(g) $3\overrightarrow{BC} - \sqrt{7}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$



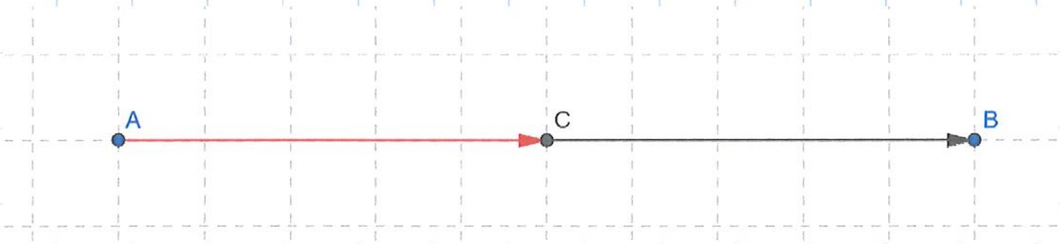
6. Sur la droite AB, déterminer un point C tel que

(a) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$



(b) $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

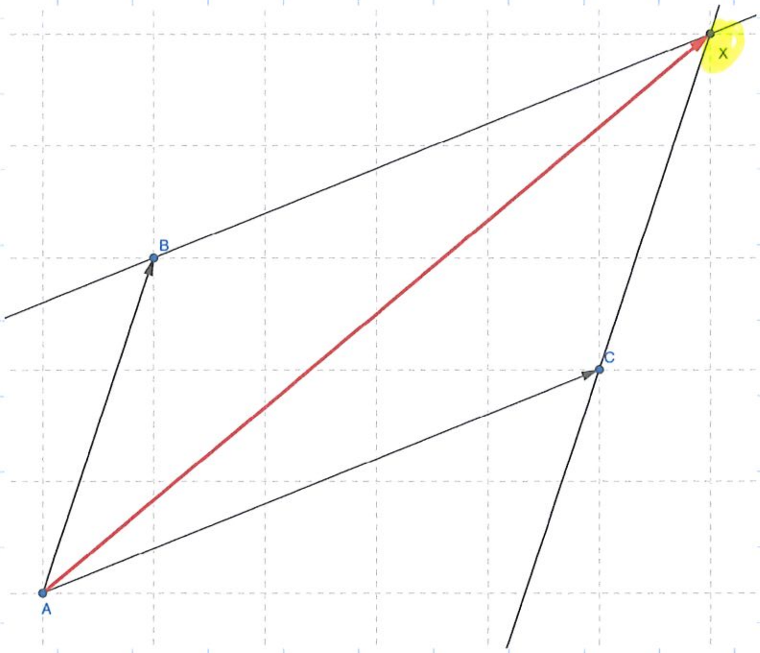
(c) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$



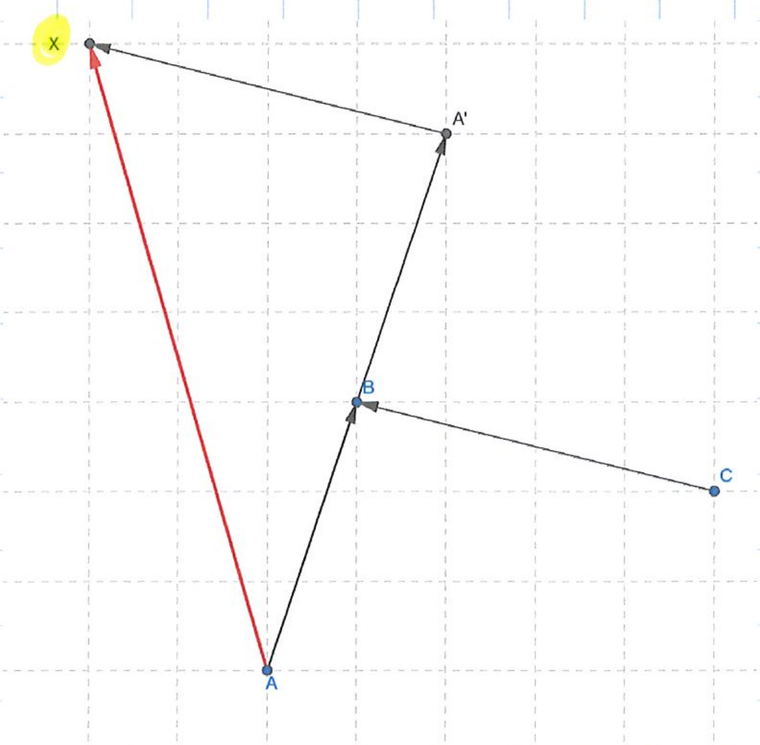
(d) $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

7. Soient trois points non alignés A, B et C. Déterminer graphiquement le point X tel que :

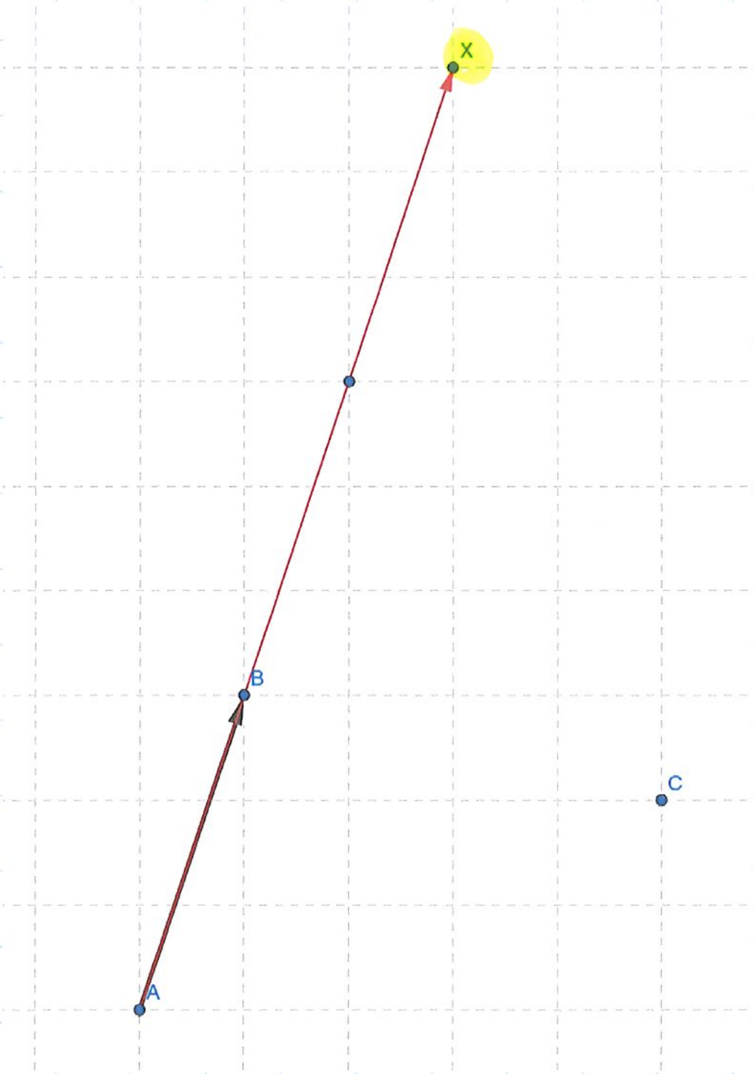
(a) $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



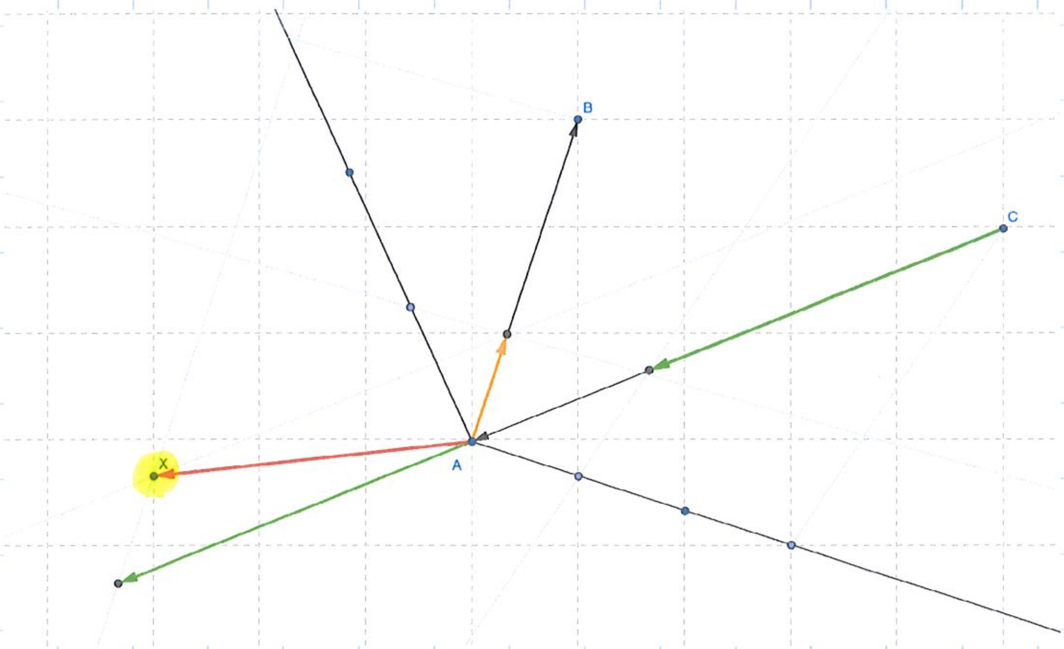
(b) $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{BX} + \overrightarrow{BC}$



(c) $2\overrightarrow{AX} = 3\overrightarrow{BX}$



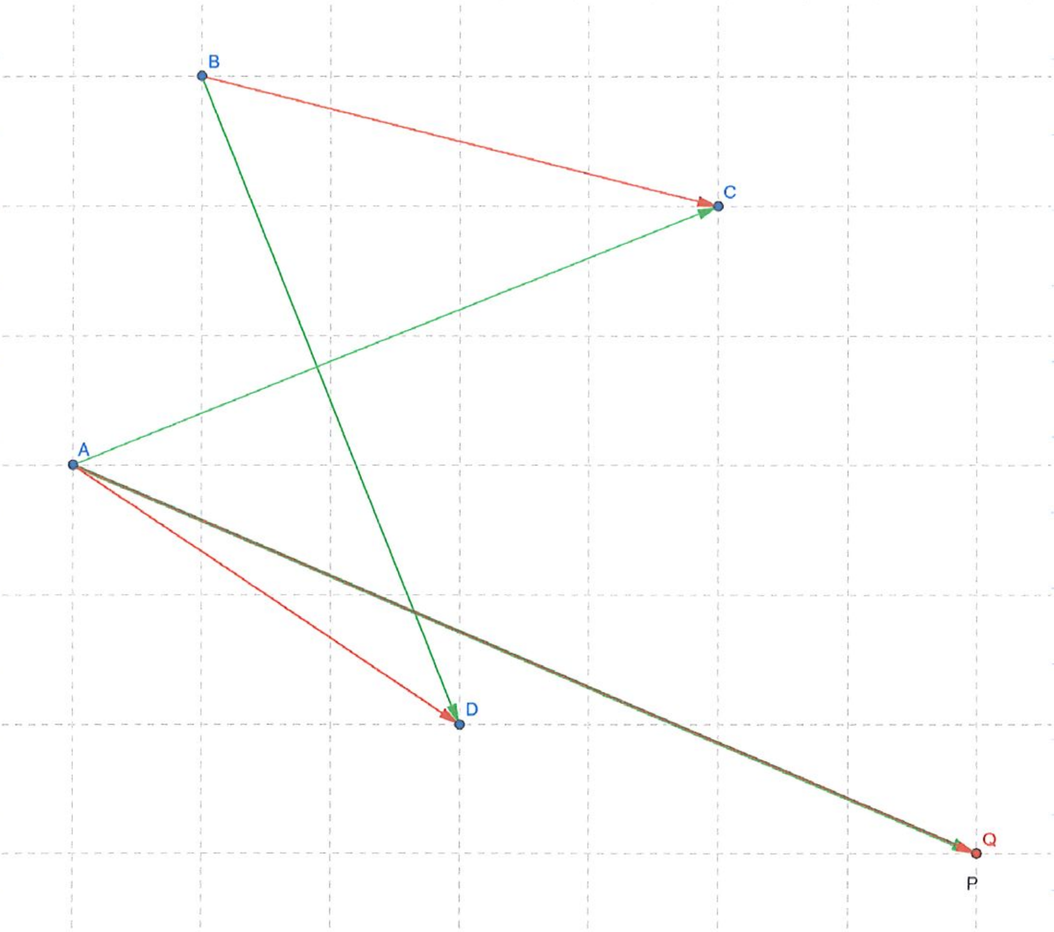
(d) $\overrightarrow{AX} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CX}$



8. Soient A, B, C et D quatre points non alignés.

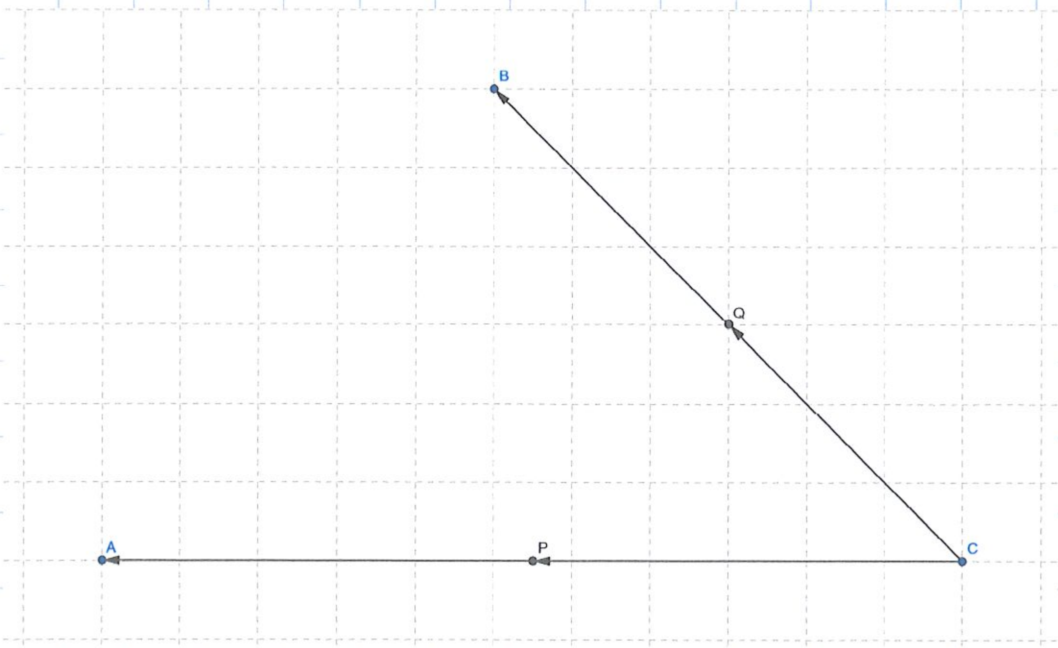
(a) Construire deux points P et Q tels que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

(b) Démontrer que P et Q sont confondus



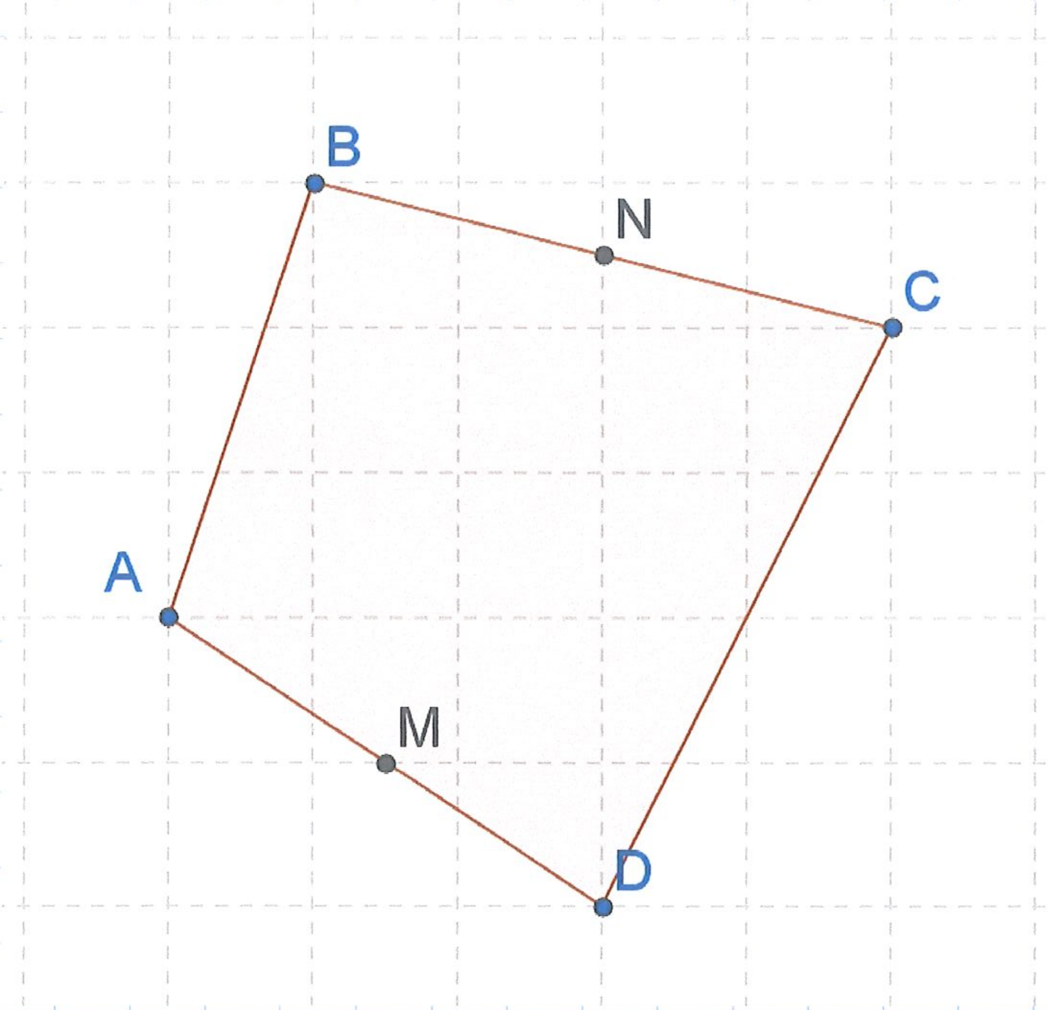
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}\right) \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AQ}\end{aligned}$$

9. Etant donné les points A, B, C, P et Q tels que $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QB}$, démontrer que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ}\\ &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QB}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

10. Démontrer que, dans un quadrilatère quelconque $ABCD$, si M est le milieu de $[AD]$ et N le milieu de $[BC]$ alors $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2}$



$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

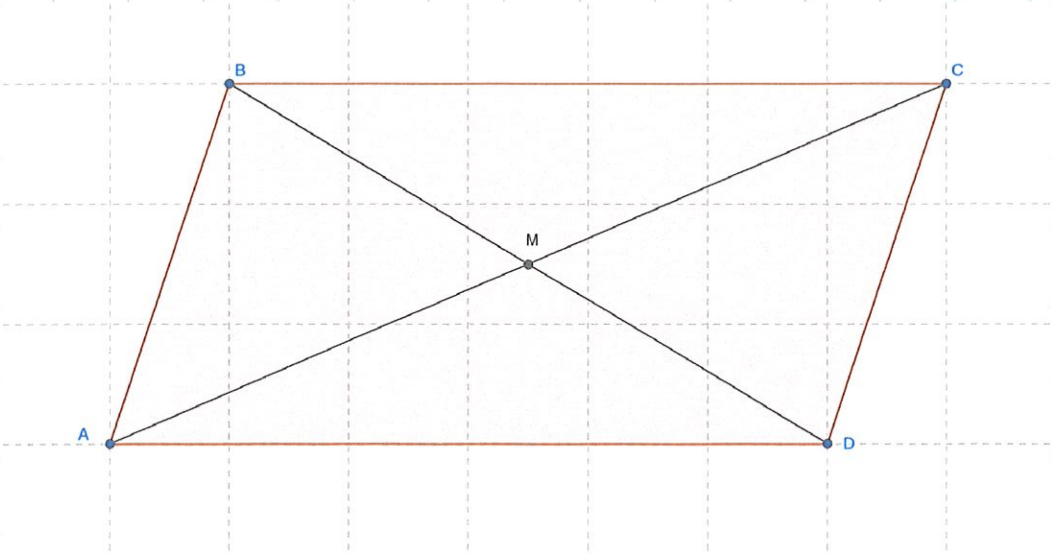
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$= \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2}$

11. Démontrer que si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme.



$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$$
$$\vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{BD}$$

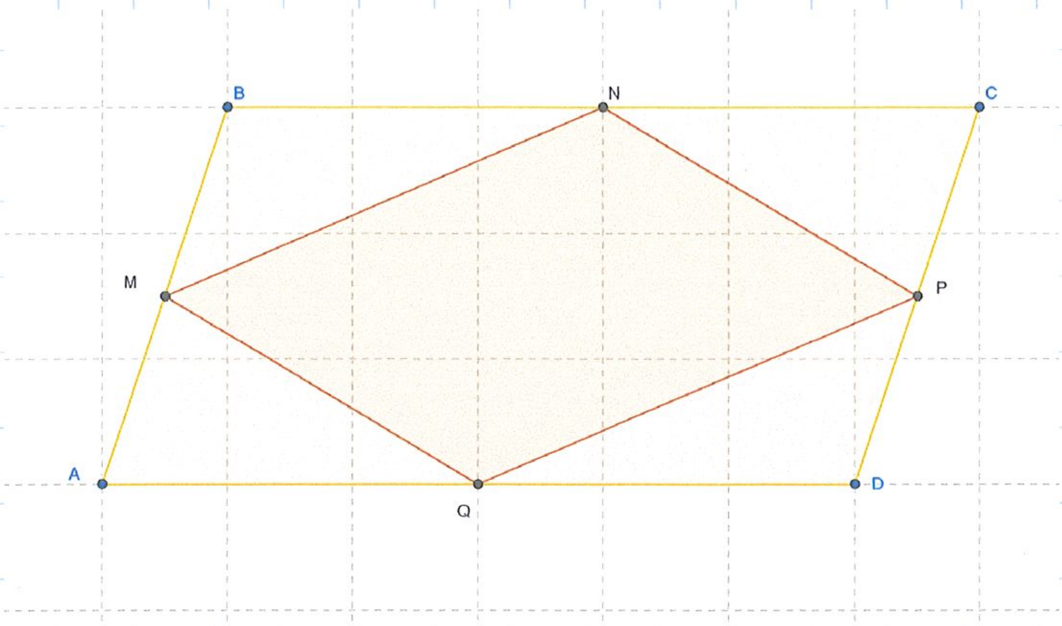
$$\begin{aligned}
\vec{AB} &= \vec{AM} + \vec{MB} \\
&= \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{DB} \\
&= \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{DC}) + \frac{1}{2}\vec{DB} \\
&= \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} + \frac{1}{2}\vec{DB} \\
&= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{DC}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{DC}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{DC}$$
$$\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$$

Idem : $\vec{AD} = \vec{BC}$

$\Rightarrow$ ABCD est un parallélogramme

12. On donne un parallélogramme $ABCD$ et les points M, N, P et Q respectivement milieu de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$. Démontrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.



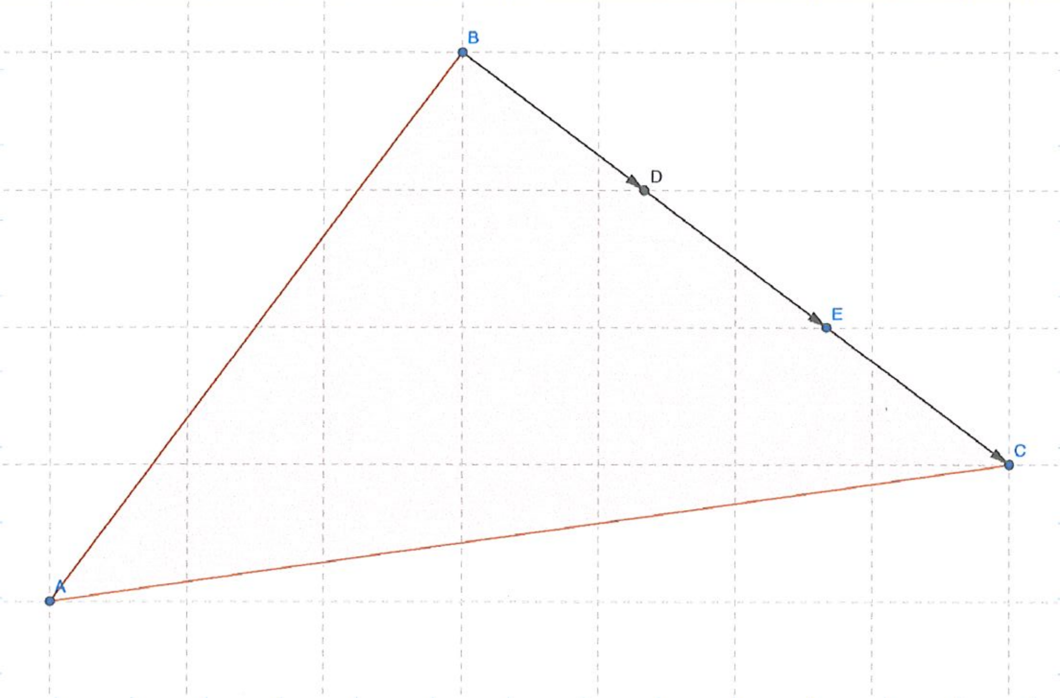
$MNPQ$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

(ou $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \quad (\text{car } ABCD \text{ est un } \square) \\
&= \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{QD} \\
&= \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} \\
&= \overrightarrow{QP}
\end{aligned}$$

(Idem pour l'autre égalité)

13. Soit ABC un triangle et, sur le segment $[BC]$ les points D et E tels que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$. Démontrer que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE})$$
$$= \overrightarrow{AB} + \cancel{\overrightarrow{EC}} + \overrightarrow{AC} + \cancel{\overrightarrow{CE}}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

14. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Démontrer que :

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$

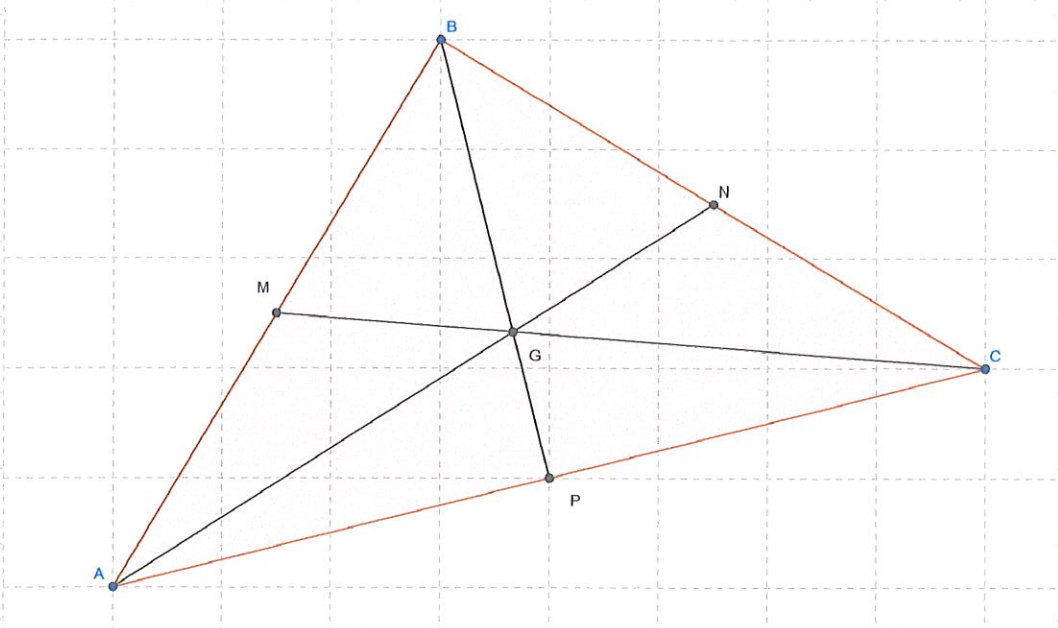
(b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$

a) C'est la définition d'un parallélogramme

b) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$

15. Soit ABC un triangle et G le centre de gravité du triangle. Démontrer que

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$



$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PA})+(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NC})$$

$$=\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{BP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}+\underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{0}}$$

car $(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{0})$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AN})$$

$$=\frac{1}{3}\left[(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP})+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[(\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{0}})+(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN})\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{0}}\right)$$

$$=\overrightarrow{0}$$